

Rotor-pala sistemlerinde mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık titreşimleri

Gökhan BULUT*, Özgür TURHAN

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Uçak ve helikopter pervaneleri, kompresörler, turbomakinalar gibi önemli uygulamalara sahip olmaları nedeniyle rotor-pala sistemlerinin dinamiği, özellikle de titreşimleri önemli bir araştırma konusudur. Anılan uygulama alanlarında prototip geliştirme ve test maliyetlerinin yüksek, hizmete alınma sonrasında ortaya çıkan hasarların sonucunun ise genellikle gerçek bir felaket olması nedeniyle bu sistemlerin çalışma koşullarında sahip olacakları titreşim karakteristiklerinin daha tasarım aşamasındayken gerçeğe uygun olarak öngörülebilmesi büyük önem taşır. Bu çalışmada, her kademesinde birden çok özdeş pala taşıyan, tek ve çok kademeli rotor-pala (mil-disk-pala) sistemleri ele alınmış ve mil burulma titreşimleriyle, palaların dönme düzlemi içerisindeki eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin bir inceleme gerçekleştirilmiştir. Bu yapılırken, Euler-Bernouilli kirişi olarak göz önüne alınan palaların Galerkin yöntemi ile, burulma elastikliğine sahip milin ise sonlu elemanlar yöntemi ile modellendiği karma bir modelleme yöntemi önerilmiş ve uygulanmıştır. Yöntem, ele alınan sistemin nispeten düşük serbestlik dereceli bir modelle başarılı bir şekilde modellenmesini sağlamış ve modele ilişkin özdeğer problemi analitik olarak geliştirilerek, birbirinden bağımsız, çok düşük boyutlu, "mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık modları" ve "rijid mil modları" adı verilen ve iki farklı mod şekli sınıfına karşılık gelen alt problemlere ayrılmıştır. Bu alt problemlerin incelenmesiyle bağlaşıklığın, ele alınan sistemlerin doğal frekansları ve titreşim biçimleri üzerindeki ciddi etkileri gösterilmiş ve bazı sistem parametrelerinin titreşim davranışı üzerindeki etkileri ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Rotor-pala sistemleri, turbomakinalar, bağlaşıklık titreşimler.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Gökhan Bulut. bulutgo@itu.edu.tr; Tel: (212) 293 13 00 dahili: 2585.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Elastik rotor-pala sistemlerinin titreşimleri" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 30.06.2008 tarihinde dergiye ulaşılmış, 17.07.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in rotor-blade systems

Extended abstract

Vibrations of rotor-blade systems is an important research topic due to very important applications such as aeroplane and helicopter propellers, compressors, fans, turbo-machines, etc. In those application areas, accurate prediction of vibration characteristics is crucial in the design stage because prototyping and testing costs are exceptionally high and failure is generally disastrous. As the vibratory failures generally occur in the blades, most of the researches are concentrated on the blade vibrations. Bending and torsional vibrations of the shaft are also treated in the literature as other important sources of vibration failure. However, vibrations of different elements are generally considered separately, overlooking thus possible coupling effects, though the few works considering the coupling, pointed to serious interaction between shaft and blade vibrations.

The aim of this study is to study the coupling effects between shaft torsional and blade in-plane bending vibrations in single and multi stage rotor-blade systems through an analytical approach. For this purpose, an idealized model, that consists in a torsionally elastic shaft carrying a number of rigid disks, which in turn, carry a number of identical blades modelled as cantilevered, uniform Euler-Bernoulli beams is considered. The equations of this multi body system is derived through a synthetical (elements of the system are considered first), multiframe (the motion of each element is referred to the most appropriate frame) and mixed (each element is modelled by a different method) approach. Thus, the torsionally elastic shaft is modelled by finite element method to obtain a discrete model and the blades are modelled by Galerkin's method to obtain a similar model. The resulting equations of motion are linear in shaft's torsional coordinates, nonlinear in blades' bending coordinates, and include both linear and nonlinear coupling between them. A consistent small vibrations assumption leads to a fully linear model. Then, the resulting linearized equations are brought together into a single hyper-matrix-vector equation whose matrices have repetitive structures owing to the identity of the blades on each stage. The related eigenvalue analysis problem is developed analytically and splitted into two independent

sub-problems corresponding to two kinds of possible normal mode motions of the system. These are referred to as coupled shaft torsion-blade bending modes and rigid shaft modes by the authors. The dimensions of the sub-problems are independent of the number of blades on each disk. This corresponds to a considerable model reduction and enables systems with high number of blades to be examined without difficulty.

In the coupled shaft torsion-blade bending modes that exist in both single and multi blade systems, all the blades of the same disk have the same mode shape. The dimension of the related sub-problem equals the model degree of freedom of the shaft plus that of one blade per stage. In these modes, eigenvalue loci veering phenomena occur and this makes the coupling to have a strong effect on the vibration characteristics of the system at certain combinations of the design parameters.

In the rigid shaft modes that are peculiar to multi-blade systems, the shaft behaves like a rigid body and the blades of all the disks except one are at rest. The blades of the remaining disk have similar mode shapes but their total effect on the disk vanishes. The number of these sub-problems equals the number of stages of the system and the dimension of each sub-problem equals the model degree of freedom of one blade of the related disk.

In this study, a single stage rotor-blade system, which consists of a torsionally elastic shaft carrying a bladed rigid disk attached at its right end, is first considered. The variation of the natural frequencies with certain dimensionless system parameters, such as shaft rotation speed, disk radius, is examined. Then, a rotor-blade system with three identical and equally spaced stages is considered and the variation of the natural frequencies with the dimensionless rotation speed is studied. In these studies, uncoupled analysis results are also given along with the coupled ones and it is shown that eigenvalue loci veering phenomena occur between shaft torsion and blade in-plane bending modes. This makes it necessary the coupling to be considered in the eigenanalysis whenever accuracy is required in the calculations.

Keywords: Rotor-blade systems, turbomachinery, coupled vibrations.

Giriş

Günümüzde, üretimden ulaşıma kadar hemen her alanda karşımıza çıkmaları ve turbomakinalar, kompresörler, fanlar, uçak ve helikopter pervaneleri gibi çok önemli uygulama alanlarına sahip olmaları nedeni ile rotor-pala sistemlerinin dinamiği, özel olarak da titreşimleri önemli bir araştırma konusudur.

Makinaların tasarımındaki genel eğilime paralel olarak, bu makinaların da daha büyük güç/ağırlık oranına sahip olmaları, dolayısıyla daha hızlı ve daha hafif olmaları eğiliminin her geçen gün artması, daha narin hale gelen bu makinalarda titreşim nedeniyle ortaya çıkan problemlerin de artmasına sebep olmakta ve bu da, gerek verimlilik gerekse çalışma ömrü açısından, titreşim karakteristiklerinin, yani sistem doğal frekanslarının ve titreşim biçimlerinin önceden doğru olarak kestirilebilmesini gerekli kılmaktadır.

