itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:2, Sayı:4, 56-64
Ağustos 2003

Akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik tüplerde zayıf nonlineer dalgalar

İlkay BAKIRTAŞ[*], Hilmi DEMİRAY

İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, kan, sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkan ve büyük damarlar, değişken yarıçaplı, ön gerilmeli, ince, dairesel konik elastik tüp olarak kabul edilerek, böyle bir tüp içerisinde zayıf nonlineer dalgaların yayılımı indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenmiş ve evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries (KdV) denklemi elde edilmiştir. Bu evolüsyon denkleminin yalnız dalga (solitary wave) tipi bir çözümü kabul ettiği gösterilmiş ve ilerleyen dalganın hızı belirlenmiştir. İlerleyen dalga hızının yarıçapı genişleyen tüpler için, orijinden uzaklaştıkça azaldığı; buna karşılık yarıçapı daralan tüpler için orijinden uzaklaştıkça arttığı gözlenmiştir.
***Anahtar Kelimeler**: Yarıçapı değişken elastik tüp, yalnız dalga, indirgeyici pertürbasyon yöntemi*

Weakly nonlinear waves in fluid-filled tapered elastic tubes

Abstract

The striking feature of the arterial blood flow is its pulsatile character. The intermittent ejection of blood from the left ventricle produces pressure and flow pulses in the arterial tree. Experimental studies reveal that flow velocity in blood vessels largely depends on the elastic properties of the vessel wall and they propagate towards the periphery with a characteristic pattern. The studies in the existing literature treated the arteries as circularly cylindrical long thin tubes. In essence, the arteries have variable radius along the axis of the tube. In the present work, treating the arterial tree as a tapered, thin walled, long and circularly conical prestressed elastic tube and using the reductive perturbation method, the propagation of weakly nonlinear waves in such a fluid-filled elastic tube is studied. Assuming that the problem of concern is a boundary value problem, a coordinate stretching is introduced to the field equations. Furthermore, the field quantities are expressed as some asymptotic series of a smallness parameter ε. By considering the blood as an incompressible inviscid fluid, the evolution equation is obtained as the Korteweg-de Vries equation with a variable coefficient. It is shown that these types of equations admit a solitary wave type of solution with variable wave speed. It is observed that the wave speed increases with distance for narrowing tube while it decreases for expanding tube.
***Keywords**: Tapered elastic tube, solitary wave, reductive perturbation method.*

[*]Yazışmaların yapılacağı yazar: İlkay BAKIRTAŞ. ilkayb@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 99.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi'nde tamamlanmış olan "İçi akışkanla dolu değişken yarı çaplı elastik tüplerde nonlineer dalga yayılımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 01.05.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 18.06.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.12.2003 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Bu çalışmada, içi sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkan ile dolu, öngerilmeli, değişken yarıçaplı elastik tüplerde zayıf nonlineer dalga yayılımı problemi, uzun dalga yaklaşımı altında, Jeffrey ve Kawahara (1981) tarafından ortaya konmuş olan, indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenmiş ve yönetici denklem olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Bu tip denklemlerin değişken dalga hızına sahip yalnız (soliter) dalga çözümleri olduğu gösterilmiş, daralan ve genişleyen tüplerde, dalga hızının eksenel koordinatla değişimi irdelenmiştir.

Temel denklemler

Tüp denklemleri

Bu bölümde, içi sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkanla dolu, değişken yarıçaplı ince elastik tüpte dalga yayılımı probleminin modellenmesinde kullanılacak olan alan denklemleri elde edilecektir. Bu amaçla, koordinat merkezindeki yarıçapı R_0 ve genişleme veya daralmayı temsil eden açı Φ olan elastik bir tüp göz önüne alalım. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\mathbf{R} = (R_0 + \Phi Z)\mathbf{e_r} + Z\mathbf{e_z} \tag{1}$$

Burada $\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta}$ ve $\mathbf{e_z}$ silindirik koordinatlardaki birim baz vektörlerini, Z ise maddesel noktanın şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinatını temsil etmektedir. Şekil değiştirmeden önceki elemanın meridiyen ve yanal doğrultulardaki elemanter yay uzunlukları aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır:

$$dS_Z = (1+\Phi^2)^{1/2} dZ \,, dS_\Theta = (R_0 + \Phi Z) d\Theta \tag{2}$$

Çalışmada, tüpün başlangıçta bir $P_0(Z)$ iç basıncına maruz kaldığı kabul edilecektir. Statik şekil değiştirmeden sonra R_0'a karşı gelen yarıçap r_0 ile gösterilirse, tüpün üzerindeki bir noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\mathbf{r_0} = (r_0 + \phi z^*)\mathbf{e_r} + z^*\mathbf{e_z} \,,\; z^* = \lambda_z Z \tag{3}$$

