itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:1, Sayı:2, 75-87
Aralık 2002

Skaler dalgaların silindirik horndan ışımasının incelenmesi

Bahattin TÜRETKEN*, Alinur BÜYÜKAKSOY, Ercan TOPUZ

İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada silindirik bir horn yayıcıdan akustik dalgaların kırınımı incelenmiştir. Horn yayıcının duvarları rijid olduğu varsayılmıştır. Işınan uzak alan ifadesi Wiener-Hopf (WH) Tekniği kullanılarak çözülmüş ve sonuçta iki adet kuple integral denklem elde edilmiştir. Bu denklemler iterasyon metoduyla çözülmüş ve alan ifadesi bulunmuştur. Hornun dalga kılavuzu ve açıklık kısmında alan ifadesi sonsuz terimden oluşan Dini serileriyle ifade edilmiştir. WH denklemine faktorizasyon ve dekompozisyon tekniklerinin uygulanması ile Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümü sonsuz bilinmeyenli, sonsuz boyutlu bir cebirsel lineer denklemin çözümüne indirgenmiştir. Analitik olarak elde edilen ışınan ifadesi sayısal olarak incelenmiş ve değişik türden parametrelerin kırınan alana etkisi çıkarılmıştır.
***Anahtar Kelimeler**: Wiener-Hopf (WH) tekniği, silindirik horn, elektromagnetik saçılma.*

Analysis of the radiation of scalar waves from a rigid cylindrical horn

Abstract

In the recent years, scattering problems have been extensively studied in the literature because of their importance in radiator analysis, studies and other microwave and acoustic applications. In the present work, the radiation of the acoustic waves in a circular waveguide horn formed by flaring out a circular waveguide is analyzed rigorously through the Wiener-Hopf (WH) Technique. It is assumed that the walls of the circular horn are rigid. The solution is obtained by modification of the Wiener-Hopf technique which resulted into infinite systems of linear algebraic equations. These equations were truncated and solved numerically.The advantage of the WH Technique over other methods is that it is rigorous in the sense that the edge condition is explicitly incorporated in the analysis and that it has the potential of providing accurate and reliable results over broad frequency ranges. Furthermore, contrary to some numerical techniques, which are efficient only when the problem involves finite boundaries of limited length, the WH method does not sufer from such restrictions. Numerical solutions and the experimental application of this study are obtained for various values of the problem. The parameters and the effects of these parameters on the diffraction phenomenon are investigated.
***Keywords**: Wiener-Hopf (WH) Technique, cylindirical horn, electromagnetic scattering.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Bahattin Türetken. bturetken@yahoo.com; Tel: (262) 648 12 32.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Elektrik Elektronik Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Skaler dalgaların silindirik horndan ışımasının incelenmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 17.05.2002 tarihinde dergiye ulaşmış, 25.09.2002 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 28.02.2003 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

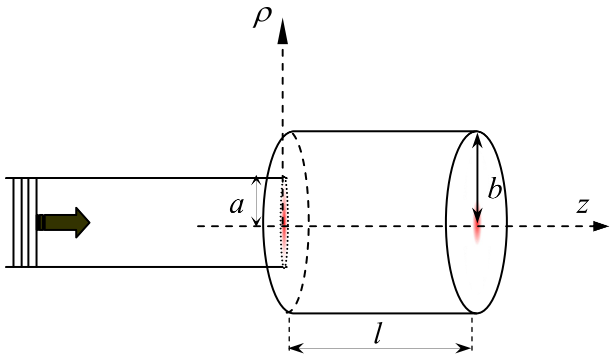
Son yıllarda silindirik dalga kılavuzlarının ışıma karekteristikleri önemli bir araştırma konusu olmuştur. Yarı sonsuz rijid bir borudan ışıyan dalgaların analitik çözümü Levine ve Schwinger (1948) tarafından elde edilmiştir. Sonra Ando (1969) aynı problemi boru duvarlarının belirli bir kalınlığa sahip olduğu durumda incelemiştir. Rawlins (1978) iç yüzeyleri akustik yutucu malzemeyle kaplı rigid silindirik bir kanaldan akustik dalgaların ışımasını ele almıştır. Daha sonra Büyükaksoy ve Polat (1998), Ando (1969) tarafından verilen problemin iç ve dışta empedans yüzeyleri olduğu durumda incelemişlerdir.

Bu çalışmada silindirik rijid bir horn yayıcıdan akustik (skaler) dalgaların ışıması incelenmiştir. Işınan uzak alan ifadesi Wiener-Hopf (WH) Tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Hornun dalga kılavuzu ve açıklık kısmında alan ifadesi sonsuz terimden oluşan Dini serileriyle ifade edilmiştir. WH denklemine faktorizasyon ve dekompozisyon tekniklerinin uygulanması ile Modifiye Wiener-Hopf (MWH) denkleminin çözümü sonsuz bilinmeyenli, sonsuz boyutlu üç adet cebirsel lineer denklemin çözümüne indirgenmiştir. Bu problemin incelemesi kendi başına önem taşıdığı gibi (Türetken v. diğ., 2002) buradan elde edilen bilgi birikimi ve deneyimin elektromagnetik dalgaların silindirik horn antenden ışımasının incelenmesi probleminin çözümüne de katkı sağlayacaktır. Analitik olarak elde edilen ışınan alan ifadesi sayısal olarak incelenmiştir. Değişik türden parametrelerin ışınan alana etkisi araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar ile Ando (1968) tarafından verilen deneysel sonuçlar arasındaki benzerlik gösterilmiştir. Zaman faktörü e^{-iwt} olarak kabul edilmiş ve hiçbir ifadede gösterilmemiştir.

Problemin analizi

(ρ,ϕ,z) silindirik koordinatları göstermek üzere $\rho=a$ silindiri içinde yayılan skaler bir dalganın Şekil 1'de gösterilen silindirik horn yayıcıdan ışımasını ele alalım. Problemin geometrisinin simetrik ve yayılan dalganın skaler bir dalga olması, saçılan alanın her yerde ϕ'den bağımsız olduğunu gösterir. Hornun tüm yüzeylerinin rijid olduğu varsayılmaktadır. Problemin analizini kolayca yorumlayabilmek için toplam alanın bileşenlerini alt bölgelerde ayrı ayrı ifade etmek uygun olacaktır:

$$u^T(\rho,z)=\begin{cases} u_1(\rho,z)\ ; \rho>b\ , z\in(-\infty,\infty) \\ u_2(\rho,z)\ ;\ \rho\in(a,b),\ z<0 \\ u_3(\rho,z)+u^i(\rho,z);\ \rho\in(0,a), z<0 \\ u_4(\rho,z)\ ; \rho\in(0,b),\ z\in(0,l) \\ u_5(\rho,z)\ ; \rho\in(0,b),\ z>l \end{cases} \qquad (1)$$



Şekil 1. Silindirik horn

Burada, $u^i(\rho,z)$ dalga kılavuzu içinde soldan sağa yayılan skaler dalgayı yani uyarmayı göstermekte olup:

$$u^i(\rho,z)=e^{ikz} \qquad (2)$$

gibidir, ve $k=\omega/c$ dalga sayısını göstermektedir. Analizin matematiksel olarak kolay yorumlanabilmesi için k'nın küçükte olsa sıfırdan farklı (pozitif) bir sanal kısma sahip olduğunu ve $k=k_r+k_i$ şeklinde yazılabileceğini varsayacağız. Bu halde analiz sonunda elde ettiğimiz sonuçlarda $k_i\to 0$ yapıldığında boş uzaya ilişkin sonuçlar elde edilmiş olur.

