

Yapısal olmayan belirsizliğe sahip sistemler için P ve PI kontrolör tasarımı

Nevra BAYHAN*, Mehmet Turan SÖYLEMEZ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, yapısal olmayan belirsizliğe sahip tek girişli-tek çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılan oransal (P) ve oransal-integral (PI) kontrolörlerin tam bir kümesini bulmak için yeni yöntemler önerilmiştir. Böyle bir sistemi dayanıklı kararlı kılan tüm oransal kontrolörleri hesaplamak için önerilen yöntem, temelde Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesine dayanır. Yapısal olmayan belirsizliklere sahip bir sistemin Nyquist eğrisi, tek bir eğri olmayıp reel eksen bölgeler biçiminde kesen bir eğri ailesi biçimindedir. Bu eğri ailesi, belirsizlik disklerinden oluşan bir bantın içinden geçer. Nominal sistemi kararlı yapan kazançlar ile belirsizlik bantının reel eksen kesim yerlerinden bulunan belirsizlik kazanç kümelerinden yararlanarak sistemi kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılan kazançların hesabı hızlıca yapılabilir. İki reel polinomun köklerinin hesabını gerektiren bu yöntemin bir parametre üzerinde herhangi bir tarama yapmayı gerektirmemesinden dolayı literatürdeki yöntemler üzerine avantajı da vardır. PI kontrolör parametrelerinin kutupsal koordinatlarda yazılmasıyla bulunan yeni sistem için birim daire tatarılarak ve bu yöntemden elde edilen sonuçlardan da yararlanılarak dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin tam bölgesi hesaplanabilir. Ayrıca yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörleri bulmak için parametre uzayı yaklaşımını kullanan geometrik tabanlı iki yeni yöntem de önerilmiştir. Bu yöntemler, belirsizlik disklerinin orijini içermesi ve içermemesine göre iki aşama içerirler. Birinci yöntem, dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin tam bölgesini hesaplayan yavaş bir yöntemken; diğeri ise dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin yaklaşık bölgesini veren hızlı bir yöntemdir.

Anahtar Kelimeler: P ve PI kontrol, dayanıklı kontrol, Nyquist teoremi, parametre uzayı yaklaşımı.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Nevra BAYHAN. nevra@istanbul.edu.tr; Tel: (212) 473 70 70/ 17784.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Dayanıklı P ve PI tipi kontrolör tasarımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.10.2008 tarihinde dergiye ulaşmış, 17.10.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

P and PI controller design for systems with unstructured uncertainty

Extended abstract

In controller design, it is essential to achieve stability of the closed-loop system and various performance specifications. Frequency domain criteria such as gain margin, phase margin and H_∞ norms of the closed-loop transfer functions as well as time domain criteria such as settling time, rise time and overshoot can be counted among important performance specifications. Most of the controllers used in the practical world are low order controllers such as P, PI and PID controllers. It is possible to see that methods for finding stabilizing low order compensators can be considered in three main categories: methods based on Nyquist theorem, methods based on a generalized version of the Hermite-Biehler theorem, and methods based on parameter space and the concept of singular frequencies.

Robust stabilization of continuous time single-input single-output (SISO) linear time invariant (LTI) systems with multiplicative uncertainties is considered in this study. In particular, it has been shown that all P and PI controllers that robustly stabilize a given uncertain SISO LTI system can be found by utilizing a generalization of the Nyquist theorem and the parameter space approach, respectively. The generalization of Nyquist stability criterion suggests to determine the number of the unstable poles for gain intervals obtained by calculating the location and direction of the crossing of the Nyquist plot with the real axis. A stable characteristic polynomial, whose roots are in the left half plane, becomes unstable if and only if at least one root crosses the imaginary axis. The parameter values of the root crossing form the stability boundaries in the parameter space, which can be classified into three cases: the real root boundary, where a root crosses the imaginary axis at the origin (substitute $s = jw$ and $w = 0$ in the characteristic polynomial), the infinite root boundary, where a root leaves the left half plane at infinity (for $w \rightarrow \infty$) and the complex root boundary, where a pair of conjugate complex roots crosses the imaginary axes (for $0 < w < \infty$). These stability boundaries separate regions in which the number of closed loop system unstable poles do not change in the parameter space.

Sometimes, it is not possible to represent uncertainties in a system model with parametric

uncertainties. Such uncertainties are usually encapsulated in a norm bounded system block that acts on a nominal system in an additive or multiplicative manner. Although it is possible to find robust controllers that can stabilize systems with such uncertainties by the help of H_∞ control theory, the resulting compensators are usually of high order (at least as high as the order of the plant) and therefore impractical in many cases. Several attempts exist to put constraints on the order of H_∞ controllers in the literature. However, many of these approaches suffer from computational intractability.

In many practical cases direct determination of the set of P and PI controllers that provide robust stability of SISO LTI systems with unstructured uncertainty is required. To the best knowledge of authors, there is no such direct methods available in the literature for this purpose. The main aim of this paper is to provide such methods. Nyquist plot of a system with multiplicative uncertainties is a family of curves rather than a single curve and crosses the real axis in segments of the real axis instead of at single points. Actually, the frequency response of a system with unstructured uncertainty at a given frequency is a disk

A new method is proposed to determine all stabilizing P and PI controllers for a given system with multiplicative uncertainty. The method is applicable to systems with unstable or nonminimum phase transfer functions and/or weight functions. Proposed method involves calculation of roots of two real polynomials and does not require any search or gridding over a parameter (for P control), and as a result offers computational advantages over existing methods in literature. Although it is assumed that the nominal system does not have any poles on the imaginary axis in derivations of formulations, it is actually possible to extend the results to cover such cases rather easily. In this study, two new geometric methods are also proposed to find the set of PI controllers that robustly stabilize a given system with unstructured uncertainty. The first method gives exact set of robustly stabilizing PI controllers; but it is slow. An alternative method suggests approximation set of robustly stabilizing PI controllers; but it is faster than the first one.

Keywords: P and PI control, robust control, Nyquist theorem, parameter space approach.

Giriş

Kontrol sistemlerinin tasarlanmasında genellikle sistemin kapalı çevrimde kararlı yapılması ve sistem cevaplarının istenilen bazı performans kriterlerini sağlaması amaçlanır. Tasarımda sistem modellenmesinden ortaya çıkabilecek ölçüm hataları, yüksek dereceli sistemlerin düşük dereceli modeller ile gösterilimi ve sistem dışı bozucuların varlığı sistemlerde yapısal olan ve yapısal olmayan belirsizliklerin oluşmasına ve böylece istenen performans kriterlerinin sağlanamamasına ve özellikle kararsızlığa neden oldukları için, bunlara karşı sistemleri dayanıklı kararlı kılacak kontrolörlerin tasarlanması günümüzde oldukça önem kazanmaktadır.

Zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak P, PI ve PID kontrolörler gibi düşük dereceli kontrolörlerin tasarımı için literatürdeki yöntemlerden üç tanesi çok kullanılır. Bunlardan ilki, verilen reel katsayılı bir polinomun kararlı olması için belirli bir iç içelik özelliğinin sağlanmasının gerek ve yeter olduğunu ifade eden Hermite-Biehler teoreminin bir genelleştirilmesidir. (Ho vd., 1997; Ho vd., 1999; Datta vd., 2000). Bu genelleştirme, sistem derecesine bağlı olarak üstel olarak artan sayıda işaret fonksiyonunun analizini gerektirdiğinden; hızlı sonuç veren bir yöntem değildir. Bu nedenle ikinci bir yöntem olarak Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerlerin ve yönlerinin bulunmasıyla Nyquist teoreminin (Nyquist, 1932) bir genelleştirilmesine dayanan hızlı bir yöntem Munro ve diğerleri (1999), Munro ve diğerleri (2000) ile Söylemez ve diğerleri (2003) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem, Chebyshev polinomları ve bilinear dönüşüm kullanılarak ayrık zamanlı sistemlere Bayhan ve Söylemez (2006b) tarafından uyarlanmıştır. Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesine dayanan bu yöntemden hareketle dayanıklılığın bir ölçütü olan istenilen kazanç payı ve faz payı için kapalı çevrimde sistemin kararlılığını sağlayacak oransal kontrolörlerin hesabı ile maksimum kazanç ve faz paylarının hesabı, Bayhan ve Söylemez (2006a), Bayhan ve Söylemez (2007a) ile Bayhan ve Söylemez (2007b) tarafından yapılmıştır ve elde edilen sonuçlar ayrık zamanlı sistemlere de uyarlanmıştır (Bayhan ve Söylemez, 2006c).

