

Fonksiyonel derecelendirilmiş ve çok katmanlı kompozit malzemelerde dalga yayılması

Hüseyin Gökmen AKSOY*, Erol ŞENOCAK

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Askeri ekipmanlarda kullanılan kompozit malzemelerin darbe yükleri altındaki davranışı ve bu davranışın modellenmesi giderek önem kazanmaktadır. Kompozit plakların tasarımında iki temel yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlardan bir tanesi farklı malzeme özelliklerine sahip malzemelerden oluşan çok katmanlı plaklardır. Diğeri ise özellikleri fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerdir(FDM). FDM'lerde malzeme özelliklerinin sürekli olmasından dolayı malzeme içerisinde gerilme yığılması meydana gelmemektedir. FDM'nin bu özelliği onu bir çok uygulama için uygun kılmaktadır. Malzemelerin darbe yükleri altındaki davranışlarının incelenmesinde özellikle malzemenin dinamik plastik davranışının modellenmesi, temas yüklerinin tespiti ve darbe yükünün etkisi ile meydana gelen şok dalgasının ilerleyişinin doğru olarak modellenmesi silah sistemlerinin tasarımında büyük öneme sahiptir. Burada kullanılan sayısal yöntemin korunum özellikleri (momentum, açısal momentum ve enerji korunumu) önem kazanmaktadır. Süreksiz Galerkin yöntemi, korunum özellikleri ve eleman sınırlarında süreksizliğe izin vermesi nedeni ile dalga yayılması problemlerinde araştırmacılar tarafından tercih edilmektedir. Bu çalışmada çok katmanlı malzemelerin ve FDM'nin ani darbe yükleri altındaki davranışları süreksiz Galerkin yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu kapsamda ortasından ani darbe yüküne maruz bırakılmış, 4, 8 ve 16 katmandan oluşan eksenel simetrik plak problemlerinden elde edilen sonuçlar FDM plak problemlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Yapılan çalışma sonucu katman sayısı arttıkça plağın merkezindeki etkin gerilme değerlerinin FDM plakta hesaplanan etkin gerilme değerlerine yaklaştığı tespit edilmiştir. Diğer taraftan çok katmanlı plaklarda radyal yönde ilerledikçe etkin gerilme değerleri FDM plakta hesaplanan değerlerden farklılaştığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kompozit malzemeler, dalga yayılması, Süreksiz Galerkin Yöntemi.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Hüseyin Gökmen AKSOY. aksoyhus@itu.edu.tr; Tel: (212) 293 13 00.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Modelling of dynamical behavior of composite materials with discontinuous Galerkin Method" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 09.09.2008 tarihinde dergiye ulaşmış, 18.09.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Wave propagation in functionally graded and layered materials

Extended abstract

Composite materials have been used by the engineers. Thus by using proper combination of different materials one can produce a material with an improved thermal, acoustical, mechanical or electrical properties according to the needs in design. Composite materials can be classified in three groups, which are fibrous composites, laminated composites and particulate composites. Many different approaches have been used for approximating the mechanical behaviour of composite materials. The mechanical behaviour of composite materials under static loads are well documented. On the other hand less is known about mechanical behaviour of composites under dynamic loads.

Behaviour of composite materials, which are used in military equipments, under impact loads and modelling of this behaviour is gaining attention. In design and modelling of composite materials two main approaches have been used. One of these is to model the composite material as layered material. In modelling the layered media most of the attention is paid to the defining the effective material properties. Many theoretical and experimental studies have been done on this topic. The use of layered media in designing composite plates has some disadvantages. Sudden change in material properties causes stress concentration in the material which may cause failure. The later is functionally graded materials (FGMs). The material properties are continuous in FGMs. Therefore no stress concentration occurs. This property of FGMs makes it advantageous for many applications. Modelling of both FGMs and layered media are challenging task. Modelling of graded material increases the computational cost whilst modelling the layered media degrades the accuracy due to the sudden change of material properties. Thus degradation of numerical accuracy affects the conservation of energy, momentum and angular momentum. Conservation properties of numerical methods are important for many structural dynamics problems. Therefore in the recent years more attention paid to the research on the conservative numerical methods for time integration and discretization in space.