Problemin simetrisi nedeniyle çeşitli bölgelerde yazılan $u_j(\rho,z),\ j=1-5$ alan ifadelerinin sağladığı Helmholtz denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)u_j(\rho,z)=0 \qquad (3)$$

$$j=1\text{-}5$$

Çeşitli bölgelerdeki alanların sağlayacağı sınır ve süreklilik koşulları aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u_1(b,z)=0 \quad ; z\in(0,l) \tag{4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u_2(a,z)=0 \quad ; \quad z<0 \tag{4b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u_3(a\ ,z)=0 \quad ; \quad z\in(-\infty,0) \tag{4c}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u_4(b\ ,z)=0 \quad ; \quad z\in(0,l) \tag{4d}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(\rho,0)=0 \quad ; \quad \rho\in(a,b) \tag{4e}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial z}(\rho,0)=0 \quad ; \quad \rho\in(a,b) \tag{4f}$$

$$u_1(b,z)=u_2(b,z) \quad ; \quad z<0 \tag{4g}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\rho}(b,z)=\frac{\partial u_2}{\partial\rho}(b,z) \quad ; \quad z<0 \tag{4h}$$

$$u_1(b,z)=u_5(b,z) \quad ; \quad z>l \tag{4i}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\rho}(b,z)=\frac{\partial u_5}{\partial\rho}(b,z) \quad ; \quad z>l \tag{4j}$$

$$u_3(\rho,0)+u^i(0)=u_4(\rho,0) \quad ; \quad \rho\in(0,a) \tag{4k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_3(\rho,0)+\frac{\partial}{\partial z}u^i(0)=\frac{\partial}{\partial z}u_4(\rho,0) \ ; \rho\in(0,a) \tag{4l}$$

$$u_4(\rho,l)=u_5(\rho,l) \quad ; \quad \rho\in(0,b) \tag{4m}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial z}(\rho,l)=\frac{\partial u_5}{\partial z}(\rho,l) \quad ; \quad \rho\in(0,b) \tag{4n}$$

Toplam alanın çok uzaklara gidildikçe asimtotik davranışı, radyasyon koşulu uyarınca:

$$u\approx\frac{e^{ikr}}{r} \quad , \quad r=\sqrt{\rho^2+z^2}\ \to\infty \tag{5}$$

biçimindedir. Ayrıca alanın çözümünün tekliğini garantiliyebilmek için $\rho=a$, $z=0$ ve $\rho=b$, $z=l$ ayrıtlarında alanın davranışını bilmek gerekmektedir. Bu kenarlara ilişkin ayrıt koşulları:

$$u^T(b+0,z)=\mathrm{O}(1), \qquad \mathrm{z}\to-0 \tag{6a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u^T(b+0,z)=\mathrm{O}(z^{-1/3}), \ \mathrm{z}\to-0 \tag{6b}$$

$$u^T(b,z)=sabit, \qquad \mathrm{z}\to l+0 \tag{6c}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u^T(b,z)=O(z-l)^{-1/2}), \quad \mathrm{z}\to l+0 \tag{6d}$$

şeklindedir.

$\rho>b$ ve $z\in(-\infty,\infty)$ bölgesinde $u_1(\rho,z)$ fonksiyonu silindirik koordinatlarda (3) ile verilmiş Helmholtz denklemini sağlar. Bu denklemi $e^{i\alpha z}$ çarpıp ve $z=-\infty$ dan ∞ ’ a kadar entegre edersek:

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho})+K(\alpha)\right)F(\rho,\alpha)=0 \tag{7a}$$

buluruz. Burada:

$$F\ (\rho,\alpha)=F^-(\rho,\alpha)+F_1(\rho,\alpha)+e^{i\alpha l}F^+(\rho,\alpha) \tag{7b}$$

$$F^-(\rho,\alpha)=\int_{-\infty}^{0}u_1(\rho,z)e^{i\alpha z}dz \tag{7c}$$

$$F_1(\rho,\alpha)=\int_{0}^{l}u_1(\rho,z)e^{i\alpha z}dz \tag{7d}$$

$$F^+(\rho,\alpha)=\int_{l}^{\infty}u_1(\rho,z)e^{i\alpha(z-l)}dz \tag{7e}$$

$$K(\alpha)=\sqrt{k^2-\alpha^2} \tag{7f}$$

olarak tanımlanır. (7a) ifadesinin $\rho > b$ için radyasyon koşulunu sağlayan çözümü:

$$F(\rho,\alpha) = -A(\alpha)\frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \tag{8a}$$

şeklindedir. Burada $H_n^{(1)}$ n. dereceden birinci tip Hankel fonksiyonunu göstermek üzere:

$$H_n^{(1)} = J_n + iY_n \tag{8b}$$

olarak tanımlanmıştır. $A(\alpha)$ ise sonradan tanımlanacak spektral katsayıyı ifade etmektedir. (7f)'de açık ifadesi verilen $K(\alpha)$ karekök ifadesi kompleks α - düzleminde $K(0) = k$ olacak biçimde tanımlanmıştır. Kompleks düzlemde Fourier integralinin bilinen analitik özellikleri nedeniyle $F^-(\rho,\alpha)$ fonksiyonu $\mathrm{Im}(\alpha) < \mathrm{Im}(k)$ yarı düzleminde, $F^+(\rho,\alpha)$ fonksiyonu da $\mathrm{Im}(\alpha) > \mathrm{Im}(-k)$ yarı düzleminde regüler fonksiyonlardır. (4a)'da verilen sınır koşuluna ait ifadenin Fourier dönüşümü alınırsa:

$$\dot{F}_1(b,\alpha) = 0 \tag{9}$$

elde edilir. (9) ifadesinde (.) ρ ' ya göre türevi göstermektedir. (8a) ifadesinde her iki tarafın ρ ' ya göre türevi alınıp ve $\rho = b$ yazılır, (7b), (9) ve $\dot{H}_0^{(1)}(x) = H_1^{(1)}(x)$ 'den yararlanılırsa $A(\alpha)$ spektral katsayısı:

$$A(\alpha) = \dot{F}^-(b,\alpha) + e^{i\alpha l}\dot{F}^+(b,\alpha) \tag{10}$$

olarak elde edilir. Bu ifade gözönüne alınarak (8a) ifadesi yeniden düzenlenirse:

$$F^-(b,\alpha) + e^{i\alpha l}F^+(b,\alpha) = -F_1(b,\alpha) \\ -\left[\dot{F}^-(b,\alpha) + e^{i\alpha l}\dot{F}^+(b,\alpha)\right]\frac{H_0^{(1)}(Kb)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \tag{11}$$

ifadesi elde edilir.