Burada, z^* statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı, λ_z eksenel doğrultudaki germeyi, ϕ ise statik şekil değiştirmeden sonraki genişleme (daralma) açısını temsil etmektedir. Şekil değiştirmeden sonraki elemanın meridyen ve yanal doğrultulardaki elemanter yay uzunlukları aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır:

$$ds_z^0 = (1+\phi^2)^{1/2} dz^* \;,\; ds_\theta^0 = (r_0 + \phi z^*) d\theta \tag{4}$$

Buna göre, yanal ve meridyen doğrultularındaki germe oranları aşağıdaki biçimde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= \frac{ds_z^0}{dS_Z} = \lambda_z \frac{(1+\phi^2)^{1/2}}{(1+\Phi^2)^{1/2}}, \\ \lambda_2^0 &= \frac{ds_\theta^0}{dS_\Theta} = \lambda_z \frac{(r_0 + \phi z^*)}{(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)} \end{aligned} \tag{5}$$

Şekil değiştirmeden önceki tüp kalınlığının H, şekil değiştirmeden sonraki tüp kalınlığının ise h olduğunu varsayalım. Tüp malzemesinin sıkışmazlık koşulu göz önünde bulundurulursa aşağıdaki bağıntı elde edilir

$$h = \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}(R_0\lambda_z + \Phi z^*)}{(1+\phi^2)^{1/2}(r_0 + \phi z^*)} \tag{6}$$

(6) ifadesinden de görüldüğü gibi, kalınlık eksenel koordinatla değişmektedir. Kalınlığın orijindeki ve sonsuzdaki değerleri sırasıyla aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}}{\lambda_\theta \lambda_z (1+\phi^2)^{1/2}} = \frac{H}{\lambda_\theta \lambda_1^0}, \\ h_\infty &= \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}\Phi}{\lambda_z^2 (1+\phi^2)^{1/2}\phi} = \frac{H}{\lambda_1^0 \lambda_2^0(\infty)} \end{aligned} \tag{7}$$

Burada, $\lambda_2^0(\infty)$, λ_2^0'nin sonsuzdaki değerini ve $\lambda_\theta = r_0 / R_0$, radyal doğrultudaki eksenel germesinin orijindeki değerini ifade etmektedir. Eğer statik şekil değiştirme öncesinde ve sonrasında yarıçapın değişimini ifade eden açılar arasında

$\phi = \Phi\lambda_\theta / \lambda_z$ biçiminde bir ilişki varsa, yani şekil değiştirmeden önceki ve sonraki doğrultmanlar paralel ise, tüp ekseni boyunca kalınlık değişmez, sabit kalır ve $h_0 = H/(\lambda_\theta \lambda_1^0)$ olarak ifade edilebilir.

Normalde sağlıklı bir insanda sistolik kan basıncı (maksimal basınç) 120 mmHg ve diastolik kan basıncı (minimal basınç) ise 80 mmHg civarındadır. Deneysel çalışmalar göstermiştir ki, fizyolojik koşullarda büyük damarlar eksenel yönde 1.6 mertebesinde bir germeye maruz kalmaktadırlar. Kalbin periyodik olarak uyguladığı pulsatif basınç, bu statik değerler üzerine dinamik yer değiştirmelerin süperpoze edilmesine yol açmaktadır. Yani büyük damarlar ortalama bir gerilmeye maruz kalmaktadırlar. Bu bilgi doğrultusunda, statik şekil değiştirmenin üzerine, radyal doğrultuda sonlu ve zaman bağlı $u^*(z^*,t^*)$ sonlu, dinamik yer değiştirmesinin süperpoze edildiği varsayılacaktır. Eksenel yöndeki yataklama kuvvetleri göz önünde bulundurularak, eksenel yöndeki yer değiştirme ihmal edilecektir. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{r} = (r_0 + \phi z^* + u^*)\mathbf{e_r} + z^*\mathbf{e_z} \tag{8}$$

Şekil değiştirmiş elemanın kenar uzunlukları ise aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır:

$$ds_z = \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} dz^*,$$

$$ds_\theta = (r_0 + \phi z^* + u^*) d\theta \tag{9}$$

En son halde germeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\lambda_1 = \lambda_z \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} \Big/ \ (1+\Phi^2)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = \lambda_z (r_0 + \phi z^* + u^*)/(\lambda_z R + \Phi z^*) \tag{10}$$