Rotor-pala sistemlerinde, palalarda karşılaşılan titreşim problemlerinin ayrıntılı olarak ele alındığı bir çalışma Srinivasan (1997) tarafından ortaya konulmuştur. Bu çalışmada, bu titreşim problemlerinin kuramsal ve pratik yönlerine ve gelecekteki araştırmalara yön verebilecek sorunlara ilişkin bir derleme ile bu konudaki çalışmaların bir listesi verilmiştir.

Rotor-pala sistemlerinde titreşim problemleri incelenirken, genellikle sistemi oluşturan elemanların titreşimleri birbirlerinden bağımsız olarak ele alınır ve hangi elemanın titreşimleriyle ilgileniliyorsa, onun dışındaki elemanlar rijid kabul edilir. Örneğin, mil, disk ve palalardan oluşan ve disklerin, mil ve palalar yanında rijid kabul edilebileceği bir sistemde, pala titreşimleri incelenirken mil, mil titreşimleri incelenirken de palalar rijid kabul edilir. Oysa mil eğilme titreşimlerinin dönme düzlemi dışındaki pala eğilme titreşimleriyle, mil burulma titreşimlerinin ise dönme düzlemi içindeki pala eğilme titreşimleriyle bağlaşıcağı bilinmektedir. Bu bağlaşıklık etkilerini dikkate alan az sayıda çalışmadan da bağlaşıklığın, sistemin titreşim davranışı üzerinde ciddi etkileri olacağı anlaşılmakta ve bu da, rotor-pala sistemlerinin titreşim karakteristiklerinin doğru olarak öngörülebilmesi için

bu bağlaşıklık etkilerinin mutlaka göz önüne alınması gerektiğini göstermektedir.

Gerçekten de, mil eğilme titreşimlerini (rotor dinamiği problemi) ele alan bir grup çalışmada Loewy ve Khader (1984), Crawley ve diğerleri (1986) ve Chun ve Lee (1996) bağlaşıklığın belli sistem frekansları (kritik hızlar) üzerinde önemli etkisi bulunacağı sonucuna varmışlardır.

Okabe ve diğerleri (1991), mili sonlu elemanlar yöntemiyle, palaları basit birer tek serbestlik dereceli sistem olarak modelledikleri çalışmalarında, bir enerji üretim tesisindeki türbin-jeneratör grubunda mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık titreşimlerini incelemişler ve bağlaşıklık modelin, gerçek sistemin kimi doğal frekanslarını doğru olarak öngördüğünü rapor etmişlerdir.

Ewins (1973), disk-pala sistemlerinin titreşim karakteristiklerini incelediği çalışmasında, bütünü sürekli ortam olarak modellediği, farklı sayıda palalar taşıyan disk-pala sistemleri ele alarak, bazı sistem parametrelerinin, özdeş olmayan palaların ve palaları birbirine bağlayan kuşakların sistemin titreşim karakteristiklerine etkisini incelemiş ve bu tür sistemlerin zorlanmış titreşim cevabına da değinerek, teorik ve deneysel sonuçları karşılaştırmalı olarak vermiştir.

Tsai (2004), bir disk-pala sistemi ele almış ve sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla önce tek bir palanın ve ele aldığı disk-pala sisteminde bütün palaların tek bir kuşakla birbirlerine bağlı olması halinde sistemin bütünü, titreşim davranışına ilişkin sonuçlarını deneysel sonuçlarla karşılaştırmalı olarak vermiştir.

Bladh ve diğerleri (2002), endüstriyel bir turbomakinanın bir kademesine ait, birbirleriyle özdeş olmayan palalar içeren bir disk-pala sistemini, bir model indirgeme tekniği kullanarak, sonlu elemanlar yöntemi ile modellemişler ve nispeten düşük serbestlik dereceli bir model üzerinden, sistemin serbest ve zorlanmış titreşim davranışına ilişkin bir inceleme gerçekleştirerek pala titreşimleri arasındaki bağlaşıklık etkilerine dikkat çekmişlerdir.

Chatalet ve diğerleri (2005), sonlu elemanlar yöntemine dayalı iki model indirgeme tekniği önerip kullanarak çok kademeli bir mil-disk-pala sisteminin titreşim davranışına ilişkin bir inceleme gerçekleştirmişlerdir.

Benzer şekilde, Huang ve Ho (1996), bir mil-disk-pala sisteminde mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık titreşimlerini, palaları birer Euler-Bernouilli kirişi olarak ele alan lineer bir model yardımıyla inceleyerek yaklaşık bir özdeğer analizi problemi çözmüş ve bağlaşıklık pala titreşimlerinde kararlılık yitimine neden olacağı çarpıcı, fakat hatalı sonucuna varmışlardır.

Bu çalışmada ise, tek ve çok kademeli rotor-pala sistemlerinde mil burulma-pala eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin bir inceleme, lineer, analitik bir model üzerinden gerçekleştirilmiş ve bağlaşıklık bu tür sistemlerin titreşim karakteristikleri üzerindeki etkileri irdelenmiştir.

Matematik model

Yoğunluğu ρ_0 , kayma modülü G , kesit eylemsizlik momenti I_p ve uzunluğu ℓ_0 olan burulma esnekliğine sahip bir mil ve bu milin taşıdığı r adet rijid diskten oluşan (r kademeli) rotor-pala sistemi Şekil 1'deki gibi göz önüne alınsın ve yarıçapı R_i , kütle eylemsizlik momenti J_i olan i . rijid diskin, yoğunluğu ρ_i , eğilme rijidliği $(EI)_i$, kesit alanı A_i , ve uzunluğu ℓ_i olan k_i adet özdeş pala taşıdığı varsayılınsın.

Üç tür elemandan oluşan (burulma mili, rijid disk ve palalar) bu bileşik sistemin modellenmesinde sentetik, çok eksen takımlı ve karma bir yöntem başvurulsun. Bu amaçla, elemanlar ayrı ayrı ele alınsın ve her birinin hareketi, farklı bir yöntem kullanılarak, en uygun eksen takımında incelensin.

Bu çerçevede ilk olarak, taşıdığı disklerin T_i tepki momentlerinin etkisinde bulunan burulma mili ele alınsın. Milin sol ucuna bağlı, mil ile birlikte Ω_0 sabit açısal hızı ile dönen O' ;XYZ eksen takımında burulma hareketleri incelenmek istenir, modellemede sonlu elemanlar yöntemine başvurulur ve milin, n adet, eşit

uzunluklu, 3 düğüm noktalı (ikisi uç, biri orta noktasında) ve 2. dereceden şekil fonksiyonuna sahip sonlu elemanlardan oluştuğu düşünülürse,

$$\rho_0 I_p \ell_0 \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} + \frac{GI_p}{\ell_0} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^r \mathbf{e}_{s_i} \cdot T_i \quad (1)$$

yazılabilir. Denklem 1'de, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}\}^T$, $2n$ boyutlu düğüm koordinatları vektörü, \mathbf{e}_j , $\mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1, 0, \dots, 0\}^T$ örneğinde olduğu gibi, j . $2n$ boyutlu birim vektör, s_i , i . diskin bağlandığı düğüm noktası ve $\rho_0 I_p \ell_0 \cdot \mathbf{M}$ ve $\frac{GI_p}{\ell_0} \cdot \mathbf{K}$, milin bağlı-serbest sınır koşullarına karşılık gelen, $2n \times 2n$ boyutlu global kütle ve katılık matrisleridir.