$a < \rho < b$ ve z<0 bölgesinde $u_2(\rho,z)$, $0 < \rho < b$ ve z>l bölgesinde ise $u_5(\rho,z)$ fonksiyonları için yazılacak Helmholtz denklemleri de α -domenine dönüştürülerek:

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho}) + K^2(\alpha)\right)G^-(\rho,\alpha) = i\alpha f(\rho) \tag{12a}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho}) + K^2(\alpha)\right)G^+(\rho,\alpha) = g(\rho) - i\alpha h(\rho) \tag{12b}$$

elde edilir ve burada:

$$G^-(\rho,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} u_2(\rho,z)e^{i\alpha z}dz \tag{12c}$$

$$G^+(\rho,\alpha) = \int_{l}^{\infty} u_5(\rho,z)e^{i\alpha(z-l)}dz \tag{12d}$$

$$f(\rho) = u_2(\rho,0)\ ,\ g(\rho) = \frac{\partial}{\partial z}u_5(\rho,l), \\ h(\rho) = u_5(\rho,l) \tag{12e}$$

şeklinde tanımlıdır. (12c) ve (12d)'de tanımlanan G^- ve G^+ fonksiyonları sırasıyla $\mathrm{Im}(\alpha) < \mathrm{Im}(k)$ ve $\mathrm{Im}(\alpha) > \mathrm{Im}(-k)$ yarı düzlemlerinde regüler fonksiyonlardır. (12a) ve (12b) denklemlerinin çözümleri:

$$G^-(\rho,\alpha) = \\ \frac{1}{M(\alpha)}\left\{\begin{array}{l} \frac{\dot{F}^-(b,\alpha)}{K(\alpha)} \\ \times\left[J_0(K\rho)Y_1(Ka) - Y_0(K\rho)J_1(Ka)\right] \\ + i\alpha\int_a^b f(t)Q_1(t,\rho,\alpha)tdt \end{array}\right\} \tag{13a}$$

$$G^+(\rho,\alpha) = \\ \frac{1}{J_1(Kb)}\left\{\begin{array}{l} -\frac{\dot{F}^+(b,\alpha)}{K(\alpha)}J_0(K\rho) \\ + \int_0^b\left[g(t) - i\alpha h(t)\right]Q_2(t,\rho,\alpha)tdt \end{array}\right\} \tag{13b}$$

şeklindedir ve burada:

$$Q_1(\rho,t,\alpha)=$$
$$\frac{\pi}{2}\times\begin{cases}\left\{\begin{matrix}[J_0(K\rho)Y_1(Ka)-J_1(Ka)Y_0(K\rho)]\\ \times[J_0(Kt)Y_1(Kb)-J_1(Kb)Y_0(Kt)]\end{matrix}\right\}, a\le\rho\le t\\ \left\{\begin{matrix}[J_0(K\rho)Y_1(Kb)-J_1(Kb)Y_0(K\rho)]\\ \times[J_0(Kt)Y_1(Ka)-J_1(Ka)Y_0(Kt)]\end{matrix}\right\}, t\le\rho\le b\end{cases} \quad (13c)$$

$$Q_2(\rho,t,\alpha)=$$
$$\frac{\pi}{2}\times\begin{cases}\left\{\begin{matrix}J_0(K\rho)\\ \times[J_1(Kb)Y_0(Kt)-J_0(Kt)Y_1(Kb)]\end{matrix}\right\}, 0\le\rho\le t\\ \left\{\begin{matrix}J_0(Kt)\\ \times[J_1(Kb)Y_0(K\rho)-J_0(K\rho)Y_1(Kb)]\end{matrix}\right\}, t\le\rho\le b\end{cases} \quad (13d)$$

$$M(\alpha)=[J_1(Ka)Y_1(Kb)-J_1(Kb)Y_1(Ka)] \quad (13e)$$

şeklindedir.

f,g,h ' lar ise (12e) ile verilmiştir. (13a) ve (13b)' nin sol tarafları $\mathrm{Im}(\alpha)<\mathrm{Im}(k)$ alt ve $\mathrm{Im}(\alpha)>\mathrm{Im}(-k)$ ve üst yarı düzlemlerinde regüler fonkiyonlardır. Bu denklemlerin sağ tarafları da aynı özelliği göstereceğinden $\alpha=-\delta_m$, $\mathrm{Im}(\delta_m)>\mathrm{Im}\ (k)$ ve $\alpha=\alpha_m$, $\mathrm{Im}(\alpha_m)>\mathrm{Im}(k)$ oluşan kutuplar kaldırılmalıdır. Bunun için bu kutuplardaki rezidüleri sıfır yapmak gereklidir:

$$J_1(Z_m a)Y_1(Z_m b)-J_1(Z_m b)Y_1(Z_m a)=0\ , \quad Z_m=K(-\delta_m),\quad m=0,1,2,... \quad (14a)$$

$$J_1(\xi_m)=0\,,\ \alpha_m=\sqrt{k^2-\left(\frac{\xi_m}{b}\right)^2}\,, \quad (14b)$$
$$m=0,1,2,...$$

böylece:

$$\dot F^-(b,-\delta_m)=-\frac{i\pi}{2}\delta_m Z_m\frac{J_1(Z_m b)}{J_1(Z_m a)}$$
$$\times\int_a^b f(t)[J_1(Z_m a)Y_0(Z_m t)-J_0(Z_m t)Y_1(Z_m a)]tdt \quad (15a)$$
$$m=0,1,2,...$$

$$\dot F^+(b,\alpha_m)=$$
$$-\frac{\pi}{2}\xi_m Y_1(\xi_m)\int_0^b[g(t)-i\alpha h(t)]J_0(\frac{\xi_m}{b}t)\,tdt \quad (15b)$$
$$m\neq 0$$

$$\dot F_+(b,k)=\frac{1}{b}\int_0^b[g(t)-ikh(t)]tdt\ ,\ \mathrm{m}=0 \quad (15c)$$

elde edilir. (4g) ve (4i) süreklilik şartları Fourier dönüşümü alınarak düzenlenirse:

$$\begin{aligned}&F^-(b,\alpha)+e^{i\alpha l}F^+(b,\alpha)\\&=G^-(b,\alpha)+e^{i\alpha l}G^+(b,\alpha)\end{aligned} \quad (16)$$

elde edilir. (15a-b)'de verilen $f(t)$, $g(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonları dik fonksiyonlarını cinsinden serilere açarsak (Sneddon, 1972):

$$f(t)=$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}f_m[J_1(Z_m a)Y_0(Z_m t)-Y_1(Z_m a)J_0(Z_m t)] \quad (17a)$$

$$h(t)=\sum_{m=0}^{\infty}h_m J_0(\frac{\xi_m}{b}t) \quad (17b)$$

$$g(t)=\sum_{m=0}^{\infty}g_m J_0(\frac{\xi_m}{b}t) \quad (17c)$$

olur. Burada f_m ,g_m ve h_m sırasıyla (Watson, 1958):

$$f_m=\frac{\pi^2}{2}\frac{J_1^2(Z_m b)Z_m^2}{J_1^2(Z_m a)-J_1^2(Z_m b)}$$
$$\times\int_a^b f(t)[J_1(Z_m a)Y_0(Z_m t)-Y_1(Z_m a)J_0(Z_m t)]tdt \quad (18a)$$

$$h_m=\frac{2}{b^2J_0^2(\xi_m)}\int_0^b h(t)J_0(\frac{\xi_m}{b}t)tdt \quad (18b)$$
$$m\neq 0$$

$$h_0=\frac{2}{b^2}\int_0^b h(t)tdt \quad (18c)$$
$$m=0$$

$$g_m = \frac{2}{b^2 J_0^2(\xi_m)} \int_0^b g(t) J_0(\frac{\xi_m}{b} t) t dt \qquad (18d)$$