In the field of computational mechanics researchers are focused on the conservation properties and stability of the time integration algorithms. Newmark time integration method is one of the most widely used time integration method in structural dynamics. On behalf of this, Newmark family of algorithms are not energy and angular momentum conserving. Energy preserving algorithms are developed by the researchers. Thus energy preserving schemes are lack of high frequency dissipation, which is necessary for damping high frequency oscillations in the numerical solution. Space-time finite element method is attractive for researchers due to the stability properties. On the other hand time finite element methods are not energy conserving. One approach in discretizing the balance equations is discontinuous Galerkin method. Time Discontinuous Galerkin method (TDG) has begun to be used in elastodynamics. It has small phase error and has small dissipation error at high frequency regime which damps the high frequency oscillations in the numerical solution makes it attractive for wide range of structural problems. The DGM is widely used in the spatial discretization of first-order partial differential equations (PDEs) in fluid mechanics, because of its local and global conservation properties. Since it allows discontinuities at the element interfaces, it is advantageous to use DGM for shock wave propagation problems. More recently DGM for the discretization of second order PDEs has been developed. Another advantage of the DGM is continuously changing material properties can be defined in an element for FGMs and sudden change of the material properties are allowed at the element interfaces for layered materials. In this study mechanical behaviour of layered materials and FGMs is compared under impact loads. Discontinuous Galerkin method will be used for this purpose. Within these context numerical results obtained from the solution of 4, 8 and 16 layered axi-symmetric composite plate is compared with FGM plate. It is observed that as the number of layers increases the effective stress results obtained from layered plate is getting closer to the FGM plate at the centre of the plate. On the other hand it is seen that as the stress wave propagates in the radial direction effective stress values obtained from the layered plate differs from the results obtained from the FGM plate.

Keywords: Composite materials, wave propagation, Discontinuous Galerkin Method.

Giriş

Malzemelerin darbe yükleri altındaki davranışlarının incelenmesinde özellikle malzemenin dinamik davranışının modellenmesi, temas yüklerinin tespiti ve darbe yükünün etkisi ile meydana gelen şok dalgasının ilerleyişinin doğru olarak modellenmesi silah sistemlerinin tasarımında büyük öneme sahiptir. Savunma sanayiinde kullanılan malzemelerin birden fazla özelliği barındırma gereksinimi kompozit malzemelerin kullanımını kaçınılmaz kılmıştır.

Çok katmanlı kompozit plakların modellenmesinde araştırmacıların büyük bir kısmı malzemenin etkin malzeme özelliklerinin belirlenmesi üzerinde yoğunlaşmışlardır (Chen vd., 2004). Ancak çok katmanlı plaklarda malzeme özelliklerinin ani değişimine bağlı olarak katman ara yüzeylerinde gerilme yığılması meydana gelmektedir. Meydana gelen bu gerilme yığılması hasara yol açabilmektedir (Li vd., 2001). FDM'lerde malzeme özelliklerinin sürekli olmasından dolayı malzeme içerisinde gerilme yığılması meydana gelmemektedir. FDM'nin bu özelliği onu bir çok uygulama için uygun kılmakta ve araştırmacıların ilgisini çekmektedir. FDM üzerine yapılan ilk çalışma bir boyutlu problemlerin seri çözümüdür (Lee vd., 1975). Bu çalışmada FDM'den yapılmış yarı sonsuz bir çubukta ani darbe yükü altında dalga yayılması problemi incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmada bir boyutlu çok katmanlı çubukta katman sayısı arttıkça çözüm FDM çubuktaki çözüme yaklaştığı görülmektedir. Chiu ve Erdoğan (1999) bu çözümü yarı sonsuz plak problemi için genişleterek farklı malzemeler için dalga yayılması problemini incelemişlerdir.

FDM'lerin mekanik davranışlarının modellenmesi ilgili çalışmalar son yıllarda artmıştır. Schiedler ve Gazonas (2002) çok katmanlı ve FDM'den yapılmış plakların mekanik davranışlarını sonlu eleman yazılımı kullanarak incelemişler ve sonuçları analitik çözüm ile karşılaştırmışlardır. Çalışmalarında malzeme özelliklerini her bir eleman içinde sabit kabul etmişlerdir. Li ve diğerleri (2001) FDM seramik takviyeli alüminyum plakların visko-plastik davranışlarını incelemişlerdir. Banks-Sills ve diğerleri

(2002) kompozit malzemelerin modellenmesinde kullanılan farklı yöntemleri karşılaştırmışlardır. Banks-Sills ve diğerleri (2002) FDM'lerin gerilmenin şiddetinin malzemenin mekanik davranışında önemli rol oynadığı problemlerde kullanılmasının daha uygun olduğu sonucuna varmışlardır. Berezovski ve diğerleri (2003) çok katmanlı metal-seramik kompozitleri ve içinde rastgale yayılmış seramik parçacıklar gömülü metallerin mekanik davranışlarını incelemişlerdir. Yaptıkları çalışma sonucu malzeme Özelliklerinin düzgün değişen şekilde modellenmenin olayın fiziğine daha yakın sonuçlar verdiğinin görmüşlerdir. Santare ve diğerleri (2003) ise FDM'lerin mekanik davranışlarını modellemek için 1 boyutlu yarı sonsuz plak probleminde sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Çalışmalarında eleman içerisinde malzeme özelliklerinin doğrusal olarak değiştiğini varsaymışlar ve sabit malzeme özellikli elemanlara göre daha yüksek hassasiyette sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada FDM'leri modellemede kullanılan iki yöntem olan, malzemeyi çok katmanlı olarak modellemek ve malzeme özelliklerinin eleman içerisinde doğrusal değiştiği modeller iki boyutlu problemler için karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma ortasından ani darbe yükü uygulanmış eksenel-simetrik plak problemi çözülerek yapılmıştır. Problemi modellemek amacı ile Aksoy ve diğerleri (2004) tarafından geliştirilen uzay-zaman süreksiz Galerkin yöntemi kullanılmıştır.