İkinci olarak, üzerinde k_i adet pala taşıyan i . rijid disk ele alınsın. Milin $-T_i$ tepki momentiyile palaların $-F_{ij}$ ve $-M_{ij}$; $j=1, 2, \dots, k_i$ tepki kuvvet ve momentlerinin etkisi altındaki i . rijid diskin hareket denklemi, diskin, mile ait s_i -inci düğüm noktası ile birlikte hareket edeceğine dikkat ederek, O' ;XYZ eksen takımında

$$J_i \cdot (\mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2}) = -T_i - \sum_{j=1}^{k_i} (R_i \cdot F_{ij} + M_{ij}) \quad (2)$$

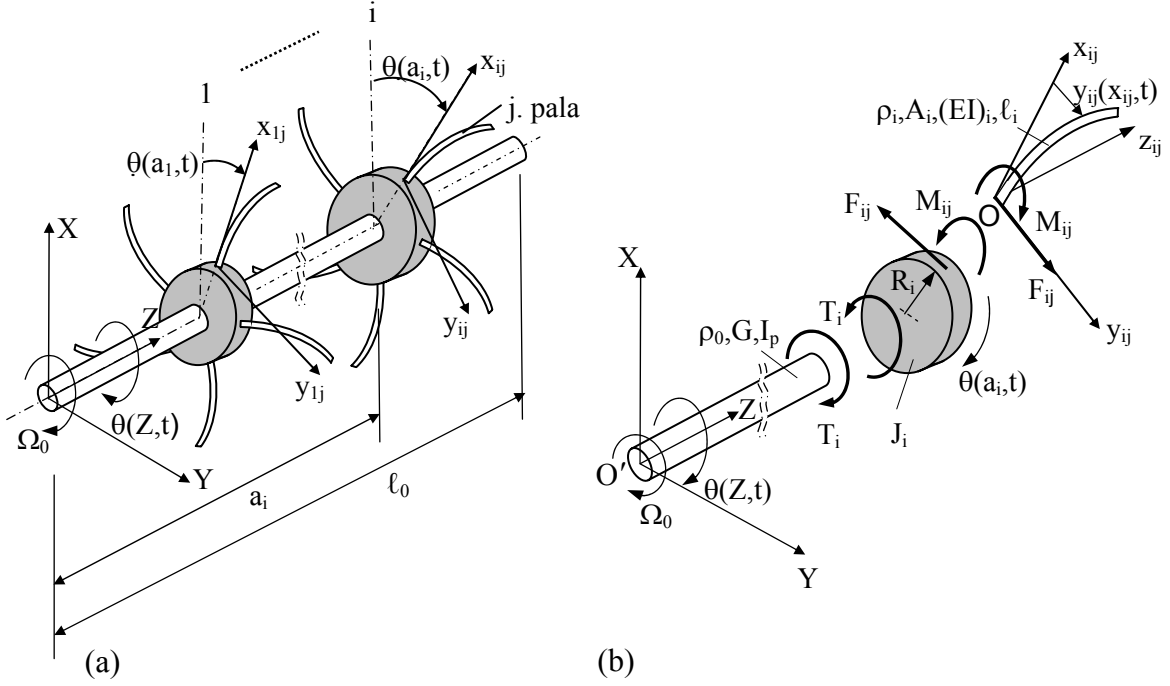
şeklinde yazılabilir. Son olarak, i . rijid diske bağlı j . palanın, bu diskle birlikte hareket eden O ; $x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ eksen takımındaki hareketi göz önüne alınsın. Bu palanın dönme düzlemi içerisindeki enine titreşimlerinin hareketine ait boyutsuzlaştırılmış ve küçük titreşimler kabulü altında lineerleştirilmiş diferansiyel denkleminin

$$\ddot{v}_{ij} + \eta_i^2 \cdot v_{ij}^{IV} - \beta^2 \left\{ \left[\alpha_i (1 - u_{ij}) + \frac{1}{2} (1 - u_{ij}^2) \right] v_{ij}'' - (\alpha_i + u_{ij}) v_{ij}' + v_{ij} \right\} + (\alpha_i + u_{ij}) \cdot \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (3)$$

olduğu gösterilebilir. Burada,

$$u_{ij} = \frac{x_{ij}}{\ell_i}, \quad v_{ij} = \frac{y_{ij}}{\ell_i}, \quad \alpha_i = \frac{R_i}{\ell_i}, \quad \tau = \omega_1^* t, \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\Omega_0}{\omega_1^*}, \quad \eta_i = \frac{\omega_i^*}{\omega_1^*}, \quad \omega_i^* = \sqrt{\frac{(EI)_i}{\rho_i A_i \ell_i^4}}$$



Şekil 1. Çok kademeli rotor-pala sistemi a) genel görünüm, b) elemanlar

olup, noktalar τ 'ya, üsler, u_{ij} 'ye göre türevleri göstermektedir. Ayrıca, hareketin incelendiği eksen takımı seçiminin bir sonucu olarak sınır şartları,

$$v(0, \tau) = 0, \quad v'(0, \tau) = 0, \quad v''(1, \tau) = 0, \quad v'''(1, \tau) = 0 \quad (5)$$

şeklinde konsol kiriş sınır şartlarıdır. (3) ve (5) ile tanımlı sınır değer probleminin yerine Galerkin yöntemi yardımı ile, onu belli bir yaklaşıklıkla temsil edecek, sonlu sayıda denklemden oluşan bir adi diferansiyel denklem takımı konulabilir. Bu amaçla $g_{ij}(\tau)$ 'lar bilinmeyen ağırlık fonksiyonları,

$$\varphi_p(u_{ij}) = \cosh \lambda_p u_{ij} - \cos \lambda_p u_{ij} - \kappa_p \cdot (\sinh \lambda_p u_{ij} - \sin \lambda_p u_{ij}); \quad \kappa_p = \frac{\cosh \lambda_p + \cos \lambda_p}{\sinh \lambda_p + \sin \lambda_p} \quad (6)$$

fonksiyonları ise (5) sınır şartlarını sağlayan hareketsiz kirişin öz fonksiyonları olmak üzere (3,5) sınır değer probleminin çözümü,

$$v_{ij}(u_{ij}, \tau) = \sum_{p=1}^m g_{ijp}(\tau) \cdot \varphi_p(u_{ij}) \quad (7)$$

sonlu serisi ile yaklaşık olarak temsil edilebilir. (6) ifadesinde yer alan λ_p 'ler, (5) sınır şartlarına sahip hareketsiz kirişin boyutsuz öz frekanslarıdır. (7) çözümü (3)'de yerine konulup Galerkin yönteminin bilinen işlemleri uygulanırsa matrisvektör formunda