Üçüncü yöntem ise tekil frekanslarda PID parametre uzayının ayrıştırılmasına dayanan ve özdeğerlerin hareketiyle tanımlanan geçişler üzerine kurulu ancak arama gerektiren bir yöntemdir. (Ackermann vd., 2002a; Bajcinca, 2001; Bajcinca, 2006; Kiani ve Bozorg, 2006). Diğer taraftan kararlılık sınır eğrisinin PI düzleminde çizilmesine dayanan grafiksel bir yöntem ise, Tan ve diğerleri (2006) tarafından tanıtılmıştır.

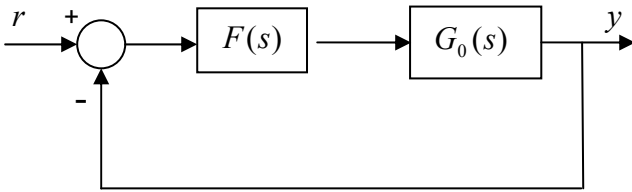
Parametrik belirsizliklere sahip bir sistem modelindeki bu belirsizlikleri göstermek pratikte her zaman mümkün olmayabilir. Böyle belirsizliklere sahip sistemleri dayanıklı kararlı yapacak kontrolörler H_∞ kontrol teorisi yardımıyla bulunabilir; ancak bu şekilde bulunan kontrolörlerin mertebesi, en az kontrol edilmek istenen sistemin mertebesi kadar olur veya son derece kırılğan kontrolörler bulunabilir (Ho vd., 2001). H_∞ kontrolörlerin mertebesini kısıtlandırmak için bazı çalışmalar yapılmıştır (Iwasaki ve Skelton, 1995). Ancak bu çalışmaların çoğunun cebrik açıdan takip edilmesi, zordur (Ho, 2001). Bu nedenle dayanıklı kararlılığı sağlayan oransal kontrolörlerin kümesini doğrudan bulmak için Söylemez ve Bayhan (2008) tarafından yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemden elde edilen sonuçlardan yararlanılarak PI kontrolör parametrelerinin kutupsal koordinatlarda yazılmasıyla bulunan yeni sistem için birim daire taratılarak dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin tam bölgesi bu çalışmada, hesaplanmıştır.

Parametre uzayı yaklaşımı (Ackermann vd., 2002), yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesinin bulunmasında kullanılabilir. Yapısal olmayan belirsizlikler kontrol sistemlerinde genelde çarpım veya toplam biçiminde gösterildiğinden böyle sistemlerin Nyquist eğrisi, tek bir eğri olmayıp reel eksenini bölgeler biçiminde kesen eğri ailesi biçimindedir. Bu eğri ailesi, belirsizlik disklerinden oluşan bir bantın içinden geçer (Skogestad ve Postlethwaite, 2005). Bu çalışmada, parametre uzayı yaklaşımından yararlanılarak yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz sistemleri dayanıklı kararlı kılacak tüm PI kontrolörlerin hesabı için iki yeni

yöntem önerilmiştir. Birinci yöntem, belirsizlik disklerinin orijini içermesi ve içermemesine göre iki aşama içeren bir yöntemdir. Belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu bölge, dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesidir. Birinci yönteme alternatif olarak hesabı kolaylaştırmak ve işlem hızını arttırmak için geometrik tabanlı cebrik bir yöntem de bu çalışmada önerilmiştir. Hızlı sonuç veren fakat tutuculuğa neden olan bu yöntemin dışında parametre uzayında dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörlerinin tam bir kümesini bulmak için Söylemez ve Bayhan (2008) tarafından verilen sonuçları kullanan ikinci bir yöntem de bu çalışmada önerilmiştir. Yaklaşık olmayan kesin sonuç veren bu ikinci yöntemin birinci yönteme göre işlem yoğunluğu genelde fazladır.

Kararlılığı sağlayan kazanç kümesinin bulunması

Zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı kılabilen oransal kontrolörler kümesini bulmak için, Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi üzerine kurulu olan Munro ve diğerleri (1999) tarafından geliştirilmiş analitik bir hesap yönteminden yararlanabiliriz. Şekil 1’de tek girişli-tek çıkışlı bir kontrol sistemi görülmektedir.



Şekil 1. Kapalı çevrim kontrol sistemi

$F(s) = K_p$, oransal kontrolördür. Şekil 1’deki kontrol edilmek istenen sistemin transfer fonksiyonu

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (1)$$

biçimindedir ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$) ve $m \leq n$ olduğu varsayılır. (1)’i s ’nin çift ve tek kuvvetlerini içerecek biçimde ayırıştırıp; $s = jw$ yazarsak,

$$G_0(jw) = \frac{D_e N_e + D_o N_o w^2}{D_e^2 + D_o^2 w^2} + jw \left[\frac{D_e N_o - D_o N_e}{D_e^2 + D_o^2 w^2} \right] \quad (2)$$

$$G_0(jw) = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} + jw \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (3)$$

olarak bulunur. Burada

$$X(w^2) \triangleq D_e N_e + D_o N_o w^2 \quad (4)$$

$$Y(w^2) \triangleq D_e N_o - D_o N_e \quad (5)$$

$$Z(w^2) \triangleq D_e^2 + D_o^2 w^2 \quad (6)$$

biçimindedir. D_e , D_o , N_e ve N_o gösterimleri $D_e(-w^2)$, $D_o(-w^2)$, $N_e(-w^2)$ ve $N_o(-w^2)$ yerine kullanılmış olup; $D(s)$ ve $N(s)$ polinomlarının çift ve tek kısımlarından oluşmaktadır.

(3)’den $G_0(jw)$ ’nin sanal kısmı,

$$\text{Im}\{G_0(jw)\} = w \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (7)$$

olarak yazılır. $v \triangleq w^2$ olarak tanımlayalım. $Y(v)$ ’nin pozitif reel köklerinin $v_1^*, v_2^*, \dots, v_\gamma^*$ olduğu kabul edilirse; $G_0(jw)$ ’nin Nyquist yer eğrisi, $i = 1, 2, \dots, \gamma$ için $w = 0$, $w = \infty$ veya $w = \pm\sqrt{v_i^*}$ ’da reel eksenden geçer. $v_{\gamma+1}^* = 0$ ve $v_{\gamma+2}^* = \infty$ olduğu gösterildiğinde; $i = 1, 2, \dots, \gamma + 2$ için reel eksenden geçiş noktaları, $x_i = X(v_i^*)/Z(v_i^*)$ olarak bulunur. $j = 1, 2, \dots, p_i$ için $x_i < x_{i+1}$ ve $x_i = X(v_{i,j}^*)/Z(v_{i,j}^*)$ sağlanacak biçimde (x_i, v_i^*) çiftlerini ($i = 1, 2, \dots, \gamma + 2$ için), $(x_i, v_{i,j}^*)$ olarak yeniden tanımlarsak; Munro ve diğerleri (1999) tarafından Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi olarak verilen aşağıdaki teoremi ifade etmek mümkün olur.