O halde şekil değiştirmiş meridiyene teğet birim $\mathbf{t}$ vektörü ve şekil değiştirmiş mambranın birim dış normali $\mathbf{n}$ aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{t} = \frac{\left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)\mathbf{e_r} + \mathbf{e_z}}{\left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e_r} - \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)\mathbf{e_z}}{\left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{11}$$

Tüp malzemesinin sıkışmazlığı kullanılarak, tüpün en son kalınlığı aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$h' = \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)}{\lambda_z^2 \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} (r_0 + \phi z^* + u^*)} \tag{12}$$

T_1 ve T_2 sırasıyla, meridyen ve teğetsel yaylar boyunca etkiyen mambran kuvvetlerini göstersin. Bu durumda $z^* = sbt, z^* + dz^* = sbt$ ve $\theta = sbt, \theta + d\theta = sbt$ düzlemleri arasında kalan tüp elemanının radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} &-T_2 \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z^*}\left\{\frac{(r_0 + \phi z^* + u^*)(\phi + \partial u^*/\partial z^*)}{\left[1 + (\phi + \partial u^*/\partial z^*)^2\right]^{1/2}} T_1\right\} \\ &+ P^*(r_0 + \phi z^* + u^*) \\ &= \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2}(1+\Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \end{aligned} \tag{13}$$

Burada, ρ_0, mambranın kütle yoğunluğunu ve P^* akışkan basıncını ifade etmektedir. $\mu\Sigma$

mambran malzemesine ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu göstermek üzere, mambran kuvvetleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$T_1 = \frac{\mu H}{\lambda_2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\ ,\ T_2 = \frac{\mu H}{\lambda_1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \tag{14}$$

(14) ifadesi, (13) ile verilen hareket denkleminde kullanılırsa, radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki hali alır:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mu}{\lambda_z} H(1+\Phi^2)^{1/2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + \frac{\mu}{\lambda_z} H \\
&\frac{\partial}{\partial z^*}\left\{\frac{(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)(\phi + \partial u^*/\partial z^*)}{\left[1+(\phi+\partial u^*/\partial z^*)^2\right]^{1/2}}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right\} \\
&+P^*(r_0 + \phi z^* + u^*) \\
&= \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2}(1+\Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Akışkan denklemleri

Kan, plazma adı verilen ve Newtonyen özelliğe sahip bir sıvı ile çeşitli tipte hücrelerin karışımından oluşmuş viskoz bir akışkandır. Belirli bir ölçü kan örneğindeki hücre hacminin, toplam örnek hacmine oranına hematokrit oranı adı verilir. Kan üzerinde yapılan deneysel çalışmalar, düşük hematokrit oranlarında ve yüksek şekil değiştirme (kayma) hızlarında kanın Newtonyen, yüksek hematokrit oranlarında ve düşük şekil değiştirme (kayma) hızlarında da Newtonyen olmayan bir akışkan gibi davrandığını göstermektedir.

Genel olarak kabul edilen olgu, kanın sıkıştırılamayan ve Newtonyen olmayan bir akışkan olduğudur. Ancak, Poiseuille akımından bilindiği gibi, damarın çeperine yakın yerlerde şekil değiştirme (kayma) hızları yüksektir, dolayısıyla bu bölgede kanın viskozitesi azalmaktadır. Ayrıca, kan akımı sırasında alyuvarlar hızın yüksek olduğu merkeze yakın bölgelere kaydığından, damarın çeper kısımlarında hematokrit oranı düşmekte ve kanın viskozitesi daha da azalmaktadır. Bu nedenle, büyük damarlarda kan akımı problemlerinde kan, sıkıştırılamayan ve viskoz olmayan akışkan gibi işleme sokulabilir.

Akışkanın kesin denklemleriyle uğraşmanın zorlukları göz önünde bulundurularak, bu çalışmada, akışkanın eksenel yöndeki hızının radyal yöndeki hızından daha büyük olduğu ve akışkan denklemleri üzerinde, kesit alanına göre bir ortalama işleminin uygulanabilir olduğu kabul edilecektir. Bu durumda, viskoz olmayan bir akışkana ait yaklaşık akışkan denklemleri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}(A v^*) = 0\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a}\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = 0 \tag{17}$$

Burada v^* hızın ortalama anlamda eksenel doğrultudaki hız bileşenini, $A(z^*, t^*)$, tüpün dik kesit alanını, ρ_a akışkanın kütle yoğunluğunu göstermektedir. Dik kesit alanı ile en son yarıçap fonksiyonu arasındaki ilişkinin $A = \pi(r_0 + \phi z^* + u^*)^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa, kütle korunum denklemi aşağıdaki formu alır:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})v^* + \frac{1}{2}(r_0 + \phi z^* + u^*)\frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 \tag{18}$$