$$\ddot{\mathbf{g}}_{ij}(\tau) + \left[\eta_i^2 \cdot \Lambda^4 - \beta^2 \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{I}) \right] \cdot \mathbf{g}_{ij}(\tau) + (\alpha_i \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) = \mathbf{0} \quad (8)$$

denklemini elde edilir. Burada Λ , elemanları $\Lambda_{rr} = \lambda_r$ olan $m \times m$ köşegen matris; \mathbf{I} , $m \times m$ birim matris; $\mathbf{g}_{ij}(\tau)$, i . rijid diske bağlı j . palaya ait m boyutlu Galerkin koordinatları vektörü; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{c} , ve \mathbf{d} ise elemanları

$$\begin{aligned} A_{rs} &= \int_0^1 [(1-u)\varphi_r'' - \varphi_r'] \cdot \varphi_s \cdot du, \\ B_{rs} &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-u^2)\varphi_r'' - u\varphi_r' \right] \cdot \varphi_s \cdot du, \\ c_r &= \int_0^1 \varphi_r \cdot du, \quad d_r = \int_0^1 u\varphi_r \cdot du \end{aligned} \quad (9)$$

şeklinde tanımlı mxm ve mx1 boyutlu matrislerdir. Bu formülasyon ışığında i. disk tarafından j. palaya uygulanan F_{ij} kesme kuvvetleri ve M_{ij} eğilme momentleri,

$$\mathbf{F}_{ij}(\tau) = \frac{(EI)_i}{\ell_i^2} \frac{\partial^3 v_{ij}(u_{ij}, \tau)}{\partial u_{ij}^3} \Big|_{u_{ij}=0}$$

$$= -2 \frac{(EI)_i}{\ell_i^2} \mathbf{e}^T \mathbf{g}_{ij}(\tau), \quad (10)$$

$$M_{ij}(\tau) = -\frac{(EI)_i}{\ell_i} \frac{\partial^2 v_{ij}(u_{ij}, \tau)}{\partial u_{ij}^2} \Big|_{u_{ij}=0}$$

$$= -2 \frac{(EI)_i}{\ell_i} \mathbf{f}^T \mathbf{g}_{ij}(\tau)$$

olarak hesaplanır. Burada, \mathbf{e} ve \mathbf{f} , elemanları $e_p = \kappa_p \lambda_p^3$, $f_p = \lambda_p^2$ şeklinde tanımlı m boyutlu vektörlerdir ve κ_p , Denklem 6'da tanımlanmıştır.

Parçaların hareket denklemleri bu şekilde elde edildikten sonra sıra bütünü hareket denkleminin sentezlenmesine gelmiştir. Bunun için, önce F_{ij} ve M_{ij} Denklem 10'dan alınıp Denklem 2'de, sonra da T_i Denklem 2'den alınıp Denklem 1'de yerine konulur, ayrıca τ zamanına geçilip boyutsuzlaştırma yapılırsa

$$\left(\mathbf{M} + \sum_{i=1}^r \gamma_i \cdot \mathbf{e}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i}^T \right) \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) + \mu^2 \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}(\tau)$$

$$- \sum_{i=1}^r 2\delta_i \eta_i^2 \mathbf{e}_{s_i} (\alpha_i \cdot \mathbf{e}^T + \mathbf{f}^T) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_i} \mathbf{g}_{ij}(\tau) \right) = \mathbf{0} \quad (12)$$

ifadesine ulaşılır. Burada,

$$\gamma_i = \frac{\mathbf{J}_i}{\rho_0 \mathbf{I}_p \ell_0}, \delta_i \quad (13)$$

$$= \frac{\rho_i \mathbf{A}_i \ell_i^3}{\rho_0 \mathbf{I}_p \ell_0}, \mu = \frac{\omega_0}{\omega_1^*}, \omega_0^* = \sqrt{\frac{\mathbf{G}}{\rho_0 \ell_0^2}}$$

boyutsuz parametreleri kullanılmıştır. Denklem 8 ve Denklem 12'nin $2n + m \cdot \left(\sum_{i=1}^r k_i \right)$ boyutlu tek bir hiper-matris/vektör denklemleri halinde bir araya getirilmesiyle sistemin hareket denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{M}}_{10} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{M}}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathbf{M}}_{r0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{g}}_1 \\ \ddot{\mathbf{g}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{g}}_r \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \delta_1 \overline{\mathbf{K}}_{01} & \delta_2 \overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & \delta_r \overline{\mathbf{K}}_{0r} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \overline{\mathbf{K}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada \mathbf{g}_i , i. diske bağlı k_i adet palanın m boyutlu Galerkin koordinatları vektöründen oluşmuş $k_i \cdot m$ boyutlu bir hiper vektör, $\overline{\mathbf{M}}_{i0}$ ve $\overline{\mathbf{K}}_{0j}$, k_i (veya k_j) adet özdeş matristen oluşan hiper-matrisler, $\overline{\mathbf{K}}_{ii}$, k_i adet özdeş köşegen blok içeren blok-köşegen bir hiper-matris olup genel görünümü

$$\mathbf{g}_i = \left\{ \mathbf{g}_{i1}^T \quad \mathbf{g}_{i2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{ik_i}^T \right\}^T, \overline{\mathbf{M}}_{i0} = \left[\mathbf{M}_{i0}^T \quad \mathbf{M}_{i0}^T \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{i0}^T \right],$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{0j} = \left[\mathbf{K}_{0j} \quad \mathbf{K}_{0j} \quad \cdots \quad \mathbf{K}_{0j} \right], \overline{\mathbf{K}}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ii} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \quad (15)$$

şeklinde dir. Burada, $2n \times 2n$ boyutlu \mathbf{M}_{00} ve \mathbf{K}_{00} , mxm boyutlu \mathbf{K}_{ii} , mx2n boyutlu \mathbf{M}_{i0} ve 2nmxm boyutlu \mathbf{K}_{0j} matrisleri ise

$$\mathbf{M}_{00} = \mathbf{M} + \sum_{i=1}^r \gamma_i \cdot \mathbf{e}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i}^T, \mathbf{M}_{i0} = (\alpha_i \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{e}_{s_i}^T,$$

$$\mathbf{K}_{00} = \mu^2 \mathbf{K}, \mathbf{K}_{0j} = -2\mathbf{e}_{s_j} \cdot \eta_j^2 \cdot (\alpha_j \cdot \mathbf{e}^T + \mathbf{f}^T), \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \eta_i^2 \cdot \Lambda^4 - \beta^2 \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{I})$$

şeklinde tanımlıdır. Denklem 14, Şekil 1'de görülen çok kademeli rotor-pala sisteminin serbest titreşimleri için lineer, yaklaşık ve ayrıştırılmış bir model oluşturmaktadır.