Teorem 1

Uygun (proper) rasyonel transfer fonksiyonu (1) ile verilen doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi düşünelim. $D(s)$ ’nin sanal eksende hiç bir

köke sahip olmadığını kabul edelim. $X(w^2)$, $Y(w^2)$ ve $Z(w^2)$ (4), (5) ve (6) bağıntılarında tanımlandığı gibi polinomlar olsun. Ayrıca $i=1,2,\dots,q$ için $(x_i, v_{i,j}^*)$ çiftleri de, yukarıda tanımlandığı gibi olsun. Üstelik $Y(v)$ 'nin baş katsayısı y_1 ile gösterilirken; $Y(v)$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı y_0 ile gösterilsin. O zaman verilen bir $k \in \dots, i \hat{=} (-1/x_{i-1}, -1/x_i)$ kazanç için, kapalı çevrim sistemin kararsız kutuplarının sayısı

$$u_i = u_0 + \sum_{t=1}^{i-1} r_t \quad (8)$$

ile verilir. u_0 , $G_0(s)$ 'nin kararsız kutuplarının sayısıdır. Reel eksen den geçişlerin sayısı

$$r_i = \sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j} \quad (9)$$

olup; geçiş yönü

$$d_{i,j} = \begin{cases} (1-(-1)^j) \text{Sgn}(Y^{(l)}(v_{i,j}^*)), & 0 < v_{i,j}^* < \infty & \text{ise} \\ \text{Sgn}(y_0), & v_{i,j}^* = 0 & \text{ise} \\ -\text{Sgn}(y_1), & v_{i,j}^* = \infty & \text{ise} \end{cases} \quad (10)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $Y^{(l)}(v)$, $Y(v)$ 'nin $v_{i,j}^*$ noktasındaki sıfır olmayan birinci türevidir. (10)'daki "Sgn" sembolü, işaret fonksiyonunu göstermektedir. (8)'den $u_i = 0$ olan kazanç aralıkları, kararlı kılan kazançları verir.

Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemler için dayanıklı kararlılığı sağlayan kazançların bulunması

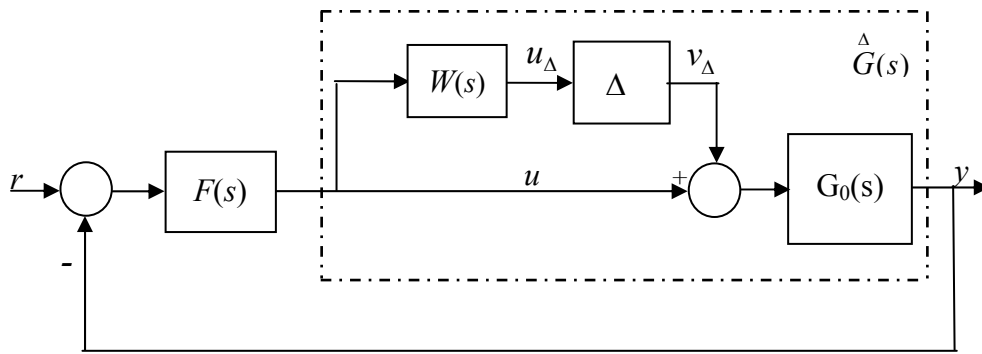
Sürekli zamanlı doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerdeki yapısal olmayan belirsizlikleri göstermek için Şekil 2'deki gibi bir kapalı çevrim sistem ele alınıp dayanıklı kararlı kılınacak tüm kazançları bulmak amacıyla Teorem 1, kullanılabilir. Şekil 2'de görülen $G_0(s)$, (1)'de verilen sistemi gösterirken; Δ ise birden küçük ($\|\Delta\|_\infty \leq 1$) H_∞ normuna sahip tüm sistemleri gösteren yapısal olmayan belirsizlikleri içeren bloktur. Ayrıca $W(s)$, ağırlık transfer fonksiyonudur. $F(s)=K_p$ 'dir.

Şekil 2'de kontrol edilen sistem

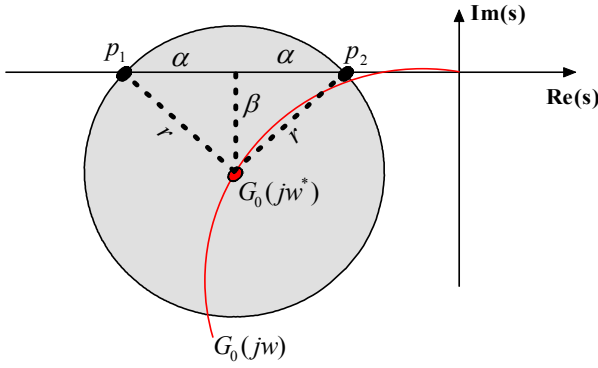
$$\overset{\Delta}{G}(s) \hat{=} G_0(s) (1 + W(s)\Delta) \quad (11)$$

ile gösterilebilir. Problem, $\|W(s)T(s)\|_\infty < 1$ koşulunu gerçekleyen ağırlıklı kapalı çevrim transfer fonksiyonundaki H_∞ kısıtlamasını sağlayan kazançları bulmak olarak da formüle edilebilir.

$\overset{\Delta}{G}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi, bir eğri ailesi tanımladığı için; reel eksen bölge biçiminde keser. $\overset{\Delta}{G}(jw)$ 'nin verilen bir w^* için frekans cevabı, $G_0(jw^*)$ merkezli ve $r = |G_0(jw)W(jw)|$ yarı çaplı Şekil 3'deki gibi bir disk (Skogestad ve Postlethwaite, 2005).



Şekil 2. Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistem



Şekil 3. Verilen w^* frekansı için $G_0(jw)$ 'nin frekans cevabı

$w = w^*$ frekansı için $p_1 \leq \text{Re}(s) \leq p_2$ olmak üzere; Şekil 3'den $\hat{G}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim yerleri, (3)'den yararlanarak

$$p_{1,2}(w^2) = \text{Re}(G_0(jw)) \mp \alpha(w^2) \\ = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} \mp \sqrt{\frac{r^2(w) - \beta^2(w)}{\triangleq b(w)}} \quad (12)$$

$$p_{1,2}(w^2) = a(w^2) \mp \sqrt{b(w^2)} \quad (13)$$

olarak bulunur. Şekil 3 ve (7)'den

$$\beta(w) \triangleq \text{Im}\{G_0(jw)\} = w \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (14)$$

$$r^2(w) = |G_0(jw)|^2 |W(jw)|^2 \quad (15)$$

elde edilir. $W(jw)$, (3)'e benzer biçimde

$$W(jw) = \frac{X_W(w^2)}{Z_W(w^2)} + jw \frac{Y_W(w^2)}{Z_W(w^2)} \quad (16)$$

olarak yazılabilir. (3) ve (16), (15)'de yazılırsa

$$r^2(w) = \frac{(X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2)) (X_W^2(w^2) + w^2 Y_W^2(w^2))}{Z^2(w^2) Z_W^2(w^2)} \quad (17)$$

elde edilir. Burada tanımlanan

$$b(w^2) \triangleq \frac{N_b(w^2)}{D_b(w^2)} \quad (18)$$

bağıntısının ve (12)'nin (13)'de yazılmasıyla

$$p_{1,2}(w^2) = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} \mp \sqrt{\frac{N_b(w^2)}{D_b(w^2)}} \quad (19)$$

bulunur. (19)'un w 'ya göre türevi alınarak sıfıra eşitlenir ve düzenlenirse,

$$R(w^2) \triangleq Z^4 (N_b D_b' - D_b N_b')^2 - \\ 4N_b D_b^3 (X Z' - Z X') = 0 \quad (20)$$

bulunur. Bu son bağıntıda yer alan polinomların hepsi w^2 'nin fonksiyonlarıdır ve ayrıca D_b' , N_b' , Z' ve X' sırasıyla D_b , N_b , Z ve X polinomlarının w 'a göre birinci türevlerini göstermektedir. (20)'de sırasıyla

$$N_b(w^2) \triangleq (X^2 + w^2 Y^2)(X_W^2 + w^2 Y_W^2) - w^2 Y^2 Z_W^2 \quad (21)$$