Bünye denklemleri ve ayrıklaştırma

FDM ve çok katmanlı kompozit plakların mekanik özelliklerinin incelemesinde malzeme lineer elastik kabul edilmiştir. Ayrıklaştırma için uzay-zaman süreksiz Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Ayrıklaştırmanın detayları için okuyucu Aksoy ve Şenocak'a (2005) bakabilir.

Ortasından ani yüklenmiş plak problemi

FDM ve katmanlı yapıların mekanik davranışlarını karşılaştırmak amacı ile Şekil 1'de gösterilen ortasından ani olarak yüklenmiş eksenel simetrik metal matrisli seramik plak incelenmiş-

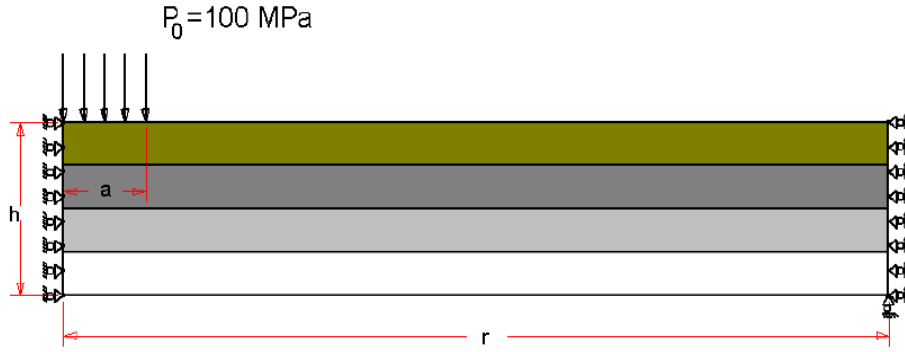
tir. Plağın kalınlığı $h = 0.02$ m ve yarıçapı $r = 0.1$ m dir. Yayıllı yük, merkezde $a = 0.005$ m yarıçaplı daire içinde uygulanmıştır. Metal ve seramik fazların malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmiştir. Etkin malzeme özelliklerinin hesaplanmasında karışım kuralı kullanılmıştır. Sayısal hesaplamalar $dt = 0.2 \mu\text{san.}$, $dt = 0.1 \mu\text{san.}$ ve $dt = 0.05 \mu\text{san.}$ zaman adımları için gerçekleştirilmiştir. Hesap alanı 16×80 , 32×160 ve 64×320 dörtgen elemana bölünmüştür. Hesaplamalarda bilineer baz fonksiyonları kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması sonucu zaman adımının ve hesap ağının değişmesi ile sonuçlardaki değişimin küçük olduğu görülmüştür. Hesaplamalar ön yüklemeli ($a=0,25$) ve geri yüklemeli ($a=4$) plaklar için yapılmıştır. Çok katmanlı plak için hacim oranları katmanların

orta noktasına denk gelen FDM plaktaki değer olarak alınmıştır. FDM ve çok katmanlı plaktaki seramik parçacıklarının hacim oranlarının kalınlık boyuca değişimi Şekil 2'de gösterilmiştir. FDM malzemede sermik fazının hacim oranının kalınlık boyunca değişimi aşağıdaki denklemde verilmiştir.