Özdeğer analizi

$\overline{\mathbf{G}}_i = \left\{ \mathbf{G}_{i1}^T, \mathbf{G}_{i2}^T, \dots, \mathbf{G}_{ik_i}^T \right\}^T$ olmak üzere $\boldsymbol{\theta}(\tau) = \boldsymbol{\Theta} \cdot e^{i\sigma\tau}$, $\mathbf{g}_i(\tau) = \overline{\mathbf{G}}_i \cdot e^{i\sigma\tau}$ şeklindeki çözüm

kabulleri Denklem 14'te yerlerine konulup, parçalı matrislerde ters alma ve çarpma kuralları dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} - \sigma^2 \mathbf{I} & \delta_1 \cdot \bar{\mathbf{B}}_{01} & \delta_2 \cdot \bar{\mathbf{B}}_{02} & \dots & \delta_r \cdot \bar{\mathbf{B}}_{0r} \\ \bar{\mathbf{C}}_{10} & \bar{\mathbf{K}}_{11} + \delta_1 \cdot \bar{\mathbf{D}}_{11} - \sigma^2 \mathbf{I} & \delta_2 \cdot \bar{\mathbf{D}}_{12} & \dots & \delta_r \cdot \bar{\mathbf{D}}_{1r} \\ \bar{\mathbf{C}}_{20} & \delta_1 \cdot \bar{\mathbf{D}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} + \delta_2 \cdot \bar{\mathbf{D}}_{22} - \sigma^2 \mathbf{I} & \dots & \delta_r \cdot \bar{\mathbf{D}}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}_{r0} & \delta_1 \cdot \bar{\mathbf{D}}_{r1} & \delta_2 \cdot \bar{\mathbf{D}}_{r2} & \dots & \bar{\mathbf{K}}_{rr} + \delta_r \cdot \bar{\mathbf{D}}_{rr} - \sigma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ \bar{\mathbf{G}}_1 \\ \bar{\mathbf{G}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{G}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

özdeğer analizi problemine gelinir. Burada üst çizgili matrisler, yerine göre k_i veya $k_i \times k_i$ adet özdeş bloktan oluşan

$$\bar{\mathbf{B}}_{0j} = [\mathbf{B}_{0j} \quad \mathbf{B}_{0j} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{0j}] , \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{i0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i0} \\ \mathbf{C}_{i0} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{i0} \end{bmatrix} , \quad \bar{\mathbf{D}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ij} & \mathbf{D}_{ij} & \dots & \mathbf{D}_{ij} \\ \mathbf{D}_{ij} & \mathbf{D}_{ij} & \dots & \mathbf{D}_{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{ij} & \mathbf{D}_{ij} & \dots & \mathbf{D}_{ij} \end{bmatrix}$$

görünümüne sahip hiper-matrislerdir ve

$$\mathbf{A}_{00} = \mathbf{M}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{00}, \mathbf{B}_{0j} = \mathbf{M}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{0j}, \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_{i0} = -\mathbf{M}_{i0} \mathbf{A}_{00}, \mathbf{D}_{ij} = -\mathbf{M}_{i0} \mathbf{B}_{0j}$$

tanımları geçerlidir. İçerdiği matrislerin tekrarlı yapıda oluşundan yararlanılarak Denklem 17'deki özdeğer analizi problemi analitik olarak geliştirilebilir (Bulut, 2008; Turhan ve Bulut, 2005, 2006) ve şu sonuca varılır:

Karakteristik denklem, $\Delta_i = k_i \delta_i = k_i \frac{\rho_i A_i \ell_i^3}{\rho_0 I_p \ell_0}$, i.

diskin taşıdığı palaların toplam eylemsizliğinin boyutsuz bir ölçüsünü oluşturmak üzere

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \Delta_1 \mathbf{B}_{01} & \Delta_2 \mathbf{B}_{02} & \dots & \Delta_p \mathbf{B}_{0r} \\ \mathbf{C}_{10} & \Delta_1 \mathbf{D}_{11} + \mathbf{K}_{11} & \Delta_2 \mathbf{D}_{12} & \dots & \Delta_p \mathbf{D}_{1r} \\ \mathbf{C}_{20} & \Delta_1 \mathbf{D}_{21} & \Delta_2 \mathbf{D}_{22} + \mathbf{K}_{22} & \dots & \Delta_p \mathbf{D}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{r0} & \Delta_1 \mathbf{D}_{r1} & \Delta_2 \mathbf{D}_{r2} & \dots & \Delta_r \mathbf{D}_{rr} + \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} - \sigma^2 \mathbf{I} \quad (20)$$

$$\prod_{i=1}^r \left(\det [\mathbf{K}_{ii} - \sigma^2 \mathbf{I}] \right)^{k_i - 1} = 0$$

şeklinde iki çarpana ayrılarak yazılabilir. Buradan, incelenen sistemin özdeğer analizi probleminin iki alt probleme ayrışacağı anlaşılmaktadır. Denklem 20'de ilk çarpan, bağlaşıklık titreşimlere karşılık gelen alt problem, ikinci çarpan ise, bağımsız titreşimlere karşılık gelen alt problemlerdir İki farklı mod şekli sınıfına karşılık gelen bu alt problemler, sırasıyla, “mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık modları alt problemi” ve “rijid mil modları alt problemleri” olarak adlandırılmışlardır.

Mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık modları, bağlaşıklık etkilerinin görüldüğü modlar olup, bu modlarda, her kademedeki palalar kendi aralarında özdeş olarak davranır, yani, aynı mod biçimine sahiptir. Rijid mil modları ise, milin bir rijid cisim gibi davrandığı modlardır. Mildeki burulma esnekliği dikkate alınmaksızın yapılacak bir pala titreşim analizinde bulunacak sonuca karşılık gelmektedirler ve bir kademesinde birden fazla pala taşıyan sistemlere özgüdürler. i. kademeye karşılık gelen rijid mil modunda, o kademedeki palalar aynı mod biçimiyle ancak, bağlı oldukları disk üzerindeki toplam etkileri sıfır olacak şekilde titreşirken, diğer kademelerdeki palalar hareketsiz kalır.

Sayısal uygulamalar

Bu bölümünde, tek ve çok kademeli rotor-pala sistemleri için uygulama sonuçlarına yer verilmiştir. Hesaplar, bu amaçla geliştirilmiş bir FORTRAN programı yardımıyla gerçekleştirilmiş ve palaların modellenmesinde $m=10$ Galerkin terimi, milin modellenmesinde $n=10(r+1)$ sonlu eleman kullanılmıştır. Mil burulma ve pala eğilme titreşimleri arasındaki bağlaşıklığın hesap sonuçları üzerindeki etkilerini görebilmek için, sonuçlar, bu bağlaşıklığın hesaba katılmaması durumunda bulunacak sonuçlarla karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu amaçla, palaları rijid kabul ederek mil burulma titreşimlerini incelemeye yönelik

$$[\mathbf{M} + \sum_{i=1}^r \bar{\gamma}_i \mathbf{e}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i}^T] \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}} + \mu^2 \mathbf{K} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (21)$$

problemi ile, mili rijid kabul ederek pala titreşimlerini incelemeye yönelik

$$\ddot{\mathbf{g}}_{ij} + [\eta_i^2 \Lambda^4 - \beta^2 (\alpha_i \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{I})] \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}; i=1,2,\dots,r \quad (22)$$

problemi ele alınmıştır. Denklem 21'de $\bar{\gamma}_i$, taşıyıcı disk ve palaların

$$\bar{J}_i = J_i + k_i \rho_i A_i \ell_i \left[\frac{1}{12} \ell_i^2 + \left(r_i + \frac{\ell_i}{2} \right)^2 \right] \quad (23)$$

olarak ifade edilmiş dönme eylemsizlikleri toplamının

$$\bar{\gamma}_i = \frac{\bar{J}_i}{\rho_0 I_p \ell_0} = \gamma_i + \Delta_i \left(\frac{1}{3} + \alpha_i^2 + \alpha_i \right) \quad (24)$$

şeklindeki boyutsuz karşılığıdır.