$$D_b(w^2) \triangleq Z^2(w^2) Z_W^2(w^2) \quad (22)$$

biçimindedir. $R(w^2)$ 'nin negatif olmayan reel kökleri, $w_k \leq w_{k+1}$ 'i sağlayarak $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3, w_4, \dots, w_{2t-1}, w_{2t}$ biçiminde sıralanmıştır. Her bir w_{2k-1} ve w_{2k} kök çiftine ilişkin reel eksenini kesim yerleri, $k = 1, 2, \dots, t$ olmak üzere

$$p_{k \min} \triangleq \min(p_1(w_{2k-1}), p_1(w_{2k})) \quad (23)$$

$$p_{k \max} \triangleq \max(p_2(w_{2k-1}), p_2(w_{2k})) \quad (24)$$

olarak tanımlanmıştır (Söylemez ve Bayhan, 2008). $G_0(s)W(s)$ tersi de nedensel ise;

$$p_{(t+1) \min} \triangleq a_n (1 - W_\infty), \quad p_{(t+1) \max} \triangleq a_n (1 + W_\infty) \quad (25)$$

olarak tanımlayabiliriz. Burada

$$a_n = \lim_{s \rightarrow \infty} G_0(s), \quad W_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) \quad (26)$$

biçimindedir. Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim yerlerinin oluşturduğu

$$x_k \triangleq (p_{k \min} \ p_{k \max}) \quad (27) \quad F(s) = K_p + (K_i / s) \quad (31)$$

aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları

$$\tilde{K}_{pk} \triangleq \begin{cases} \left[\frac{-1}{p_{k \min}} \ \frac{-1}{p_{k \max}} \right] & \text{Sgn}(p_{k \min}) = \text{Sgn}(p_{k \max}) \text{ ise} \\ \left[-\infty \ \frac{-1}{p_{k \max}} \right] \cup \left[\frac{-1}{p_{k \min}} \ \infty \right] & \text{Aksi durumda} \end{cases} \quad (28)$$

olup bunların birleşimi, aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\overset{\Delta}{K}_p = \bigcup_{k \in [1, 2, \dots, l]} \tilde{K}_{pk} \quad (29)$$

Lemma 1

(11)'de verilen yapısal olmayan belirsizlikler içeren $\overset{\Delta}{G}(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi, reel eksenini (27)'de verilen x_k aralıklarında keser. Şekil 3'de verilen kapalı çevrim sistemin sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısının model belirsizliğiyle değişmesinin gerek ve yeter koşulu, $K_p \in \overset{\Delta}{K}_p$ olmasıdır.

Lemma 1'den hareketle, şu teorem verilebilir:

Teorem 2

Şekil 3'de görülen $G_0(s)$ sistemini kararlı kılan kazanç aralıkları \tilde{K}_{p0} , Teorem 1'den bulunabilir.

(11)'de verilen $\overset{\Delta}{G}(s)$ sistemini dayanıklı kararlı kılacak kazanç kümesi,

$$\tilde{K}_p \triangleq \tilde{K}_{p0} \setminus \overset{\Delta}{K}_p \quad (30)$$

ile bulunur (Söylemez ve Bayhan, 2008).

Parametre uzayı yaklaşımıyla kararlı yapan PI kontrolörlerin belirlenmesi

Şekil 1'de verilen sistemde $F(s)$ kontrolörünün PI tipi olması durumunda; $G_0(s)$ sistemini kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolör bölgeleri hesaplamak amacıyla parametre uzayı yaklaşımı (Ackermann vd., 2002) kullanılabilir. PI kontrolör yapısı

biçimindedir. K_p ve K_i , sırasıyla kontrolörün oransal ve integral kazanç parametreleridir. $K_p - K_i$ parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısı δ 'nın aynı kaldığı P-bölgelerinin sınırlarına, kararlılık sınırları denilir ve aşağıdaki teorem ile belirlenebilir.

Teorem 3

Şekil 1'deki (1) ile verilen $G_0(s)$ sistemi PI kontrolör ile kontrol edilmek istenildiğinde; bulunan kararlılık sınırları aşağıdaki gibi belirlenir:

- a.) $w = 0$ için, $a_0 \neq 0$ ($N(0) \neq 0$) ise; $K_i = 0$ doğrusu bir kararlılık sınırı olan reel kök sınırındır.
- b.) $w \rightarrow \infty$ için, $G_0(s)$ sistemi tersi de nedenselse

$$K_p = -1/a_m \quad (32)$$

doğrusu, sonsuz kök sınırı denilen bir kararlılık sınırındır.

- c.) $0 < w < \infty$ için, kararlılık sınırı

$$K_p = \frac{-X(w^2)}{N_e^2 + w^2 N_o^2}, \quad K_i = \frac{-w^2 Y(w^2)}{N_e^2 + w^2 N_o^2} \quad (33)$$

denklemlerinden bulunan parametre uzayındaki $K_p - K_i$ eğrisi ile tanımlanmış kompleks kök sınırındır. $w = w_s$ tekil frekansı için bir inceleme yapmaya gerek yoktur (Ackermann vd., 2002).

Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemlerde dayanıklı PI kontrol

Bu bölümde, yapısal olmayan belirsizlik içeren Şekil 2'deki kapalı çevrim sistem ele alınarak dayanıklı kararlı kılabilen tüm PI kontrolörleri bulmak için iki yeni yöntem önerilmiştir.

Belirsizlik bölgesinin bulunması (yöntem 1)

Bu yöntem, (11)'deki $\overset{\Delta}{G}(s)$ sistemine, Teorem 3 ile verilen parametre uzayı yaklaşımının uyarlanmasına dayanır. $\overset{\Delta}{G}(j\omega)$ 'nin verilen bir w^*

için frekans cevabı, $\varepsilon_G(w) = |G_0(jw)W(jw)|$ ya-
rı çaplı Şekil 3'deki gibi bir disk tanımlar. Teo-
rem 3'den yararlanarak $0 < w < \infty$ için, para-
metre uzayında $K_p - K_i$ eğrisi çizdirilip kararlı-
lık sınırlarını elde etmek amacıyla Şekil 3'teki
sistemin kapalı çevrim karakteristik
polinomunda $s = jw$ yazılırsa

$$1 + F(jw)(G_0(jw)(1 + W(jw)\Delta)) = 0 \quad (34)$$

bulunur. (34)'de (31)'in yazılmasıyla bulunan

$$jw + (jwK_p + K_i)(G_0(jw)(1 + W(jw)\Delta)) = 0 \quad (35)$$

denkleminde yapısal olmayan belirsizlik içeren
bir sistemin $w = 0$ için kararlılık sınırının sis-
temin orijinde sıfırının olmaması koşuluyla
 $K_i = 0$ doğrusu olduğu görülür.

$w \rightarrow \infty$ için Δ 'nın -1 ile +1 arasındaki tüm reel
sayıları ifade etmesi de hesaba katılarak; (35),
 $K_p - K_i$ düzleminde (tersi de nedensel sistemse)

$$K_p = -\frac{1}{G_0(\infty)(1 \mp W(\infty))} \quad (36)$$

arasında bir bant tanımlar. $G_0(jw)$ 'yi reel ve
sanal kısımlarına ayırıp; $\theta: (0-2\pi)$ arasında
değiştirerek $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskin-
deki noktaları,

$$\overset{\Delta}{G}(jw) = (G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw)) + \varepsilon_G(w)e^{j\theta} \quad (37)$$

olarak parametrelendirebiliriz. $F(jw)$ üzerindeki
belirsizliği bulmak için; $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik
belirsizlik diskindeki noktalar, $G_0(jw)$ 'ye iliş-
kin belirsizlik diskindeki noktaların iz düşürül-
mesiyle (37)'den yararlanarak

$$\overset{\Delta}{F}(jw) = -\frac{1}{(G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw)) + \varepsilon_G(w)e^{j\theta}} \quad (38)$$

biçiminde parametrelendirilebilir. $F(jw)$ 'yi reel
ve sanal kısımlarına ayırarak bulunan

$$F(jw) = F_R(jw) + jF_I(jw) \quad (39)$$

bağıntısı ile (38)'in eşleştirilip $\theta: (0-2\pi)$ için
taranmasıyla; $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik
diski elde edilir. (K_p, K_i) 'de ortaya çıkan belir-
sizliği bulmak için (31)'de verilen PI kontrolör-
rün transfer fonksiyonunda $s = jw$ yazıp, (39)
ile eşitlersek

$$K_p = F_R(jw), \quad K_i = -wF_I(jw) \quad (40)$$

elde edilir. O halde $F(jw)$ 'deki belirsizlik dis-
kinden, (K_p, K_i) 'dekine geçişte elde edilen yeni
diskin K_p -eksenine iz düşümü aynı kalırken;
 K_i -eksenine iz düşümü $w = -w_{fix}$ frekansı ka-
dar ölçeklenir.