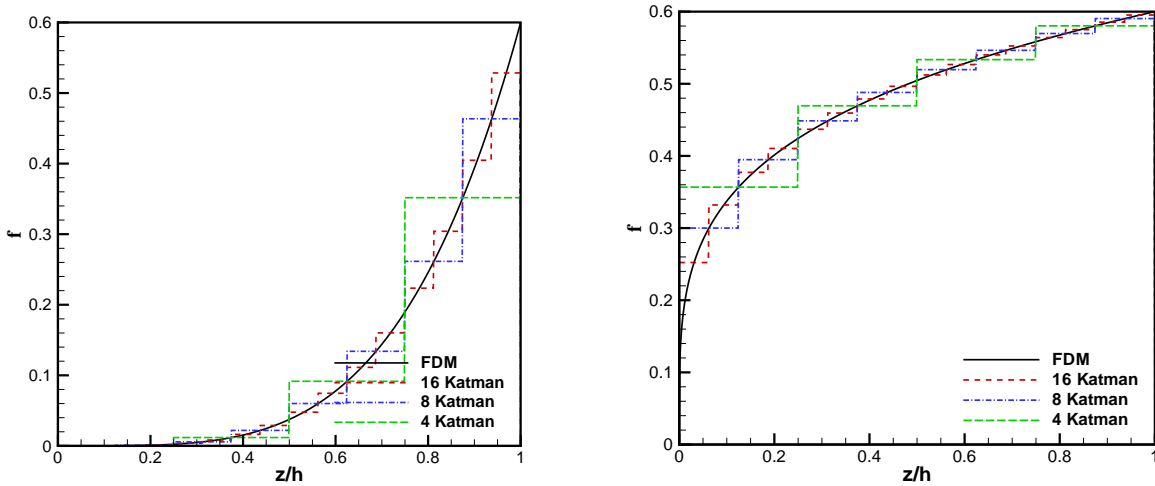
$$f=0.6(z/0.02)^a \quad (1)$$

Tablo 1. Metal ve seramik fazların malzeme sabitleri

	Young Modülü (GPa)	Poisson Oranı	Yoğunluk (Kg/m ³)
Metal Matris	70	0.3	2800
Seramik	420	0.17	3200



Şekil 1. Ortasından yüklenmiş aksel simetrik plak



(a) Arka yüklemeli plak

(b) Ön yüklemeli plak

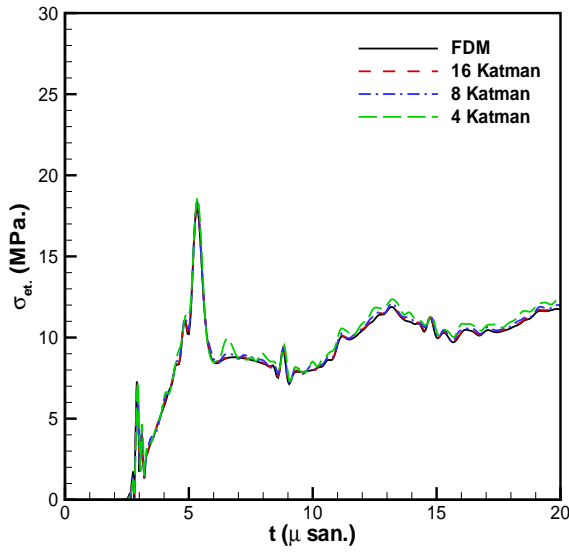
Şekil 2. Plaklarda hacim oranlarının kalınlık boyunca değişimi

Arka yüklemeli plak

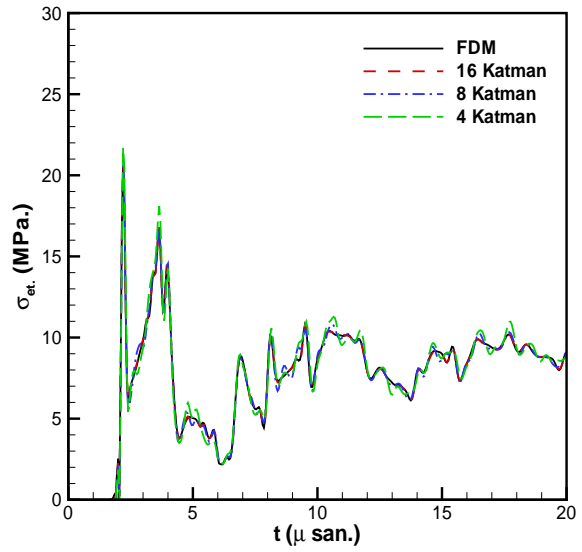
Şekil 3'te plağın orta ekseninde farklı noktalarda etkin gerilme değerlerinin zaman göre değişimi görülmektedir. Şekilde (d) grafiğinin ölçeğinin farklı olmasının sebebi etkin gerilme değerinin büyük olmasıdır. Şekillerden de görüldüğü üzere plak merkezinde çok katmanlı plaklar ile FDM plakdan elde edilen değerlerin farklı olduğu görülmektedir. Katman sayısı azaldıkça ara yüzeylerde meydana gelen gerilme dalgası yansımalarından dolayı dalgalanma sayısı artmaktadır. Plağın alt kısmına doğru FDM malzeme ile katmanlı mal-

zemeler arasında malzeme değerleri birbirine yaklaştığı için etkin gerilme değerleri birbirine yaklaşmaktadır.

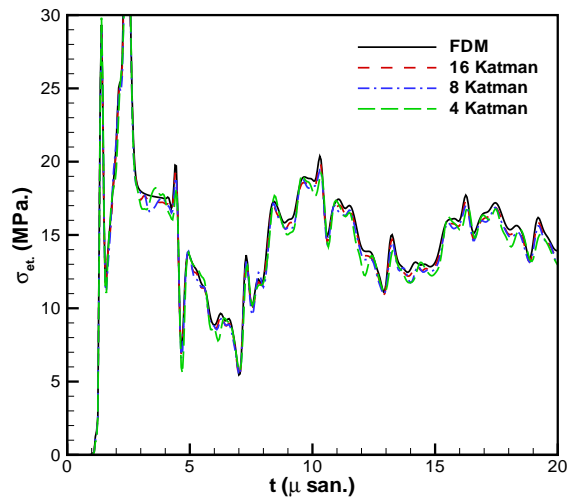
Şekil 4'te plağın orta radyal yönde farklı noktadaki etkin gerilmenin zamana göre değişimi verilmiştir. Şekillerden de görüleceği FDM malzeme gerilme dalgası daha hızlı ilerlemektedir. Katman sayısı azaldıkça gerilme dalgasındaki dalgalanma artmaktadır. Gerek FDM plakda gerekse katmanlı plaklarda gerilme dalgası radyal yönde ilerledikçe genliği 25 MPa'dan 5 MPa'a kadar düşmektedir. Diğer taraftan bütün noktalarda