Bu aşamada, aşağıdaki boyutsuz büyüklükleri tanımlamak uygun olacaktır

$$\begin{aligned}
&t^* = \frac{R_0}{c_0} t\,,\ z^* = R_0 z\,,\ P^* = \rho_a c_0^2 p\,, \\
&c_0^2 = \frac{\mu H}{\rho_a R_0}\,,\ m = \frac{\rho_0 h}{\rho_a R_0}\,,\ r_0 = \lambda_\theta R_0\,, \\
&u^* = R_0 u\,,\ v^* = c_0 v
\end{aligned} \tag{19}$$

(19) ifadeleri (15), (17) ve (18) eşitliklerinde kullanılırsa aşağıdaki boyutsuz denklemler elde edilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\phi + \frac{\partial u}{\partial z})v + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u)\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{21}$$

$$p=\frac{m}{\lambda_z^2}(1+\Phi^2)^{1/2}\,\frac{(\lambda_z+\Phi z)}{(\lambda_\theta+\phi z+u)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$+\frac{(1+\Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z(\lambda_\theta+\phi z+u)}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} \tag{22}$$
$$-\frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta+\phi z+u)}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(\phi+\partial u/\partial z)(\lambda_z+\Phi z)}{\left[1+(\phi+\partial u/\partial z)^2\right]^{1/2}}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}\right\}$$

Bu denklemler u, v ve p bilinmeyenlerini belirlemek için yeterlidir.

Uzun dalga yaklaşımı

Bu bölümde, boyutsuz halde yönetici denklemleri (20)-(22) ile verilmiş olan, içi akışkan ile dolu, lineer olmayan, ince ve yarıçapı değişken tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı incelenecektir. Bunun için, uzun dalga yaklaşımında, indirgeyici pertürbasyon yöntemi probleme uyarlanacaktır (Jeffrey ve Kawahara 1981).

Fiziksel koşullar nedeniyle, problemi bir sınır değer problemi olarak ele almak uygundur. Bu tür problemlerde, verilen frekansa karşılık, dalga sayısı, dispersiyon bağıntısından elde edilir. Uzun dalga yaklaşımını temsil etmek üzere, aşağıda verilen yapıda bir koordinat dönüşümünü kullanmak uygundur:

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(z-gt),\ \tau=\varepsilon^{3/2}z \tag{23}$$

Burada, ε nonlineeritenin ve dispersiyonun mertebesini karakterize eden küçük bir parametre, g ise bir ölçek parametresidir. Buna ek olarak, u, v ve p alan değişkenlerinin, (ξ,τ) değişkenlerinin ve ε parametresinin bir fonksiyonu olduğu kabul edilecektir. Tüpün yarıçapının değişimini hesaba katmak için, (23) ile ifade edilen koordinat dönüşümü göz önünde bulundurulursa, yarıçap değişimini karakterize eden Φ ve ϕ açılarını $\varepsilon^{5/2}$ mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Bu durumda söz konusu açılar aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler:

$$\Phi=A\varepsilon^{5/2}\ ,\ \phi=a\varepsilon^{5/2} \tag{24}$$

Burada, A ve a sırasıyla, şekil değiştirmeden önceki ve sonraki yarıçap değişim açılarını karakterize eden parametrelerdir.

Alan değişkenlerinin aşağıdaki formda asimptotik seriye açılabileceği varsayılacaktır:

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\ldots,$$
$$v=\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\ldots, \tag{25}$$
$$p=p_0+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2+\ldots$$

Burada $u_1,\ldots p_2$ (ξ,τ)'nun fonksiyonudurlar. (24) ve (25) yapıları (20) ve (21) denklemlerinde kullanılır ve elde edilen eşitliklerde ε'un benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$O(\varepsilon)$ mertebeden denklemler:

$$-g\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_1}{\partial\xi}=0\ ,\ -g\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+\frac{\partial p_1}{\partial\xi}=0 \tag{26}$$

$O(\varepsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$-g\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_2}{\partial\xi}+\frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_1}{\partial\tau}+\frac{1}{2}u_1\frac{\partial v_1}{\partial\xi}$$
$$+\frac{1}{2}a\tau\frac{\partial v_1}{\partial\xi}=0, \tag{27}$$

$$-g\frac{\partial v_2}{\partial\xi}+\frac{\partial p_2}{\partial\xi}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+\frac{\partial p_1}{\partial\tau}=0$$