(37)'de $\theta: (0-2\pi)$ arası değerler için oluşturu-
lan belirsizlik disklerinden $0 < w < \infty$ 'a tüm
frekanslar için, $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi etra-
fına yapısal olmayan belirsizlik içeren bir bant
koyulabilir. (40)'dan hareketle $0 < w < \infty$ için,
 $K_p - K_i$ düzleminde kararlılık sınırındaki belir-
siz bölge oluşturulabilir. Bu bölgeye ilaveten
 $K_p - K_i$ düzleminde P -bölgeleri belirlenirken
 $K_i = 0$ doğrusu ile tersi de nedensel sistemler
için (36)'dan gelen bant da dikkate alınmalıdır.
 $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik
disklerinin $K_p - K_i$ düzlemindeki iz düşümleri
olan eliptik belirsizlik disklerinin iç kısımları ile
orijini içeren belirsizlik disklerinin $K_p - K_i$
düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsiz-
lik disklerinin dış kısımları alınarak belirsizlik
bölgesi oluşturulur. Belirsizlik bölgesinin dışın-
da kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu
 $K_p - K_i$ düzlemindeki bölge, sistemi kapalı
çevrimde dayanıklı kararlı kılacak PI kontrolör-
lerin bölgesidir.

**Birim dairenin taranması yöntemiyle
dayanıklı PI kontrolörlerin hesabı (yöntem 2)**
Dayanıklı kararlı kılan tüm PI kontrolörleri
bulmak için bu bölümde önerilen yöntem, Teo-
rem 1 ve Lemma 1'in kullanılmasına dayanır.

Bu yöntem, dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörlerin yaklaşık olmayan gerçek bölgesini verir; fakat yavaş bir yöntemdir. Teorem 1'den yararlanabilmek için PI kontrolör parametrelerini kutupsal koordinatlarda

$$K_p = K \cos\theta, \quad K_i = K \sin\theta \quad (41)$$

biçiminde yazabiliriz. (41)'in (31)'de yazılması ile bulunan

$$F(s) = K \left(\cos\theta + \frac{\sin\theta}{s} \right), \quad \theta:(0-\pi) \quad (42)$$

bağıntısından

$$F(s)G(s) = K \underbrace{\left(\cos\theta + \frac{\sin\theta}{s} \right)}_{\hat{=}G_p(s)} G(s) = K G_p(s) \quad (43)$$

elde edilir. Burada θ , sabitlenip bulunan $G_p(s)$ sistemi için önce Teorem 1 kullanılarak kararlı kılan kazançlar bulunur ve sonra verilen ağırlık fonksiyonu için Lemma 1 ve Teorem 2 kullanılarak belirsizlik kazanç aralıkları bulunur.

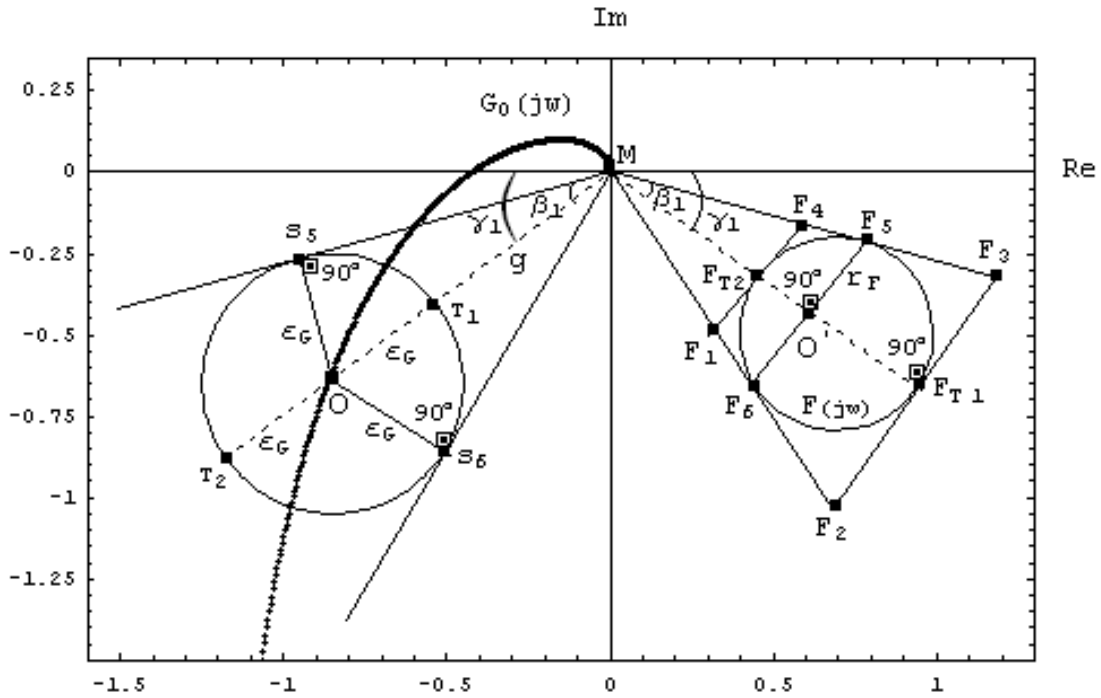
$\theta:(0-\pi)$ arasında değiştirilerek, dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesi ve belirsizlik bölgeleri belirlenir.

Verilen yöntem 1'e alternatif olarak hesabı kolaylaştırıp hızı arttırmak için geometrik tabanlı bir yöntem de, aşağıda verilmiştir.

Belirsizlik bantının üstten çevrenmesi (dörtgen yöntemi)

Geometrik tabanlı bu yöntem, $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin orijini içerip ($|W(j\omega)| > 1$) içermemesine ($|W(j\omega)| < 1$) göre iki aşamalıdır.

İlk aşama olan $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içermediği durum için belirsizlik bantını hızlı bir şekilde elde edebilmek amacıyla $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin O merkezli $\epsilon_G(\omega)$ yarı çaplı belirsizlik diskinin Şekil 4'deki gibi mümkün olan en sıkı sektör ile çevrenerek diske teğet olan s_5 ve s_6 noktalarından $F(j\omega)$ düzlemindeki F_5 ve F_6 iz düşüm noktalarının elde edilmesi ve sonra $F(j\omega)$ düzlemindeki eliptik belirsizlik diskinin bu noktalardan yararlanılarak bulunan



Şekil 4. $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen bir belirsizlik diskini içine alan en küçük sektör ve $F(j\omega)$ düzlemine olan iz düşümü

$F_1F_2F_3F_4$ yamuğu ile sıkıca çevrenmesidir. $F(jw)$ düzleminden $K_p - K_i$ düzlemine geçmek için (40)'dan yararlanır. $0 < w < \infty$ için $K_p - K_i$ düzleminde bu şekilde oluşturulmuş yamuklardan belirsizlik bantı elde edilir. Parametre uzayı yaklaşımından hareketle $w = 0$ ile $0 < w < \infty$ için ve ilave olarak tersi de nedensel sistem ise $w \rightarrow \infty$ için bulunan kararlılık sınırlarından ve $K_p - K_i$ düzlemindeki yamuklardan oluşmuş belirsizlik bantından yararlanarak sistemin dayanıklı kararlı olduğu PI kontrolörleri bölgesi bulunur.