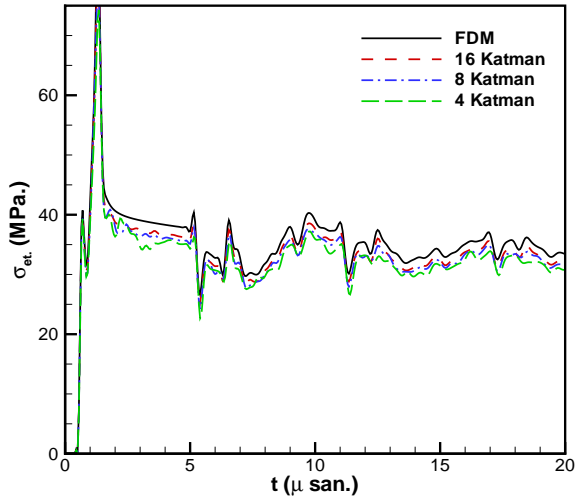
(a) $z/h=0.0$



(b) $z/h=0.25$

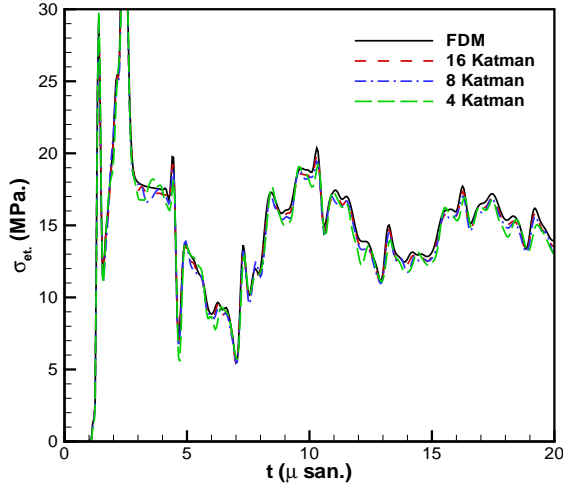


(c) $z/h=0.5$

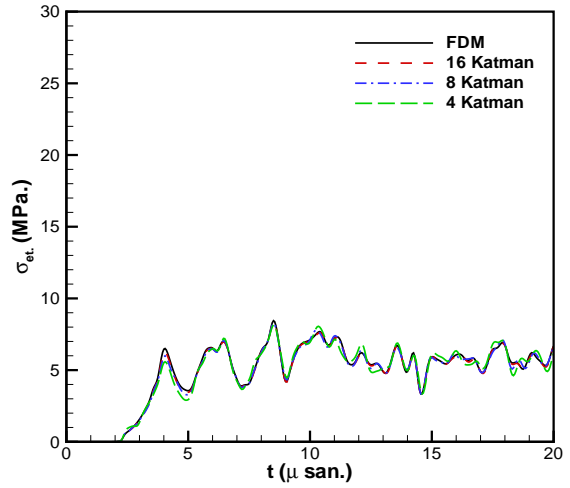


(d) $z/h=0.75$

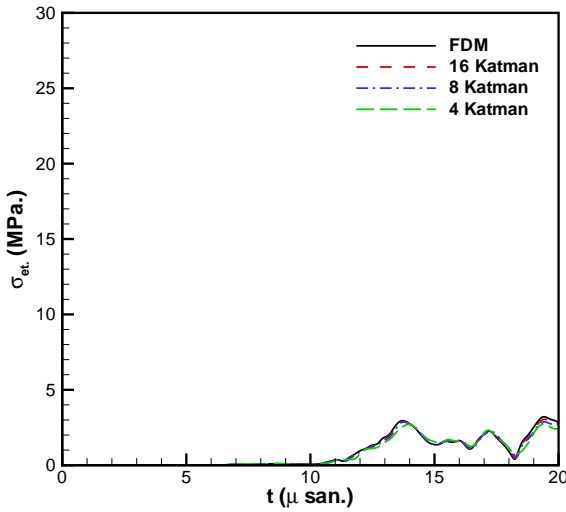
Şekil 3. Arka yüklemeli plakda kalınlık boyunca etkin gerilme değişimi ($r=0.0$)