$m \neq 0$

$$g_0 = \frac{2}{b^2} \int_0^b g(t) t dt \qquad (18e)$$

$m = 0$

olarak bulunur. (16), (17a-c) ve (18a-e) ifadelerini kullanarak ara işlemler gözardı edilirse $\mathrm{Im}(-k) < \mathrm{Im}(\alpha) < \mathrm{Im}(k)$ bandında geçerli olan Üçüncü tip Modifiye Wiener-Hopf Denklemi:

$$-\frac{b}{2} F_1(b,\alpha) + \frac{\dot{F}^-(b,\alpha)}{K^2(\alpha)} L(\alpha)$$
$$+\frac{e^{i\alpha l} \dot{F}^+(b,\alpha)}{K^2(\alpha) N(\alpha)}$$
$$= \frac{i\alpha}{\pi} \sum_{m0}^{\infty} \frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \frac{1}{\delta_m^2 - \alpha^2} \frac{f_m}{Z_m} \qquad (19a)$$
$$+ e^{i\alpha l} \frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [g_m - i\alpha h_m]$$

$$N(\alpha) = \pi i J_1(Kb) H_1^{(1)}(Kb) \qquad (19b)$$

$$L(\alpha) = \frac{H_1^{(1)}(Ka)}{\pi H_1^{(1)}(Kb) M(\alpha)} \qquad (19c)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Modifiye Wiener-Hopf denkleminin yaklaşık çözümü

Wiener-Hopf denklemini çözmek için her şeyden önce $N(\alpha)$ ve $L(\alpha)$ çekirdek fonksiyonlarını Wiener-Hopf anlamında, yani:

$$N(\alpha) = N^+(\alpha) N^-(\alpha) \qquad (20a)$$

$$L(\alpha) = L^+(\alpha) L^-(\alpha) \qquad (20b)$$

şeklinde çarpanlarına ayrıştırmak gerekir. Burada $N^+(\alpha)$, $L^+(\alpha)$ ve $N^-(\alpha) = N^+(-\alpha)$, $L^-(\alpha) = L^+(-\alpha)$ sırasıyla $\mathrm{Im}(\alpha) > \mathrm{Im}(-k)$ ve $\mathrm{Im}(\alpha) < \mathrm{Im}(k)$ yarı-düzlemlerinde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır. $N^+(\alpha)$ ve $L^+(\alpha)$ ' nin açık ifadeleri:

$$N^+(\alpha) = \left[\pi i J_1(kb) H_1^{(1)}(kb)\right]^{1/2}$$
$$\times \exp\left\{ i \frac{\alpha b}{\pi} \left[1 - C + \ln(\frac{2\pi}{kb}) + i\frac{\pi}{2} \right] - i\frac{kb}{2} \right\}$$
$$\times \exp\left\{ \frac{K(\alpha) b}{\pi} \ln(\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k}) + q_1(\alpha) \right\} \qquad (21a)$$
$$\times \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}) \exp(\frac{i\alpha b}{m\pi})$$

$$L^+(\alpha) =$$
$$\left[\frac{H_1^{(1)}(ka)}{\pi H_1^{(1)}(kb)\left[J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)\right]} \right]^{1/2}$$
$$\times \exp\left[\begin{array}{l} \dfrac{ik(b-a)}{2} \\ -\dfrac{(k^2-\alpha^2)^{1/2}(b-a)}{\pi} \ln \dfrac{\alpha + i(k^2-\alpha^2)^{1/2}}{k} \\ + q_2(\alpha) - q_1(\alpha) \end{array} \right]$$
$$\times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}) e^{-\alpha/\gamma_m}}$$
$$\exp(\frac{\alpha}{\pi i}(b-a)\left[1 - C + \ln(\frac{2\pi i}{k(b-a)})\right] \qquad (21b)$$

şeklinde olup,burada $C = 0.57721...$ ile verilmiş Euler sabitini, $q_1(\alpha)$ ve $q_2(\alpha)$ 'da

$$q_1(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right]$$
$$\times \ln(1 + \frac{\alpha b}{\left[(kb)^2 - x^2\right]^{1/2}}) dx \qquad (21c)$$

$$q_2(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right]$$
$$\times \ln(1 + \frac{\alpha a}{\left[(ka)^2 - x^2\right]^{1/2}}) dx \qquad (21d)$$

şeklindeki integraller ile tanımlanmış fonksiyonları göstermektedir. Bu ifadelerde gözüken P, $x = ka$ ve $x = kb$ tekilliklerindeki Cauchy asal değerini göstermektedir. Kendi regülerlik bölgelerinde $|\alpha| \to \infty$ yapıldığında:

$$N^{\pm}(\alpha) \approx (\pm\alpha)^{-1/2} \tag{21e}$$

$$L^{\pm}(\alpha) \approx (\pm\alpha)^{1/2} \tag{21f}$$

şeklindeki gibi davranış gösterirler. Liouville teoremi ile birlikte faktorizasyon ve dekompozisyon işlemleri (19a) ile verilen MWH denklemine uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{F}^{+}(b,\alpha)}{(k+\alpha)N^{+}(\alpha)} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{+}} \frac{\dot{F}^{-}(b,\tau)N^{-}(\tau)L^{-}(\tau)L^{+}(\tau)e^{-i\tau l}}{(k+\tau)(\tau-\alpha)}d\tau \\
&+ \frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)\left[g_m + i\alpha_m h_m\right](k+\alpha_m)N^{+}(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha+\alpha_m)} \\
&- \frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k+\delta_m}{\delta_m+\alpha} N^{+}(\delta_m)e^{i\delta_m l}
\end{aligned} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{F}^{-}(b,\alpha)L^{-}(\alpha)}{(k-\alpha)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{L^{-}} \frac{\dot{F}^{+}(b,\tau)e^{i\tau l}}{(k-\tau)N^{-}(\tau)N^{+}(\tau)L^{+}(\tau)(\tau-\alpha)}d\tau \\
&- \frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)\left[g_m - i\alpha_m h_m\right](k+\alpha_m)e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m(\alpha-\alpha_m)L^{+}(\alpha_m)} \\
&+ \frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k+\delta_m}{\delta_m-\alpha}\frac{1}{L^{+}(\delta_m)}
\end{aligned} \tag{22b}$$

$$S_m = \frac{f_m}{Z_m}\frac{J_1(Z_m a)}{J_1(Z_m b)} \tag{22c}$$

şeklinde ikinci dereceden Fredholm integral denklem takımı elde edilmiş olur. kl yeterince büyük olduğunda, bu denklemlerin sağ tarafında gözüken serbest terimler birinci mertebeden çözümlere karşı gelirler. İkinci (üçüncü...) mertebe çözümler, birinci (ikinci,...) mertebeden çözümleri (22a) ve (22b) denklemlerinin sağ taraflarında yerine konarak elde edilir ve:

$$\dot{F}^{-}(b,\alpha) = \dot{F}^{-(1)}(b,\alpha) + \dot{F}^{-(2)}(b,\alpha) + \dots\dots\dots \tag{23a}$$

$$\dot{F}^{+}(b,\alpha) = \dot{F}^{+(1)}(b,\alpha) + \dot{F}^{+(2)}(b,\alpha) + \dots\dots\dots \tag{23b}$$

yazılır. Birinci mertebe çözümler ilk ötelemeyle:

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{F}^{+(1)}(b,\alpha)}{(k+\alpha)N^{+}(\alpha)} \\
&= \frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)\left[g_m + i\alpha_m h_m\right](k+\alpha_m)N^{+}(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha+\alpha_m)} \\
&- \frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k+\delta_m}{\delta_m+\alpha} N^{+}(\delta_m)e^{i\delta_m l}
\end{aligned} \tag{23c}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{F}^{-(1)}(b,\alpha)L^{-}(\alpha)}{(k-\alpha)} \\
&= -\frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)\left[g_m - i\alpha_m h_m\right](k+\alpha_m)e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m(\alpha-\alpha_m)L^{+}(\alpha_m)} \\
&+ \frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k+\delta_m}{\delta_m-\alpha}\frac{1}{L^{+}(\delta_m)}
\end{aligned} \tag{23d}$$

şeklinde olup, ikinci mertebe çözümler ise:

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{F}^{+(2)}(b,\alpha)}{(k+\alpha)N^{+}(\alpha)} \\
&= -\frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)\left[g_m - i\alpha_m h_m\right](k+\alpha_m)e^{i\alpha_m l}}{2\alpha_m L^{+}(\alpha_m)} I_1(\alpha) \\
&+ \frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} S_m \frac{k+\delta_m}{L^{+}(\delta_m)} I_2(\alpha)
\end{aligned} \tag{23e}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{F}^{-(2)}(b,\alpha)L^{-}(\alpha)}{(k-\alpha)} \\
&= \frac{b}{2}\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)\left[g_m + i\alpha_m h_m\right](k+\alpha_m)N^{+}(\alpha_m)}{2\alpha_m} I_3(\alpha) \\
&- \frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} S_m (k+\delta_m)N^{+}(\delta_m)e^{i\delta_m l} I_4(\alpha)
\end{aligned} \tag{23f}$$

şeklindedir. Burada I_i i=1,2,3 gösterilen integral ifadeleri:

$$I_1(\alpha)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\frac{N^-(\tau)L(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau l}}{(k+\tau)(\tau-\alpha_m)L^-(\tau)}\frac{d\tau}{(\tau-\alpha)} \quad (24a)$$

$$I_2(\alpha)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\frac{N^-(\tau)L(\tau)(k-\tau)e^{-i\tau l}}{L^-(\tau)(\delta_m-\tau)(k+\tau)}\frac{d\tau}{(\tau-\alpha)} \quad (24b)$$

$$I_3(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-}\frac{N^+(\tau)(k+\tau)e^{i\tau l}}{(k-\tau)N(\tau)L^+(\tau)(\tau+\alpha_m)}\frac{d\tau}{(\tau-\alpha)} \quad (24c)$$

$$I_4(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-}\frac{N^+(\tau)(k+\tau)e^{i\tau l}}{(k-\tau)N(\tau)L^+(\tau)(\delta_m+\tau)(\tau-\alpha)}d\tau \quad (24d)$$

şeklindedir. (24a-d) ile verilen integral ifadelerin çözümleri sırasıyla aşağıda verilmektedir:

$$I_1(\alpha)=-(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)(k+\alpha_m)}e^{ikl}W_{-1/2}(-il(\alpha+k))+\frac{2k\pi b^2}{(a^2-b^2)}\frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k+\alpha)(k+\alpha_m)}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+\delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_n a)e^{i\delta_n l}}{(k-\delta_n)H_1^1(Z_n b)L^+(\delta_n)(\delta_n+\alpha_m)(\delta_n+\alpha)\dot{M}(-\delta_n)} \quad (24e)$$

$$I_2(\alpha)=(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)}\frac{e^{ikl}}{(k+\delta_n)}W_{-1/2}(-il(\alpha+k))-\frac{2k\pi b^2}{(a^2-b^2)}\frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k+\alpha)(k+\delta_m)}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+\delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_n a)e^{i\delta_n l}}{(\delta_m+\delta_n)(k-\delta_n)H_1^1(Z_n b)L^+(\delta_n)(\delta_n+\alpha)\dot{M}(-\delta_n)} \quad (24f)$$

$$I_3(\alpha)\approx(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)(\alpha_m+k)}e^{ikl}W_{-1/2}(il(\alpha-k))-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^+(\alpha_n)(k+\alpha_n)^2e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\alpha-\alpha_n)(\alpha_n+\alpha_m)L^+(\alpha_n)} \quad (24g)$$

$$I_4(\alpha)=(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)(\delta_m+k)}e^{ikl}W_{-1/2}(il(\alpha-k)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^+(\alpha_n)(k+\alpha_n)^2e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\alpha-\alpha_n)(\delta_n+\delta_m)L^+(\alpha_n)} \quad (24h)$$

$W_{-1/2}(\zeta)$ fonksiyonu Whittaker (1902)' de verilen $W_{-1/2,0}(\zeta)$ Whittekar fonksiyonu ile arasındaki bağıntı:

$$W_{-1/2}(\zeta)=\exp(\zeta/2)\varsigma^{-1/2}W_{-1/2,0}(\zeta) \quad (24i)$$

biçimindedir.

Dalgakılavuzu ve açıklık bölgesindeki alan ifadesi

$0<\rho<a$ ve z<0 bölgesinde saçılan alan $u_3(\rho,z)$ silindirik koordinatlarda yazılmış Helmholtz denklemini sağlar. Alanın çözümü:

$$u_3(\rho,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-j\beta_n z}J_0(\xi_n\frac{\rho}{a}) \quad (25a)$$

şeklindedir, burada β_n :

$$\beta_n=\sqrt{k^2-\left(\frac{\xi_n}{a}\right)^2} \quad (25b)$$

biçiminde tanımlanır. (25a,b)' deki ξ_n' ler (4c) uyarınca yazılan:

$$J_1(\xi_n)=0,\quad n=0,1,2,. \quad (25c)$$

birinci dereceden Bessel fonksiyonlarının kökleridir.

Benzer şekilde $0<\rho<b$ ve 0<z<l bölgesinde saçılan alan $u_4(\rho,z)$ silindirik koordinatlarda yazılmış Helmholtz denkleminin çözümü:

$$u_4(\rho,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n e^{j\alpha_n z}+c_n e^{-j\alpha_n z}\right)J_0(\xi_n \frac{\rho}{b}) \quad (25d)$$

şeklindedir, burada α_n :

$$\alpha_n=\sqrt{k^2-\left(\frac{\xi_n}{b}\right)^2} \quad (25e)$$

şeklinde ifade edilir.

(4j-m) sınır koşulları (12e) ile birlikte düşünülür ve ara işlemler gözardı edilirse:

$$k(a^2+b^2)b_0-k(b^2-a^2)c_0$$

$$+2kab\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-c_n)\frac{J_1(\frac{\xi_n a}{b})}{\xi_n}=2ka^2 \quad (26a)$$

$r=0$

(26a) ve (26b) denklem takımı elde edilmiş olur. $\dot{F}^+(b,\alpha)$ ve $\dot{F}^-(b,\alpha)$'nın yaklaşık çözümünü bulmak için, büyük argümanlarda $W_{-1/2}(\zeta)$ fonksiyonun asimtotik davranışını:

$$W_{-1/2}(\zeta)\approx\frac{1}{\zeta} \quad (26c)$$

olarak almak uygun olacaktır. (23a)'da $\alpha=-\delta_1,-\delta_2,-\delta_3,......-\delta_N$ ve (23b)'de $\alpha=k,\alpha_1,\alpha_2,......\alpha_N$ değerleri ve (26a,b) ile birlikte $3(N+1)$ denklem elde ederiz. Bu denklemlerdeki bilinmeyen sayımız da *3(N+1)* dir. Bu denklemlerin çözümünden:

$\dot{F}^+(b,k),\dot{F}^+(b,\alpha_1),\dot{F}^+(b,\alpha_2),.......$ ve
$\dot{F}^-(b,-\delta_1),\dot{F}^-(b,-\delta_2),\dot{F}^-(b,-\delta_3),.......$'ler

kolaylıkla elde edilir.