Yukarıdaki açıklamaları kullanarak Şekil 4'teki birbirine eşit olan $M s_5 O$ veya $M s_6 O$ dik üçgenlerinden

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{\varepsilon_G(w)}{|G_0(jw)|}\right) \quad (44)$$

$$\ell_5(w) \hat{=} \overline{Ms_5} = \ell_6(w) \hat{=} \overline{Ms_6} = \sqrt{|G_0(jw)|^2 - \varepsilon_G^2(w)} \quad (45)$$

bulunur. Şekil 4'den s_5 ve s_6 teğet noktaları

$$s_5(jw) = \ell_5(w) e^{j(180^\circ + \gamma_1 - \beta_1)} \quad (46)$$

$$s_6(jw) = \ell_5(w) e^{j(180^\circ + \gamma_1 + \beta_1)} \quad (47)$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\gamma_1 \hat{=} \angle G_0(jw) - 180^\circ \quad (48)$$

biçiminde tanımlıdır. s_5 ve s_6 noktalarının $F(jw)$ düzlemine iz düşürülmesiyle elde edilen F_5 ve F_6 noktalarının orijine olan uzaklıkları $|F_5(jw)| = |F_6(jw)|$ ifadesini sağlar. Şekil 4'deki $F_1F_2F_3F_4$ yamuğunun köşe noktaları için sırasıyla,

$$F_1(jw) = \frac{1}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w)) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 + \beta_1)} \quad (49)$$

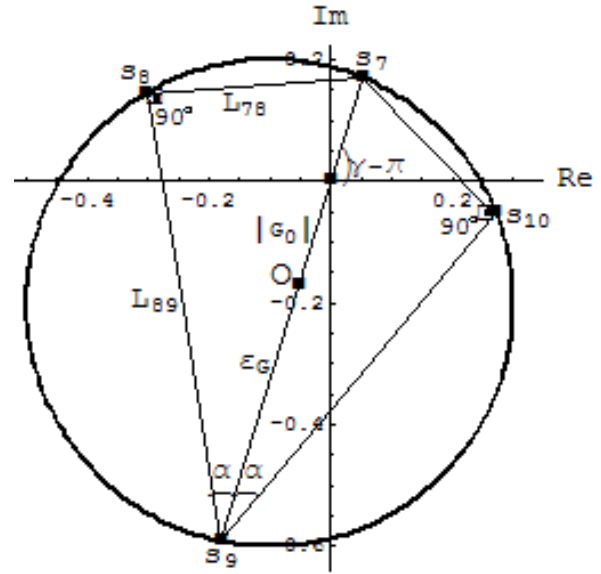
$$F_2(jw) = \frac{1}{g(w) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 + \beta_1)} \quad (50)$$

$$F_3(jw) = \frac{1}{g(w) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 - \beta_1)} \quad (51)$$

$$F_4(jw) = \frac{1}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w)) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 - \beta_1)} \quad (52)$$

yazılabilir. $\overline{F_5F_6}$ doğru parçasının her zaman $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskinin O' merkezinden geçtiği, Şekil 4'den görülebilir. $F_1F_2F_3F_4$ yamuğunu, $K_p - K_i$ düzlemine dönüştürmek için (40)'dan yararlanır.

Bu yöntemin ikinci aşaması olarak, $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içerdiği durumu incelemek amacıyla O merkezli $\varepsilon_G(w)$ yarı çaplı Şekil 5'teki gibi en genel durumdaki bir belirsizlik diskini ele alalım.



Şekil 5. $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içeren bir belirsizlik diski

Şekil 5'den,

$$\gamma \hat{=} \angle G_0(jw) = \angle s_9(jw) \quad (53)$$

$$\angle s_7(jw) = \gamma - 180^\circ \quad (54)$$

$$|s_7(jw)| = \varepsilon_G(w) - |G_0(jw)| \quad (55)$$

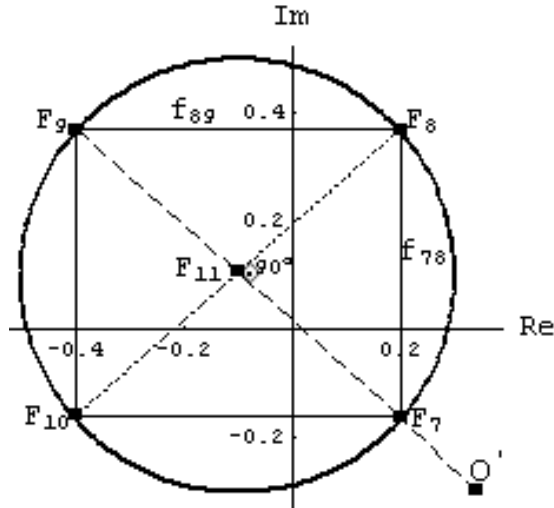
$$|s_9(jw)| = |G_0(jw)| + \varepsilon_G(w) \quad (56)$$

olarak hesaplanır. Böylece $s_7(jw)$ ve $s_9(jw)$ noktaları için sırasıyla

$$s_7(jw) = |s_7(jw)| e^{j(\gamma-180^\circ)} \quad (57)$$

$$s_9(jw) = |s_9(jw)| e^{j\gamma} \quad (58)$$

olarak yazılır. $s_7(jw)$, $s_8(jw)$, $s_9(jw)$ ve $s_{10}(jw)$ noktalarının $F(jw)$ düzlemine iz düşürülmesiyle elde edilen $F_7(jw)$, $F_8(jw)$, $F_9(jw)$ ve $F_{10}(jw)$ noktaları ve $F_7F_8F_9F_{10}$ dörtgeni, Şekil 6'da gösterilmiştir. $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin O merkezinin $F(jw)$ düzlemindeki iz düşümü olan O' , Şekil 6'da görüldüğü gibi diskin dışında olacaktır.



Şekil 6. $F(jw)$ 'ye ilişkin orijini içeren eliptik bir belirsizlik diski

$F_7F_8F_9F_{10}$ dörtgeni, $F(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin içine tutuculuğu en aza indirebilecek biçimde yerleştirilmelidir. Bu amaçla $s_8(jw)$ noktasının yeri öyle seçilmelidir ki bu noktanın iz düşümü olan $F_8(jw) = -1/s_8(jw)$ noktasının $F_9(jw)$ noktasına olan uzaklığı $f_{89}(w)$ ile bu $F_8(jw)$ noktasının $F_7(jw)$ noktasına olan uzaklığı $f_{78}(w)$ 'in eşit olması sağlanmalıdır. Böyle-

ce oluşturulan $F_7F_8F_9F_{10}$ dörtgeni, eş kenar dörtgen olacaktır. Bu amaçla Şekil 5'deki $s_7s_8s_9$ dik üçgeni kullanılarak yapılan işlemlerle

$$L_{89}(w) = \frac{2\varepsilon_G(w)|s_9(jw)|}{\sqrt{|s_7(jw)|^2 + |s_9(jw)|^2}} \quad (59)$$

$$L_{78}(w) = \frac{2\varepsilon_G(w)|s_7(jw)|}{\sqrt{|s_7(jw)|^2 + |s_9(jw)|^2}} \quad (60)$$

$$\tan \alpha = \frac{L_{78}(w)}{L_{89}(w)} = \frac{|s_7(jw)|}{|s_9(jw)|} \quad (61)$$

olarak hesaplanır. Hesap kolaylığı açısından Şekil 5'deki $s_9(jw)$ noktası, orijine ötelenirse; bilinmeyen $s_8(jw)$ ve $s_{10}(jw)$ noktalarının yeri

$$s_8(jw) = s_9(jw) - L_{89}(w) e^{j(\alpha+\gamma)} \quad (62)$$

$$s_{10}(jw) = s_9(jw) - L_{89}(w) e^{j(-\alpha+\gamma)} \quad (63)$$

olarak bulunur. Böylece bilinmeyen $F_8(jw)$ ve $F_{10}(jw)$ 'nin koordinatları da hesaplanmış olur ve Şekil 6'daki $F_7F_8F_9F_{10}$ eş kenar dörtgeni oluşturularak $K_p - K_i$ düzlemindeki başka bir dörtgene dönüştürülür. Dayanıklı kararlı kılan bölgeye ilişkin yaklaşık sonuç veren bu yöntemle parametre uzayında kararlılık sınırlarını da kaplayan belirsizlik bantlarını $0 < w < \infty$ aralığında bulmak için $G_0(jw)$ 'nin orijini içermeyen belirsizlik disklerine ilişkin olan $F_1F_2F_3F_4$ yamuklarının $K_p - K_i$ düzlemine iz düşümü olan yamukların iç kısımları alınır ve ilave olarak $G_0(jw)$ 'nin orijini içeren belirsizlik disklerine ilişkin olan $F_7F_8F_9F_{10}$ eş kenar dörtgenlerinin $K_p - K_i$ düzlemine iz düşümü olan dörtgenlerin dış kısımları alınır. Belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu bölge, sistemi kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin bölgesidir. Önerilen üç

yönteme ilişkin sayısal bir örnek aşağıda verilmiştir.