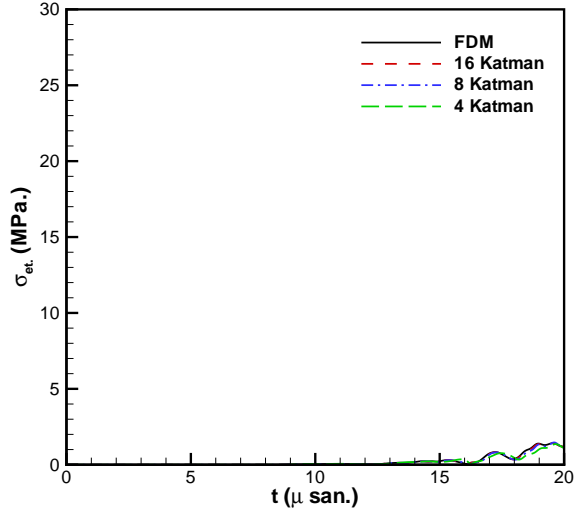
(a) $r/R=0.0$



(b) $r/R=0.2$



(c) $r/R=0.6$



(d) $r/R=0.8$

Şekil 4. Arka yüklemeli plakda orta eksen boyunca etkin gerilme değişimi ($z/h=0.5$)

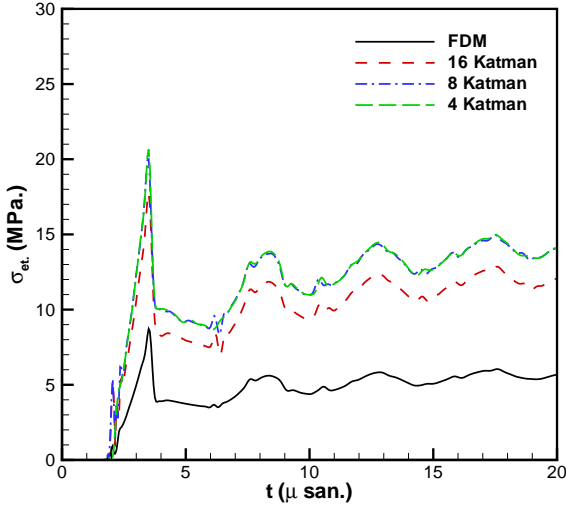
FDM plaktaki etkin gerilme değerinin katmanlı plaklara göre daha yüksek olduğu görülmektedir.

Ön yüklemeli plak

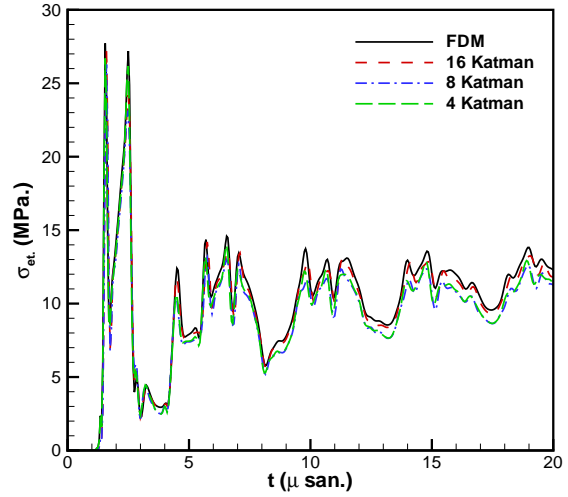
Şekil 5'te plağın ortasında farklı radyal noktadaki etkin gerilme değerlerinin zaman göre değişimi görülmektedir. Şekilde grafiklerin ölçeklerinin farklı olmasının sebebi etkin gerilme değerindeki büyük değişimdir. Şekillerden de görüldüğü üzere plak merkezinde çok katmanlı plaklar ile FDM plaktan elde edilen değerlerin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Gerilme dalgası radyal yönde ilerledikçe çok katmanlı plaklar ile FDM

plaktaki etkin gerilme değerleri farklılaşmaktadır. Plak eksenine yakın bölgelerde FDM plaktaki etkin gerilme değerleri yüksek iken, radyal yönde ilerledikçe çok katmanlı plaklardaki etkin gerilme değerlerinin daha yüksek olduğu görülmüştür. Ayrıca FDM plakta gerilme dalgasının radyal yönde daha hızlı ilerlediği görülmektedir.

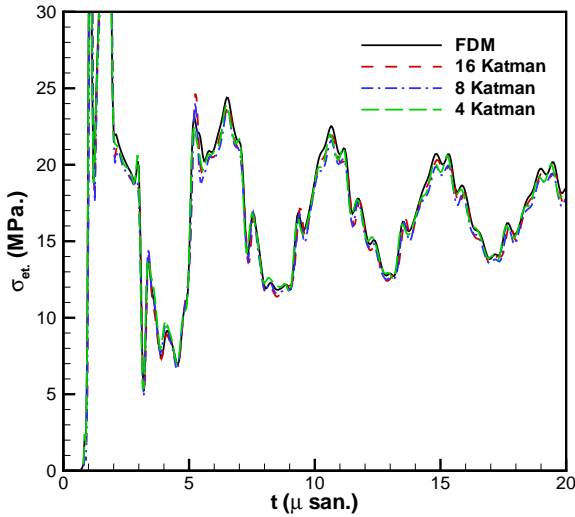
Şekil 6'da plak eksenini üzerindeki farklı noktadaki etkin gerilmenin zamana göre değişimi verilmiştir. Şekil 6'dan da görüleceği üzere plağın üst kısmında çok katmanlı plak ile FDM plak arasındaki etkin gerilme değerleri arasındaki fark çok düşüktür. Plağın alt kısmında ise FDM plaktaki etkin gerilme değerlerinin çok katmanlı plaklarda