$$\alpha_r(b_r-c_r)\frac{b^2}{2}J_0^2(\xi_r)+\frac{2}{b}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}(b_m+c_m)\xi_m J_1(\frac{\xi_m}{b}a)\\ \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\xi_r J_1(\frac{\xi_r}{b}a)}{\left[(\xi_r/b)^2-(\xi_n/a)^2\right]\left[(\xi_m/b)^2-(\xi_n/a)^2\right]}\end{array}\right\}+\frac{kba}{\xi_r}J_1(\frac{\xi_r}{b}a)\left[b_0+c_0\right] \quad (26b)$$

$$+2kb^2\sum_{m=1}^{\infty}(b_m+c_m)\frac{J_1(\frac{\xi_m}{b}a)J_1(\frac{\xi_r}{b}a)}{\xi_m\xi_r}=\frac{2kba}{\xi_r}J_1(\frac{\xi_r}{b}a) \quad r=1,2,3,...$$

$$\frac{\dot{F}^+(b,\alpha_r)}{(k+\alpha_r)N(\alpha_r)}=\frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)(k+\alpha_m)}{2\alpha_m}\left\{\frac{(g_m+i\alpha_m h_m)N^+(\alpha_m)}{(\alpha_r+\alpha_m)}-\frac{(g_m-i\alpha_m h_m)e^{i\alpha_m l}}{L^+(\alpha_m)}A_{rm}\right\}$$

$$-\frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}S_m(k+\delta_m)\left\{\frac{-B_{rm}}{L^+(\delta_m)}+\frac{N^+(\delta_m)e^{i\delta_m l}}{(\delta_m+\alpha_r)}\right\} \quad (27a)$$

$$\frac{\dot{F}^-(b,-\delta_r)L^-(-\delta_r)}{(k+\delta_r)}=\frac{b}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_0(\xi_m)(k+\alpha_m)}{2\alpha_m}\left\{(g_m+i\alpha_m h_m)N^+(\alpha_m)C_{rm}+\frac{(g_m-i\alpha_m h_m)e^{i\alpha_m l}}{(\alpha_m+\delta_r)L^+(\alpha_m)}\right\}$$

$$-\frac{i}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}S_m(k+\delta_m)\left\{N^+(\delta_m)e^{i\delta_m l}-\frac{1}{L^+(\delta_m)(\delta_m+\delta_r)}\right\} \quad (27b)$$

$$A_{rm}=\left\{-(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)(k+\alpha_m)}e^{ikl}W_{-1/2}(-il(\alpha_r+k))+\frac{2k\pi b^2}{(a^2-b^2)}\frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k+\alpha_r)(k+\alpha_m)}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+\delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_na)e^{i\delta_n l}}{(k-\delta_n)H_1^1(Z_nb)L^+(\delta_n)(\delta_n+\alpha_m)(\delta_n+\alpha_r)\dot{M}(-\delta_n)}\right\} \quad (27c)$$

$$B_{rm}=\left\{(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)}\frac{e^{ikl}}{(k+\delta_n)}W_{-1/2}(-il(\alpha_r+k))-\frac{2k\pi b^2}{(a^2-b^2)}\frac{N^+(k)e^{ikl}}{L^+(k)(k+\alpha_r)(k+\delta_m)}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+\delta_n)N^+(\delta_n)H_1^1(Z_na)e^{i\delta_n l}}{(\delta_m+\delta_n)(k-\delta_n)H_1^1(Z_nb)L^+(\delta_n)(\delta_n+\alpha_r)\dot{M}(-\delta_n)}\right\} \quad (27d)$$

$$C_{rm}=\left\{(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)(\alpha_m+k)}e^{ikl}W_{-1/2}(-il(\delta_r+k))+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^+(\alpha_n)(k+\alpha_n)^2e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\delta_r+\alpha_n)(\alpha_n+\alpha_m)L^+(\alpha_n)}\right\} \quad (27e)$$

$$D_{rm}=\left\{(kb)^2\frac{N^+(k)}{L^+(k)(\delta_m+k)}e^{ikl}W_{-1/2}(-il(\delta_r+k))+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^+(\alpha_n)(k+\alpha_n)^2e^{i\alpha_n l}}{\alpha_n(\delta_r+\alpha_n)(\delta_n+\delta_m)L^+(\alpha_n)}\right\} \quad (27f)$$

(27a-b)' de verilen $\dot{F}^+(b,\alpha_r)$ ve $\dot{F}^-(b,\alpha_r)$ (18a-e) kullanarak:

$$\dot{F}^+(b,\alpha_r)=-\frac{b}{2}J_0(\xi_r)(g_r-i\alpha_r h_r) \quad (27g)$$

$$\dot{F}^-(b,-\delta_r)=\frac{i\delta_r}{\pi Z_r}\frac{J_1^2(Z_rb)-J_1^2(Z_ra)}{J_1(Z_ra)J_1(Z_rb)}f_r \quad (27h)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (26a-b) ifadeleri, (27a,b) birlikte düşünülürse, b_n, c_n ve f_n katsayılarına ilişkin üç bilinmeyenli üç denklem bulunmuş olur. Bu katsayılar Gauss-Elimination metodu kullanılarak elde edilmiş ve nümerik hesaplamalar için kullanılmıştır.

Işınan alan ve nümerik hesaplamalar

$\rho > b$ bölgesinde toplam ışınan alan $F(\rho,\alpha)$ ' nın ters Fourier dönüşümü yardımıyla elde edi-lir. (7a) ve (11) ifadelerinden:

$$u_1(\rho,z)=$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_L\left\{\frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)}\times\left[\dot{F}_-(b,\alpha)+e^{i\alpha l}\dot{F}_+(b,\alpha)\right]e^{-i\alpha z}d\alpha\right\} \quad (28)$$

yazılır. Burada L reel α -eksenine paralel ve $\mathrm{Im}(-k)<\mathrm{Im}(\alpha)<\mathrm{Im}(k)$ bandında bir çizgiyi göstermektedir. $H_0^{(1)}(K\rho)$ ' nun $k\rho\to\infty$ iken geçerli asimtotik ifadesi ve en dik iniş çizgisi yöntemi kullanılarak integralin değeri:

$$u_1(\rho,z)=\frac{i}{\pi}\left\{\frac{e^{ikr_1}}{kr_1}\frac{\dot{F}^+(b,-k\cos\theta_1)}{\sin\theta_1 H_1^{(1)}(kb\sin\theta_1)}+\frac{e^{ikr_2}}{kr_2}\frac{\dot{F}^+(b,-k\cos\theta_2)}{\sin\theta_2 H_1^{(1)}(kb\sin\theta_2)}\right\} \quad (29)$$

Burada r ve θ küresel koordinatları göstermektedir. Nümerik hesaplamalar sonucu, ışınan alanın gözlem açısına göre değişimi sonuçlar bölümündeki grafiklerde sunulmuştur.

Deneysel çalışma

Skaler dalgaların silindirik horndan ışımasının analitik incelenmesi tamamlandıktan sonra, deneysel inceleme de yapılmıştır. Bunun için, paslanmaz çelik malzemeden bir horn hazırlanmış ve deneyden önce hornun iç yüzeyleri ile horn açıklık kısmı çeşitli pürüzlerden temizlenerek parlatılmıştır. Hornun dar olan kısmının yarıçapı ve boyu, düzlem dalganın oluşması için sırasıyla

12.7 mm ve 120 mm boyutlarında seçilmiş ve uyarıcı olarak sinyal üretecine bağlı bir hoparlör kullanılmıştır. Ölçümler, horndan 1 m uzaklıkta ve 0-180 derece arasında her 15 derecede bir yapılmıştır Ölçümler, TÜBİTAK-UEKAE'de bulunan akustik yansımasız odada ve Brüel &Kjaer 2231 Ses Düzeyi Ölçer (SLM) ve frekans analiz modülü kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