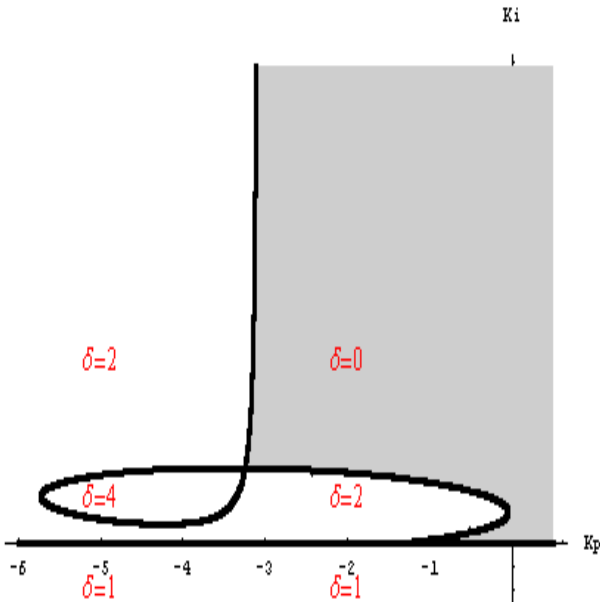
Örnek

Kesin nedensel olan

$$G_0(s) = \frac{6s^3 + 14.75s^2 + 55.5s + 72}{s^4 + 21s^3 + 58s^2 + 104s + 96} \quad (64)$$

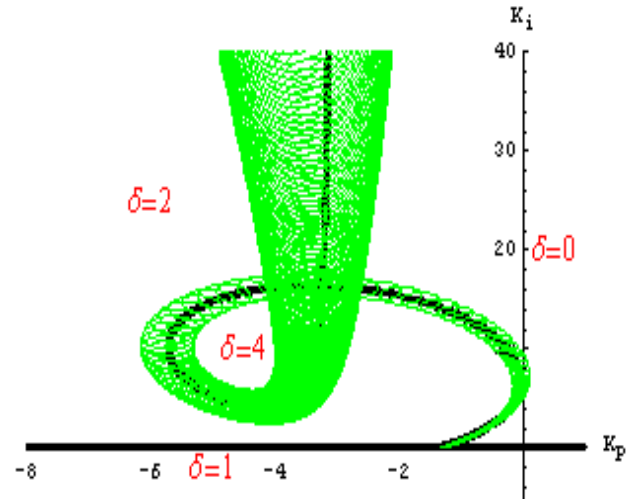
sistemi ile $W(s) = (2s+1)/(s+100)$ ağırlık transfer fonksiyonunun oluşturduğu Şekil 2'deki yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemi, dayanıklı kararlı kılacak PI kontrolörler bölgesini bulalım.

Teorem 3 ile verilen parametre uzayı yaklaşımıyla belirsizliğin olmadığı durumda $K_p - K_i$ parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı P -bölgeleri, Şekil 7'de gösterilmiştir. $G_0(s)$ sistemi, kesin nedensel olduğundan; $w \rightarrow \infty$ için bir kararlılık sınırı yoktur. $w = 0$ için, $K_i = 0$ doğrusu bir kararlılık sınırıdır. Ayrıca $0 < w < \infty$ için (33)'den oluşturulan kararlılık sınırı vardır. Şekil 7'deki gölgelendirilmiş olan bölge, $G_0(s)$ sistemini kararlı kılan PI kontrolörler bölgesidir.



Şekil 7. Belirsizliğin olmadığı durum için $K_p - K_i$ düzleminde P -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları ($w = 25$)

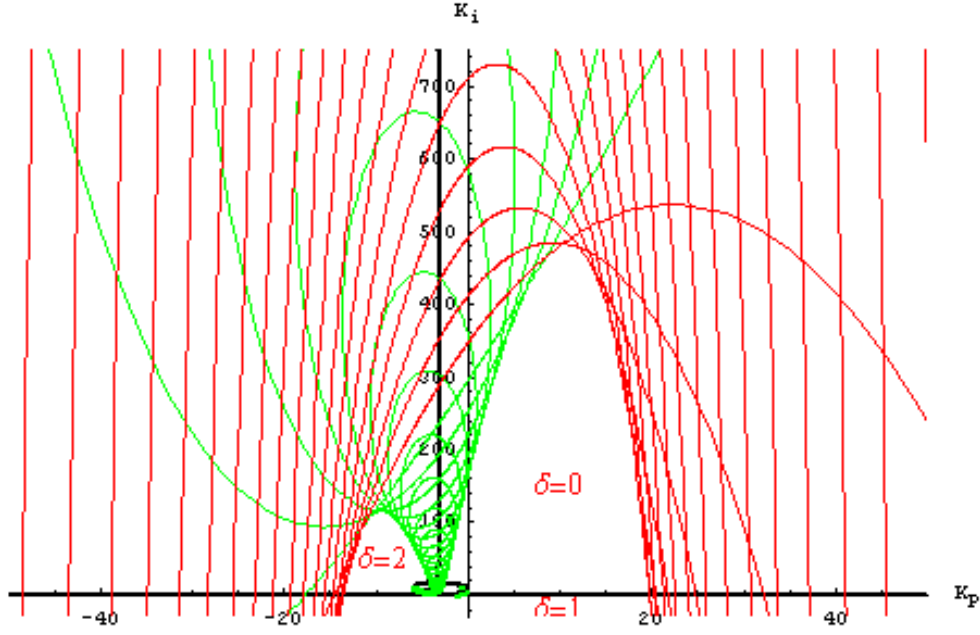
Orijini içermeyen $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin $K_p - K_i$ düzlemindeki dönüşükleri olan eliptik belirsizlik disklerinin oluşturduğu yöntem 1 ile bulunan belirsizlik bölgesinin bir kısmı, $K_i = 0$ doğrusu ve civarındaki P bölgelerindeki kararsız kutup sayısı, $K_p - K_i$ düzlemi için Şekil 8'de gösterilmiştir.



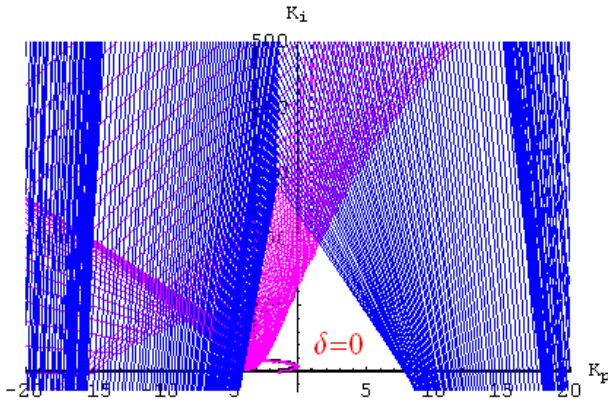
Şekil 8. Orijini içermeyen belirsizlik disklerinden oluşan ve 1. yöntemle bulunan $K_p - K_i$ düzlemindeki belirsizlik bantı

Orijini içermeyen $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinden oluşan Şekil 8'deki belirsizlik bölgesinin üzerine ilave olarak, $G_0(jw)$ 'nin orijini içeren belirsizlik disklerinin $K_p - K_i$ düzlemindeki iz düşümlerinin dışında kalan bölgelerden oluşan belirsizlik bölgesinin de eklenmiş biçimi, Şekil 9'daki gibi 1. yöntemle bulunur. Şekil 9'da $\delta = 0$ olan bölge, verilen ağırlık transfer fonksiyonu için sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörlerin bölgesidir.