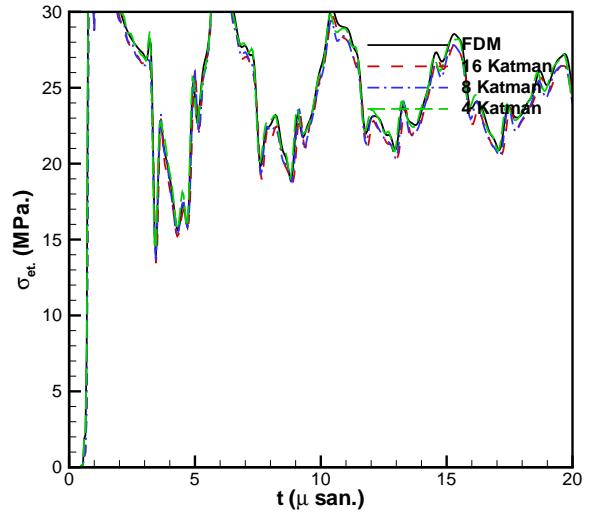
(a) $z/h=0.0$



(b) $z/h=0.25$



(c) $z/h=0.5$



(d) $z/h=0.75$

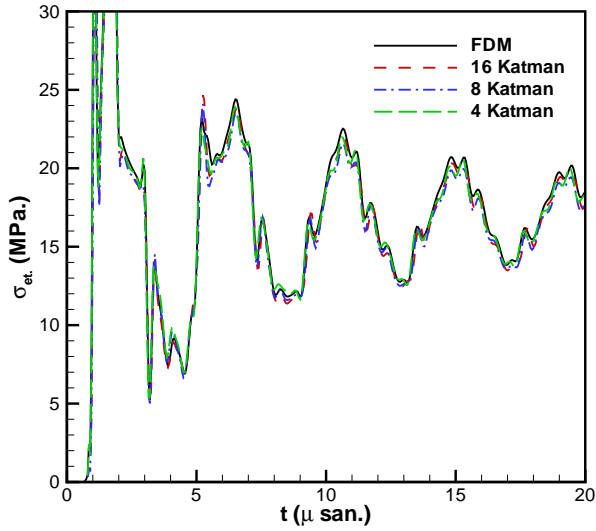
Şekil 5. Ön yüklemeli plakda kalınlık boyunca etkin gerilme değişimi ($r/R=0.0$)

elde edilen etkin gerilme değerlerine göre çok düşük olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca katman sayısı arttıkça çok katmanlı plaklardan elde edilen sonuçların FDM plakdan elde edilen sonuçlara yaklaştığı görülmüştür.

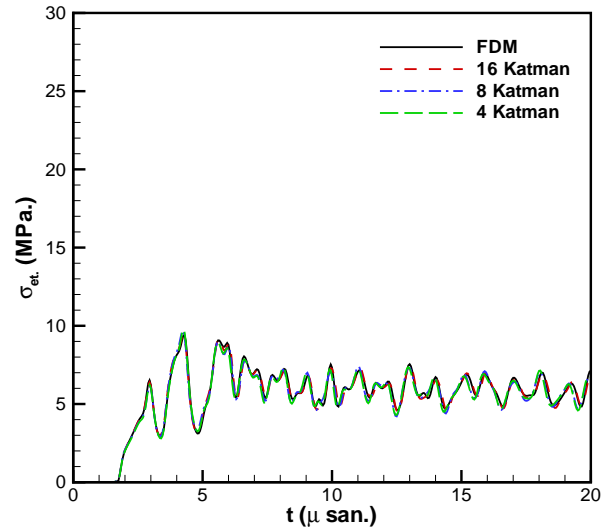
Sonuç

Yapılan karşılaştırma sonucu FDM malzeme- de gerilme dalgasının daha hızlı ilerlediği do- layısı ile darbe sonucu malzemeye aktarılan enerjinin daha kısa sürede daha geniş alana yayıldığı görülmüştür. Ayrıca etkin gerilme