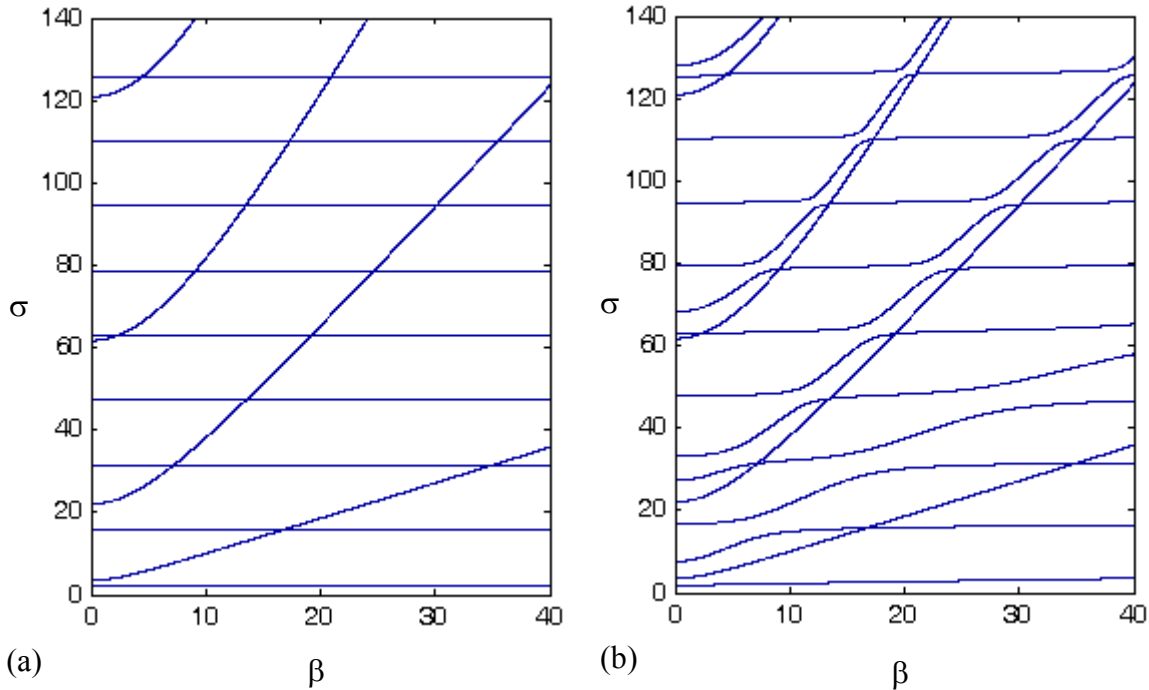
İlk olarak, üzerinde birden fazla pala taşıyan tek bir rijid disk ve bu diski sağ ucunda taşıyan burulma milinden ibaret, tek kademeli bir rotor-pala sistemi ele alınmıştır. Bu durumda, $r=1$ ve diskin mile bağlandığı düğüm noktası $s=2n$ dir. Tek kademeli bir sistem göz önüne alındığından dolayı, i . diski tanımlayan i indisi hesaplardan düşürülecektir. Ayrıca, yapılacak inceleme pala

sayısı k 'dan bağımsız olduğundan, pala sayısının verilmesine gerek yoktur.

Şekil 2'de, $\alpha=0.5$, $\gamma=0.5$, $\Delta=5$, $\mu=5$ şeklinde tanımlı bir rotor-pala sisteminde özfrekansların boyutsuz hız β ile değişimine ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Şekil 2a'da, bağışıklığı dikkate almayan (21) ve (22) denklemlerinden hesaplanan bağışık frekanslar görülmektedir. Burada, yatay hatlar dönme hızından etkilenmeyen mil burulma frekanslarına, β arttıkça yükselen eğriler ise merkezkaç kuvvet etkisi ile sertleşen palaların frekanslarına karşılık gelmektedir.

Şekil 2b'de, Denklem 20'den hesaplanan, çok palalı modele ait bütün frekanslar görülmektedir. Şekil 2a ve 2b'nin karşılaştırılmasından şu sonuçlara varılır: i) Özellikle düşük frekanslarda olmak üzere, bağışık haldeki frekansların geometrik yerlerinin kesişme noktaları civarında bağışık modlara ilişkin özfrekanslar çok ciddi geometrik yer sapmasına (loci-veering) uğramaktadır. Bu kesişme noktalarından uzaklaştıkça



Şekil 2. Özfrekansların mil boyutsuz dönme hızı β ile değişimi ($\alpha=0.5$, $\gamma=0.5$, $\Delta=5$, $\mu=5$; a, bağışık; b, bağışık)

bağlaşıklığın özfrekanslar üzerindeki etkisi azalmaktadır. ii) Bağırsız haldeki pala frakansları, bağlaşıklık halde de varlıklarını sürdürmektedir. Rijid mil modları'na ait olan bu özdeğerler, Denklem 20'den anlaşıldığı gibi, k-1 katlıdır.

Burada, bu çalışmanın Şekil 2b'de yansıtılan sonuçlarıyla, Huang ve Ho (1996)'nun benzer bir sistem üzerindeki çalışmalarından elde edilen sonuçlar arasında ciddi farklar bulunduğunun belirtilmesi yerinde olur. Örneğin, Huang ve Ho (1996)'nun, dönen palaların belli parametre bileşimlerinde kararlılık yitimine uğrayacağı kritik belirlemesi, bu çalışmanın ne sayısal ne de kuramsal sonuçlarınca doğrulanmıştır.

Şekil 3'te, $\beta=10$, $\gamma=0.5$, $\Delta=5$, $\mu=5$ şeklinde tanımlı bir sistemde boyutsuz disk yarıçapı α 'nın etkisinin incelendiği sonuçlar verilmiştir. Denklem 21 ve 22'den hesaplanan bağırsız frekanslar Şekil 3a'da gösterilmiştir. Burada yükselen eğriler palaların eğilme frekanslarını, yatay gidişli eğriler ise mil frekanslarını göstermektedir. Denklem 20'den elde edilen çok palalı bir sisteme ait bütün frekanslar Şekil 3b'de gösterilmiştir. Bu şekillerde palaların, dönme merkezinin dışına bakması ($\alpha>0$) haline ve merkezkaç kuvvetin bası etkisine maruz kalacak biçimde dönme merkezine bakması ($\alpha<0$) haline karşılık gelen sonuçlar bir arada görülmektedir.