Orijini içeren ve içermeyen $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin içerden ve dışarıdan çevrelenmesine dayanan dörtgen yönteminin kullanılmasıyla $K_p - K_i$ düzleminde oluşan belirsizlik bölgesi, Şekil 10'da gösterilmiştir. Şekil 10'daki $\delta = 0$ olan dayanıklı PI kontrolörlerinin bölgesinin, Şekil 9'daki gerçek bölgeye göre daha küçük olması, dörtgen yönteminin tutucu olduğunun bir göstergesidir.



Şekil 9. $K_p - K_i$ düzleminde 1. yöntemle bulunan P-bölgeleri ve belirsizlik bölgeleri

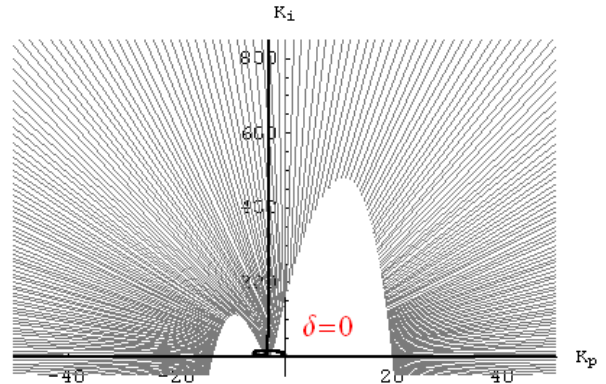


Şekil 10. $K_p - K_i$ düzleminde dörtgen yöntemiyle bulunan belirsizlik bölgeleri

Bu sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesini belirlemek için 2. yöntem ile bulunan belirsizlik bölgesi, gri renkle taratılarak Şekil 11'de gösterilmiştir. 2. yöntemle bulunan Şekil 11'deki dayanıklı kararlı kılan bölge, 1. yöntemle bulunan Şekil 9'daki bölgeyle aynı olan gerçek bölgedir.

Pentium 4 CPU, 2.8 GHz işlemcili ve 512 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda Mathematica 5 yazılımı kullanılarak yapılan simülasyonda belirsizlik bölgesinin hesaplanması 1. yöntemle 78.812 saniye sürerken; 2. yöntemle 62.735 saniye sürmüştür. Ayrıca dörtgen yöntemi kullanı-

arak bulunan Şekil 10'daki yaklaşık belirsizlik bölgesinin bulunması, 0.385 saniye sürmüştür. Dörtgen yönteminin işlem hızının 1. ve 2. yöntemle kıyasla çok daha yüksek olduğu görülmüştür.



Şekil 11. $K_p - K_i$ düzleminde 2. yöntemle bulunan P-bölgeleri ve belirsizlik bölgeleri

Sonuçlar

Yapısal olmayan belirsizliğe sahip sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılan P ve PI kontrolörleri bulmak için yeni yöntemler önerilmiştir. Özellikle PI kontrolörler bölgesini bulmak için önerilmiş 1. ve 2. yöntemin gerçek bölgeyi veren yavaş yöntemler olduğu; fakat dörtgen yönteminin ise yaklaşık ama hızlı bir yöntem olduğu sayısal örnek ile gösterilmiştir.

Kaynaklar

- Ackermann, J., Blue, P., Bünte, T., Güvenç, L., Kaesbauer, D., Kodt, M., Muhler, M. ve Odental, D., (2002). *Robust control the parameter space approach*, Springer-Verlag, 29-58, London Berlin Heidelberg.
- Bajcinca, N., (2001). The method of singular frequencies for robust design in an affine parameter space, *Proceedings, 9th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Dubrovnik.
- Bajcinca, N., (2006). Design of robust PID controllers using decoupling at singular frequencies, *Automatica*, **42**, 11, 1943-1949.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T., (2006a). İstenen kazanç payı ve faz payı kriterlerini sağlayan oransal kontrolörlerin hesaplanması, *Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi-Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, 6-8 Kasım, s. 38-43, Ankara.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T., (2006b). Fast calculation of all stabilizing gains for discrete time systems, *Istanbul University-Journal of Electrical and Electronics Engineering*, **6**, 1, 19-26.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T., (2006c). Ayrık zamanlı sistemlerde istenen kazanç payı ve faz payı kriterlerini sağlayan oransal kontrolörlerin hesaplanması için bir yöntem, *Elektrik-Elektronik Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu*, 6-10 Aralık, s. 259-263, Bursa.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T., (2007a). Calculation of maximum achievable phase margin for open-loop stable systems using proportional controllers, *Proceedings, 5th IFAC Intl. WS Decom-TT*, 99-104, May 17-20, İzmir.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T., (2007b). A new technique for calculation of maximum achievable gain and phase margins with proportional control, *Proceedings, 15th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Paper No. T19-019, June 27-29, Athens, Greece.
- Datta, A., Ho, M.T. ve Bhattacharyya, S.P., (2000). *Structure and synthesis of PID controllers*, Springer, London, UK.
- Ho, M.T., Datta, A. ve Bhattacharyya, S.P., (1997). Control system design using low order controllers: constant gain, PI and PID, *Proceedings of the American Control Conference*, 571-578.
- Ho, M.T., Datta, A. ve Bhattacharyya, S.P., (1999). Generalizations of the Hermite-Biehler theorem, *Linear Algebra and Its Applications*, **302**, 135-153.
- Ho, M.T., Silva, G.J., Datta, A. ve Bhattacharyya, S.P., (2001). Robust and non-fragile PID controller design, *International Journal Robust Nonlinear Control*, 4126-4138, Boston.
- Ho, M.T., (2001). Synthesis of H_∞ PID Controllers, *Proceedings, IEEE Conference on Decision and Control*, 255-260, Orlando, Florida, USA.
- Iwasaki, T. ve Skelton, R.E., (1995). All fixed order H_∞ controllers: Observer based structure and covariance bounds, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, 512-516.
- Kiani, F. ve Bozorg, M., (2006). Design of digital PID controllers using the parameter approach, *International Journal of Control*, **79**, 6, 624-629.
- Munro, N., Söylemez, M.T. ve Baki, H., (1999). Computation of D-stabilizing low-order compensators, *Control Systems Centre Report 882*, Umist, Manchester.
- Munro, N., Söylemez, M.T. ve Baki, H., (2000). Fast Calculation Of Stabilizing PID Controllers For Uncertain Parameter Systems, *Proceedings, IFAC, Rocond, Prague, Czech Republic*.
- Nyquist, H., (1932). Regeneration theory, *Bell System Technical Journal*, **11**, 126-147.
- Skogestad, S. ve Postlethwaite, L., (2005). *Multivariable Feedback Control*, John Wiley & Sons, West Sussex, England.
- Söylemez, M.T., Munro, N. ve Baki, H., (2003). Fast calculation of stabilizing PID controllers, *Automatica*, **39**, 1, 121-126.
- Söylemez, M.T. ve Bayhan, N., (2008). Calculation of all H_∞ robust stabilizing gains for SISO LTI systems, *Proceedings, 17th IFAC World Congress Of The International Federation Of Automatic Control*, July 6-11, Seoul, Korea.
- Tan, N., Kaya, İ., Yeroğlu, C. ve Atherton, D.P., (2006). Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus, Accepted: *Energy Conversion & Management*.