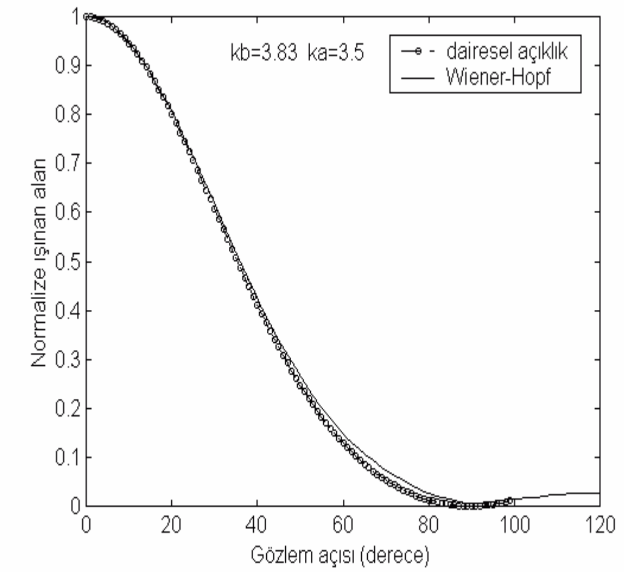
Sonuçlar

Bu çalışmada Şekil 1'de gösterilen dairesel kesitli silindirik horn içinden skaler dalganın ışıması incelenmiştir. Ele alınan problem rijid yapıdaki akustik bir dalga kılavuzunda:

a) kesit değişikliğine
b) borunun açık ağzından uzaya ışınıma

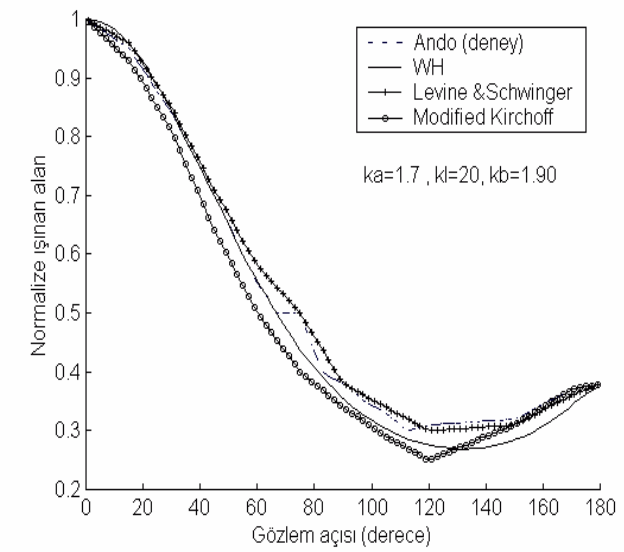
karşı düşen iki ardışık süreksizliğin analizi gibi düşünülebilir. Bu süreksizlikler kendi başlarına ele alındıklarında çözüm hayli basitleşerek literatürde mevcut çalışmalara indirgenir. Gerçekten, kesit değişikliği problemi izole edildiğinde (yani farklı kesitli dalga kılavuzları üzerinde başka süreksizlik olmadığında, veya başka bir deyişle bunlar sonsuz uzunlukta ise) çeşitli yöntemlerle çözülebilir. Örneğin çalışmadaki formulasyonda da kullanılan modal fonksiyonlara dayalı Galerkin yöntemi benzer amaçlar için başka araştırmacılar tarafından sıkça uygulanan etkin bir yaklaşımdır. Benzer şekilde, akustik dalgaların yarı sonsuz bir dalga kılavuzundan serbest uzaya ışınımı problemi de kendi başına ele alındığında klasik Wiener-Hopf tekniği yaklaşımı ile çözülebilir (Levine, 1948).

Bu çalışmada incelenen problemin literatürde mevcut çalışmalardan farkı yukarıda sözü edilen iki ardışık süreksizliği içermesidir. Dalga kılavuzunun horn adını verdiğimiz bölümün sonlu ve kullanılan dalga boyu mertebelerinde olması nedeniyle ortaya çıkan etkileşimler problemin her biri ayrı bir süreksizliği temsil eden iki alt problem şeklinde basitleştirilmesini olanaksız kılar. Problemin yaklaşıklık yapılmaksızın bir bütün olarak ele alınması zorunludur. Ele alınan problemin çözümü literatürde mevcut değildir. Bu nedenle, elde edilen sonuçların, bilinen hallere indirgenmesine olanak veren değerleri kullanılarak doğrulanmasına önem verilmiştir.



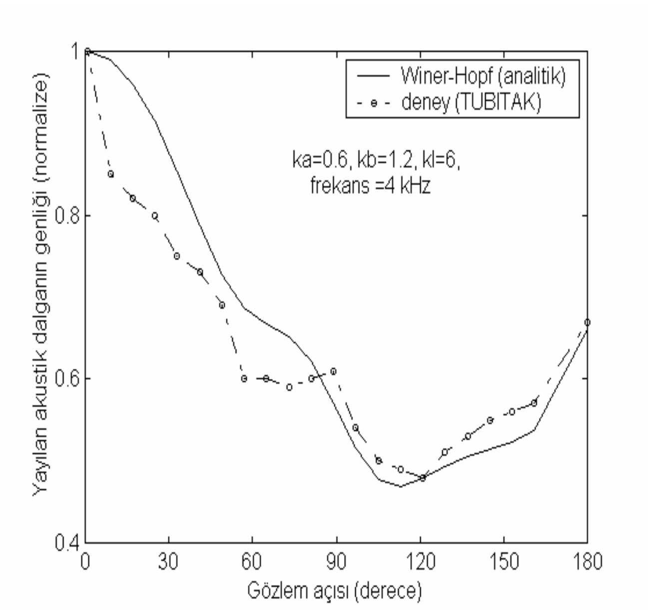
Şekil 1. Silindirik horndan ışıma ile dairesel açıklıktan ışımanın karşılaştırılması

Bunun için uniform aydınlatılmış dairesel bir açıklıktan ışıma ile karşılaştırılmıştır (Şekil 1). Ayrıca, ışınan alanın genel davranışları itibariyle doğrulanabilmesi için benzer bir yapı için literatürde mevcut olan (Ando, 1968) ölçüm sonuçları ile karşılaştırılma yapılmış ve burada da (Şekil 2) iyi bir uyum gözlenmiştir.



Şekil 2. Horn yönelticiliğinin gözlem açısına göre değişimi (kb=1.90)

Yukarıda açıklananlara ek olarak analitik sonuçların doğrulanması açısından yapılan deneysel çalışmayla hornun akustik basınç yönlendiriciliği elde edilmiştir (Şekil 3). Deneysel veriler 15^{o}'de bir ölçülen değerlerden elde edilmiştir. Diğer noktalardaki değerler ise enterpolasyon yöntemiyle hesaplanmıştır. Şekil 6'dan anlaşıldığı gibi, silindirik horndan yayınan alanın gözlem açısıyla değişimi, deneysel ve analitik olarak yaklaşık aynı grafik zarfını göstermektedirler.