Bu şekillerin incelenmesinden şu sonuçlara varılır: i) α 'nın büyümesiyle birlikte merkezkaç kuvvet etkisi palaların sertleşmesine, bu da pala eğilme modlarına ait frekansların artmasına neden olmaktadır. Bunun yanında Şekil 3b'de, bağırsız frekansların birbirleriyle kesişme noktaları civarında, çok güçlü bağlaşıklık etkilerinin ortaya çıktığı ve frekansların geometrik yer sapmasına maruz kaldığı görülmektedir. ii) $\alpha<0$ parametre bölgesinde merkezkaç kuvvetin bası etkisi devreye girdiğinden, pala frekansları düşmekte ve belli bir α değerinde sıfırlanmakta, yani, statik kararlılık yitimi (burkulma) ortaya çıkmaktadır. Bu problem, ilk olarak Mostaghel ve Tadjbakhsh (1973) tarafından ortaya konmuş ve daha sonra birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Bunun yanında, Şekil 3b'den, bağırsız

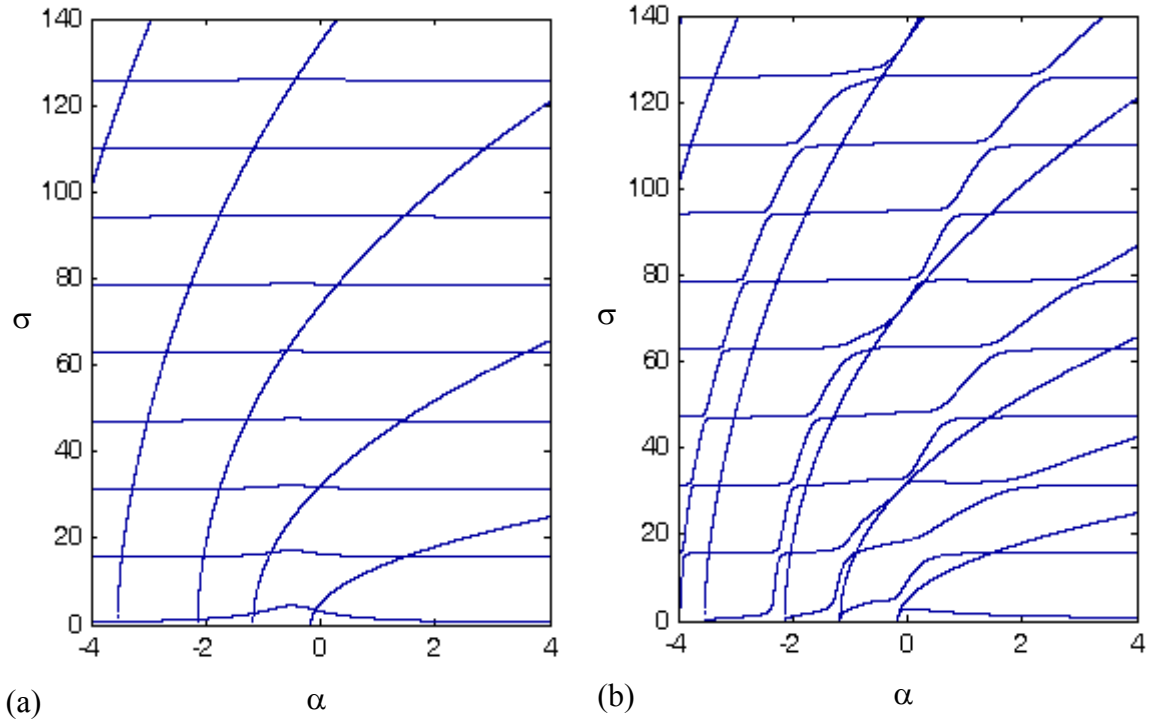
ve bağlaşıklık pala frekanslarının aynı noktada sıfırlandığı yani bağlaşıklığın burkulma koşullarında bir değişikliğe neden olmadığı görülmektedir.

Şekil 4'te, birbirleriyle özdeş kademelere sahip, her bir kademenin milin sol ucundan $a_i = \frac{\ell_0}{r+1} \cdot i$ uzaklığına yerleştirildiği, $\mu=5$, $\alpha_i=0.5$, $\gamma_i=0.5$, $\Delta_i=5$, $\eta_i=1$; $i=1,2,\dots,r$ şeklinde tanımlı çok kademeli bir rotor-pala sistemi ele alınmış ve $r=3$ için özfrekansların boyutsuz dönme hızı β ile değişimine ilişkin sonuçlar verilmiştir. Şekil 4a, Denklem 21 ve 22'den hesaplanmış bağırsız frekansları göstermektedir. Yatay hatlar boyutsuz dönme hızı β 'dan etkilenmeyen mil burulma frekanslarıdır. Disk ve palaların eylemsizliğinden dolayı milin disklerle olan bağlantı noktaları, yüksek frekanslarda hareketsiz kalma eğilimine gireceğinden, yüksek modlarda milin, her birinin boyu $\ell_0/(r+1)$ olan, $\sigma_q=q(r+1)\mu\pi$; $q=1,2,\dots$ frekanslarına sahip r adet bağlı-bağlı ve $\sigma_q=(q-0.5)(r+1)\mu\pi$; $q=1,2,\dots$ frekanslarına sahip bir adet bağlı-serbest burulma çubuğundan ibretmiş gibi davranması beklenir. Nitekim Şek. 4a'daki mil burulma frekanslarının bu beklentiye uyduğu görülmektedir.