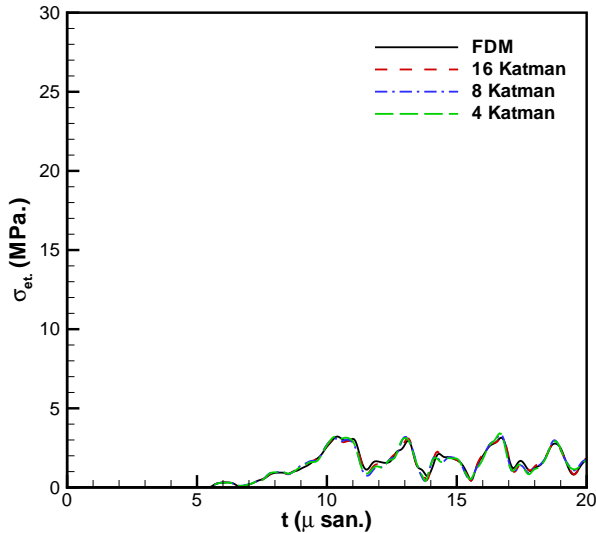
değerlerinin radyal yönde farklılaştığı tespit edilmiştir. Çok katmanlı plaklarda radyal yönde ilerledikçe etkin gerilme değerlerinin FDM malzeme- ye göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu malzeme içerisindeki çatlakların çok katmanlı malzemelerde büyümesine ve plağın hasarına yol açabilir. Yapılan analizler sonucu çok katmanlı plakların ve FDM plakların genel malzeme davra- nışlarının birbirine yakın olmasına rağmen, özel- likle plastisite ve hasar mekaniği problemleri için önemli olan yerel davranışta önemli farklılıklar tespit edilmiştir. Bu nedenle FDM malzemeyi çok



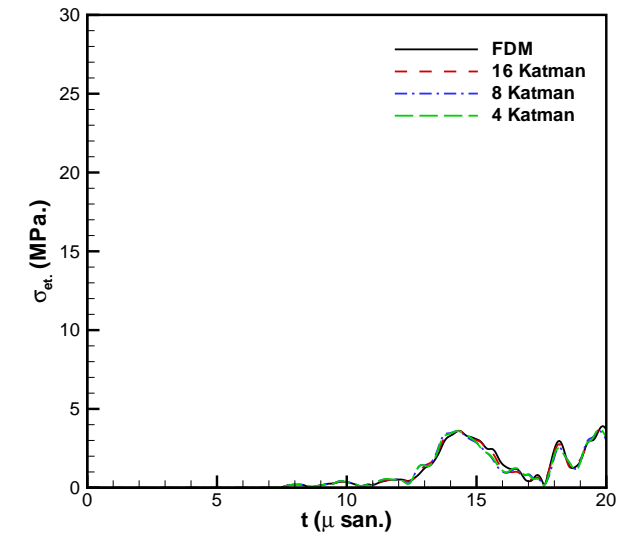
(a) $r/R=0.0$



(b) $r/R=0.2$



(c) $r/R=0.6$



(d) $r/R=0.8$

Şekil 6. Ön yüklemeli plakda orta eksen boyunca etkin gerilme değişimi ($z/h=0.5$)

katmanlı malzeme modelleri ile modellemenin doğru sonuçlar veremeyeceği sonucuna varılmıştır.

Kaynaklar

Aksoy, H.G., Tanrıöver H. ve Şenocak E., (2004). Comparison of newmark and space-time discontinuous galerkin method, *Proceedings, Earth&Space 2004: Engineering, Construction, and Operations in Challenging Environments*, Houston-Texas, ABD.

Aksoy, H.G. ve Şenocak E., (2005). Modelling of functionally graded and layered materials with space-time discontinuous galerkin method, *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, Austin-Texas, ABD.

Banks-Sills, L., Eliasi, R. ve Berlin Y., (2002). Modelling of functionally graded materials in dynamic analyses, *Composites Part B: engineering*, **33**, 7-15.

Berezovski, A., Engelbrech, J. ve Maugin, G.A., (2003). Numerical solution of two dimensional wave propagation in functionally graded materials, *European Journal Mechanics*, **22**, 257-265.

- Chen X., Chandra, N. ve Rajendran, A., (2004). Analytical solution to the plate impact problem of layered heterogeneous material systems, *International Journal of Solids and Structures*, **41**, 4635-4659.
- Chiu, T.C. ve Erdoğan, F., (1999). One-dimensional wave propagation in a functionally graded elastic medium, *Journal of Sound and Vibration*, **222**, 453-487.
- Karniadakis, G.E. ve Sherwin, S.J., (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*, Newyork, Oxford, ABD.
- Lee, E.H., Budiansky, B. ve Drucker D.C., (1975). On the influence of variations of material properties on stress wave propagation through elastic slabs. *Journal of Applied Mechanics*, **42**, 2, 417-422.
- Li, Y., Ramesh K.T. ve Chin E.S.C., (2001). Dynamic characterization of layered and graded structures under impulsive loading, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 6045-6061.
- Santare, M.H., Thamburaj, P. ve Gazonas, G.A., (2003). The use of graded Finite elements in the study of elastic wave propagation in continuously nonhomogeneous materials, *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 5621-5634.
- Schiedler, M. ve Gazonas, G., (2001). Analytical and computational study of one dimensional impact of graded elastic solids, *Shock Compression of Condensed Matter-2001*, 689-692.