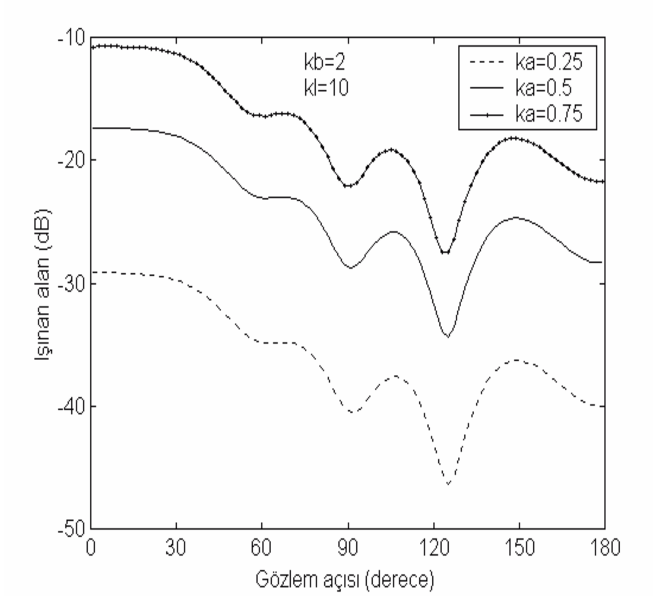
Şekil 3. Normalize ışınan alanın gözlem açısıyla değişimi

Işınan akustik dalganın en büyük değeri, ölçüm noktasının hornun tam karşısında (gözlem açısının 0 derece) olduğu ölçümde elde edilmiştir. Bu değer, gözlem açısının artan değerleriyle düşüş göstermiştir. Bu düşüş, gözlem açısının 120 derece olduğu ana kadar devam etmiş ve buradan sonra gözlem açısıyla birlikte artmaya başlamıştır.

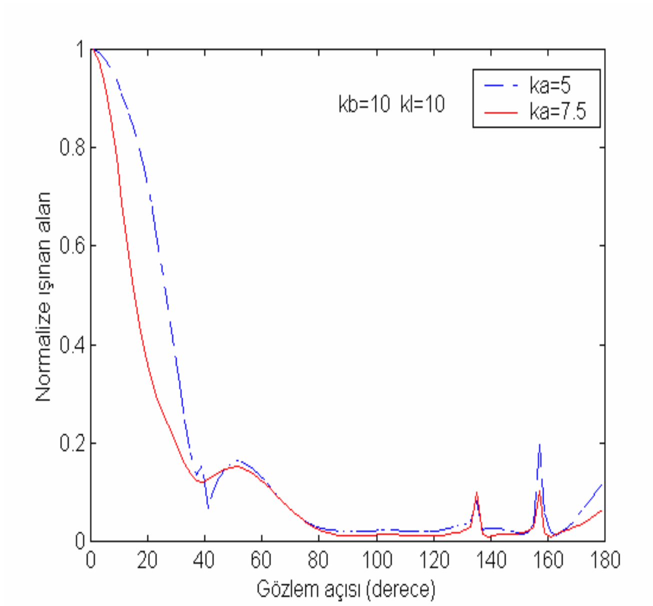
Ayrıca sayısal hesaplamalar sonucu elde edilen grafiklerden;

- ışınan alanın, dalga kılavuzunun yarıçapıyla ters orantılı olarak değiştiği (Şekil 4),
- dalga kılavuzunun ka>3.83 (J_1 Bessel fonksiyonun ikinci sıfırı) değerleri için kb=10 ve kl=10 alınarak normalize ışınan alanın, gözlem noktasının bazı değerlerinde sıfıra yakın olduğu (Şekil 5),
- ışınan alanın hornun yarıçapıyla orantılı olarak azalmakta ve hornun yönelticiliğinin arttığı (Şekil 6),
- hornun boyu arttıkça hornun yönelticiliğinde önemli bir değişim olmadığı (Şekil 7),

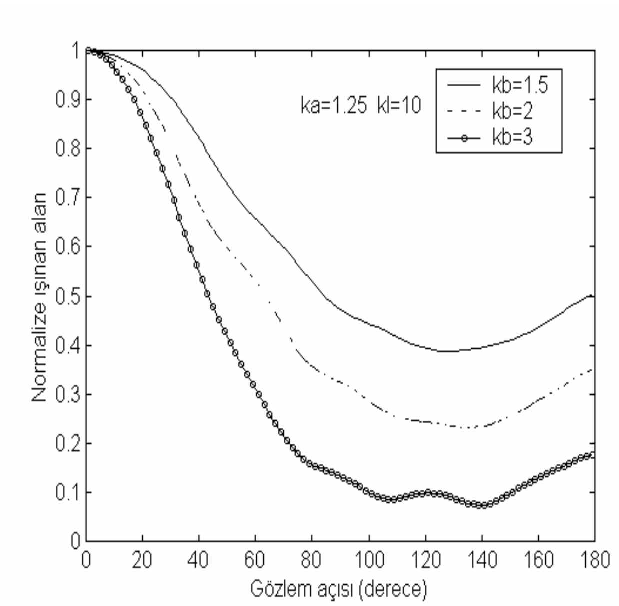
gözlenmiştir.



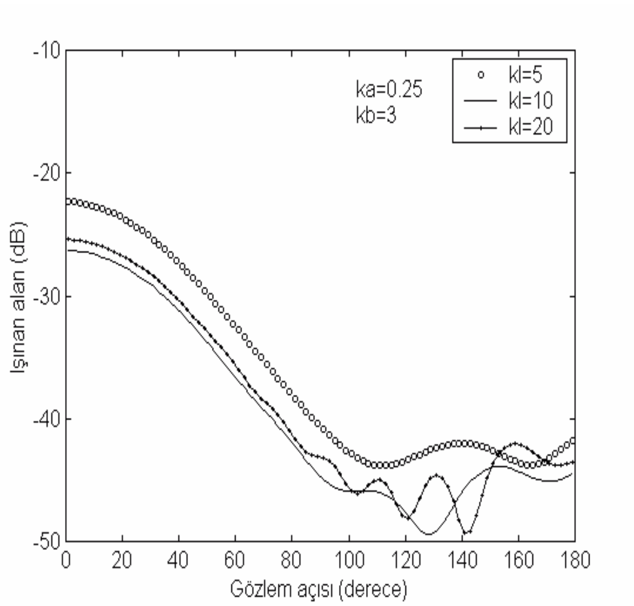
Şekil 4. Işınan alanın dalga kılavuzu yarıçapının değişik değerleri için gözlem açısı ile değişimi



Şekil 5. Işınan alanın dalga kılavuzu yarıçapının değişik değerleri için gözlem açısı ile değişimi



Şekil 6. Normalize ışınan alanın horn yarıçapının değişik değerleri için gözlem açısı ile değişimi



Şekil 7. Işınan alanın horn boyunun değişik değerleri için gözlem açısı ile değişimi

Kaynaklar

Ando Y., (1968). Experimental Studies of the Pressure Directivity and the Acoustic Center of the Circular Pipe Horn Loud Speaker, Acustica, **20**, 366-369.

Ando Y., (1969). On The Sound Radiation from Semi-Infinite Circular Pipe of Certain Wall Thickness, Acustica, **22**, 219-225.

Büyükaksoy, A. ve Polat B., (1998). Diffraction of Acoustic Waves by Semi – infinite Cylindrical Impedance Pipe of Certain Wall Thickness, *J. Eng. Math*., **33**, 4, 333- 352.

Levine H. ve Schwinger J., (1948). On the Sound Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe, J. Phys.Rev, **73**, 383.

Rawlins, A. D., (1978). Radiation of Sound from an Unflanged Rigid Cylindrical Duct with an Acoustically Absorbing Internal Surface, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A-361**, 65-91.

Sneddon I.H. (1972). The Use of Integral Transforms, Mc Graw Hill, Newyork.

Türetken B., Büyükaksoy A., Demir A., (2002) Radiation of Sound Waves from a Rigid Stepped Cylindrical Horn, *Journal of Engineering Mathematics* (to be published).

Whittaker E. T., ve Watson G. N., (1902). Modern Analysis, Cambridge.

Watson G. N., (1958). A Treatise on the Theory of Bessel's functions, Cambridge Univ. Press.