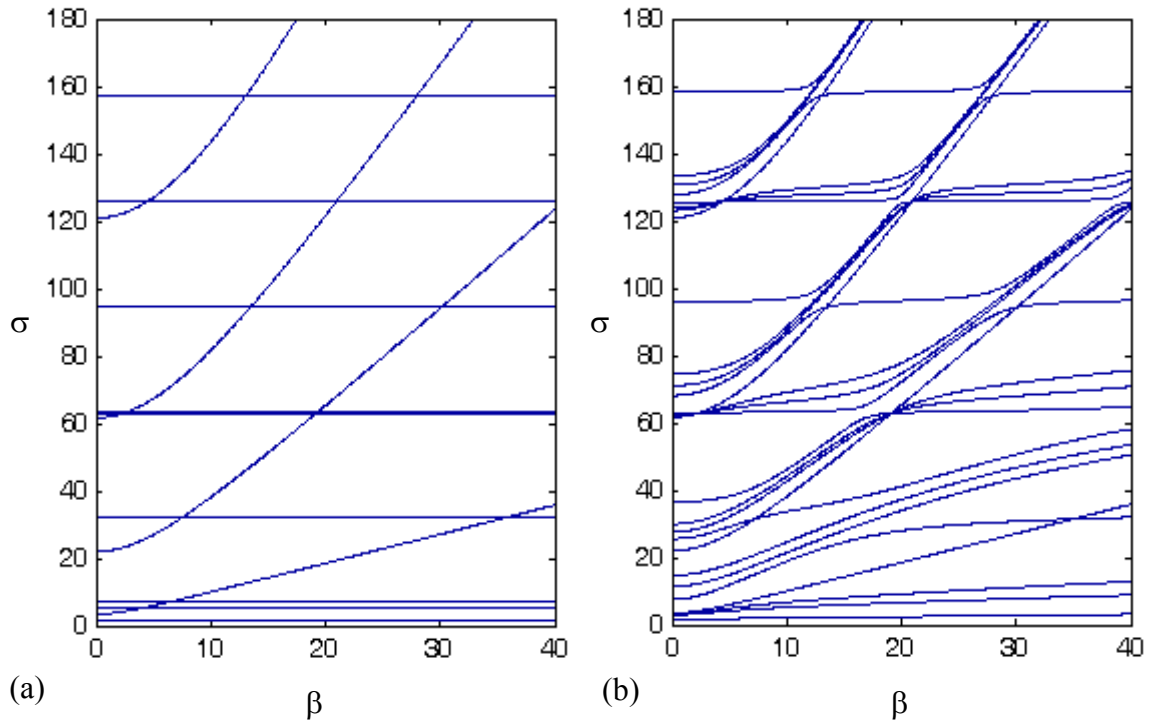
Şekil 4b ise, Denklem 20'den hesaplanmış bağlaşıklık analiz sonuçlarını göstermektedir. Bu şekille ilgili olarak şu belirlemeler yapılabilir:) Bağlaşıklık frekanslarla bir arada görülen bağırsız pala frekansları, çok palalı ($k \neq 1$) ve r adet özdeş i kademededen oluşan bu sistemde $r(k-1)$ katlıdır. ii) Her kademededen yalnızca bir pala eğilme frekansı mil burulma frekanslarıyla bağlaşıkmakta ve r adet frekans ilgili bağırsız eğilme frekansı yakınında toplanarak ona paralel ilerlemektedir. iii) bağlaşıklığın etkisiyle mil burulma ve pala eğilme frekansları iç içe geçmekte ve frekansların geometrik yerlerinde ciddi sapmalar ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak, bağlaşıklık analiz sonuçlarıyla bağırsız analiz sonuçları arasında çok ciddi farklar bulunmaktadır.

Sonuçlar

Bu çalışmada, tek ve çok kademeli rotor-pala sistemlerinde, mil burulma ve pala eğilme bağlaşıklık titreşimleri incelenmiştir. Matematiksel mo-



Şekil 3. Özfrekansların boyutsuz disk yarıçapı α ile değişimi
($\beta=10, \gamma=0.5, \Delta=5, \mu=5$; a, bağımsız; b, bağlaşık)



Şekil 4. Özfrekansların boyutsuz hız β ile değişimi
(3 özdeş kademeli sistem; a, bağımsız; b, bağlaşık)

delin oluşturulmasında sentetik, çok eksen takımlı ve karma bir yöntem önerilip kullanılmıştır. Yöntem, ele alınan sistemin nispeten düşük serbestlik dereceli bir modelle başarılı biçimde temsil edilmesini sağlamış ve etkili olmuştur.

İncelenen rotor-pala sistemlerinde palaların bir-biriyle özdeş oluşu, ilgili özdeğer analizi probleminin analitik olarak geliştirilerek, boyutunun mevcut pala sayısından bağımsız hale getirilmesini sağlamıştır. Problem iki farklı mod şekli sınıfına karşılık gelen ve rijid mil modları alt problemi ile mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık modları alt problemi adı verilen iki alt probleme ayrılmıştır. Rijid mil modları, milin bir rijid cisim gibi davrandığı modlar olup, mildeki burulma esnekliği dikkate alınmaksızın yapılacak bir pala titreşim analizinden bulunacak sonuca karşılık gelmektedirler. Mil ile pala titreşimleri arasındaki bağlaşıklık etkileri ise, asıl, mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık modlarında görülmektedir. Bu modlarda mil burulma frekansları ile pala eğilme frekansları arasında ciddi özdeğer geometrik yer sapması olayları oluşmakta, bu da bağlaşıklığı dikkate almadan yapılacak hesap sonuçlarından önemli sapmalara neden olmaktadır. Bu nedenle, bağlaşıklık etkilerini dikkate almayan modellerle rotor-pala sistemlerinin titreşim karakteristiklerinin hatasız olarak öngörülebilmesinin olanaksız olduğu; bu tür modeller yardımıyla bulunan sonuçlara güvenilmemesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

Kaynaklar

Bladh, R., Pierre, C., Castanier, M.P. ve Kruse, M.J., (2002). Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modelling, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **124**, 311-324.

Bulut, G., (2008). Elastik rotor-pala sistemlerinin titreşimleri, *Doktora tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Chatelet, E., D'Ambrosio, F. ve Jacquet-Richardet G., (2005). Toward global modelling approaches for dynamic analysis of rotating assemblies of

turbomachines, *Journal of Sound and Vibration*, **282**, 163-178.

Chun, S.B. ve Lee, C.W., (1996). Vibration analysis of shaft-bladed disk system by using substructure synthesis and assumed modes method, *Journal of Sound and Vibration*, **189**, 5, 587-608.

Crawley, E.F., Ducharme, E.H. ve Mokadam, D.R. (1986). Analytical and experimental investigation of the coupled bladed disk/shaft whirl of a cantilevered turbofan, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **108**, 567-576.

Ewins, D.J., (1973). Vibration characteristics of bladed disc assemblies, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **15**, 3, 165-186.

Huang, S.C. ve Ho, K.B., (1996). Coupled shaft-torsion and blade-bending vibrations of a rotating shaft-disk-blade unit, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **118**, 100-106.

Loewy, R.G. ve Khader, N., (1984). Structural dynamics of rotating bladed-disk assemblies coupled with flexible shaft motions, *AIAA Journal*, **22**, 9, 1319-1327.

Mostaghel, N. ve Tadjbakhsh, I., (1973). Buckling of rotating rods and plates, *International Journal of Mechanical Science*, **15**, 429-434.

Okabe, A., Otawara, Y., Kaneko, R., Matsushita, O. ve Namura, K., (1991). An equivalent reduced modelling method and its application to shaft-blade coupled torsional vibration analysis of a turbine-generator set, *Journal of Power and Energy*, **205**, 173-181.

Srinivasan, A.V., (1997). Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **119**, 743-775.

Tsai, G.C., (2004). Rotating vibration behavior of turbine blades with different groups of blades, *Journal of Sound and Vibration*, **271**, 547-575.

Turhan, Ö. ve Bulut, G., (2005). Tek kademeli rotor-pala sistemlerinde mil burulma-pala eğilme bağlaşıklık titreşimleri, 12. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Kayseri, 9-11 Haziran.

Turhan, Ö. ve Bulut, G., (2005). Coupling effects between shaft-torsion and blade-bending vibrations in rotor blade systems, The Seventh International Conference On Vibration Problems, Şile, İstanbul.

Turhan, Ö. ve Bulut, G., (2006). Linearly coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in multi-stage rotor-blade systems, *Journal of Sound and Vibration*, **296**, 292-318.