Bu denklemlerde, p_1 ve p_2 fonksiyonları henüz bilinmemektedir. Ayrıca, (23) ile ifade edilen koordinat dönüşümünün altında, yarıçap değişimini karakterize eden ΦZ ve ϕz terimlerinin, sırasıyla $(A\tau)\varepsilon$ ve $(a\tau)\varepsilon$ terimlerine dönüştüğü görülür. Bu durumda aşağıdaki açılımlar geçerlidir:

$$\lambda_1\cong\lambda_z,$$

$$\lambda_2 = \lambda_\theta + [u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\tau]\varepsilon$$

$$+ [u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1 - \frac{A}{\lambda_z}(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\tau^2]\varepsilon^2,$$

$$\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \alpha_0 + \alpha_1[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\tau]\varepsilon + \ldots, \quad (28)$$

$$\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} = \beta_0 + \beta_1[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\tau]\varepsilon$$

$$+ \left\{ \beta_2[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\tau]^2 \right.$$

$$\left. + \beta_1[u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1 - \frac{A}{\lambda_z}(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\tau^2] \right\} \varepsilon^2$$

Burada $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ ve β_2 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta \partial \lambda_z},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_\theta}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2}, \quad (29)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z}\frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^3}$$

(28) açılımları, (22) denkleminde yerine konursa çeşitli mertebeden basınç terimleri aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$p_0 = \beta_0,$$

$$p_1 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_1 + [(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} a]\tau,$$

$$p_2 = (\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_2 \quad (30)$$

$$+ (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})u_1^2$$

$$+ 2[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} a + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a]\tau u_1$$

$$+ [(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)^2 \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta}(a^2 - \frac{\lambda_\theta^2}{\lambda_z^2} A^2) + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a^2]\tau^2$$

Alan denklemlerinin çözümleri

Bu bölümde, (26) ve (27) ile verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilecektir. (26) denkleminin integrasyonundan aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau) + f(\tau),$$

$$p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau) + h(\tau) \quad (31)$$

Burada, $U(\xi, \tau)$, yönetici denklemi daha sonra elde edilecek olan bilinmeyen bir fonksiyon, $f(\tau)$ ve $h(\tau)$ ise τ değişkenine bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır ve tanım kümesi sonsuz boyutlu ise sıfır alınmalıdırlar. Buna ek olarak, büyük τ değerleri için alan değişkenlerine sonlu çözümler bulunabilmesi için, (30) ile verilen p_1 eşitliğindeki τ teriminin katsayısı da sıfır olmalıdır

$$(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} a = 0 \quad (32)$$

Bu bağıntı, sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki yarıçap değişim parametresi a'yı, başlangıçtaki yarıçap değişim parametresi olan A'ya bağlı olarak ifade edebilmeyi mümkün kılar:

$$a = \frac{\lambda_\theta^2 \beta_1}{\lambda_z(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)} A \quad (33)$$

(30) ve (31) ifadelerindeki p_1 ifadeleri karşılaştırılırsa, $U(\xi, \tau)$ fonksiyonu için sıfırdan farklı bir çözümün bulunabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerektiği görülür

$$g^2 = (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2 \quad (34)$$

Burada g, ortamda yayılan dalganın uzun dalga boyu limitindeki faz hızına karşı gelir. Bu

$\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0 \rangle 0$ olduğunda geçerlidir. Bu durumda, (31) ile verilen çözüm aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$u_1 = U(\xi,\tau)\,,\ v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi,\tau)\,,$$

$$p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi,\tau) \tag{35}$$

(35) ile verilen çözüm ifadesi, (27) ve (30) da kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$-g\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + g\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{g}{\lambda_\theta} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{ga}{\lambda_\theta}\tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0,$$

$$-g\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{2g^2}{\lambda_\theta}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{4g^2}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0\,,$$

$$\begin{aligned} p_2 = {} & (\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_2 \\ & +(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})U^2 \\ & +2\left(\frac{\beta_0\beta_2}{\lambda_\theta\beta_1} - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}\right)a\tau U \\ & +\left(\frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^2\beta_1^2}\beta_2 + \frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^3\beta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}\right)a^2\tau^2 \end{aligned} \tag{36}$$

(36) ile verilen denklemler arasında v_2 elimine edilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$-\frac{2g}{\lambda_\theta}\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{g}\frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{4g}{\lambda_\theta}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{10g}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + (\frac{2ga}{\lambda_\theta^2})\tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \tag{37}$$

(36) ile verilen p_2 ifadesi (37)'de kullanılırsa, aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a\tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \tag{38}$$

Burada μ_1, μ_2 ve μ_3 katsayıları şu şekilde tanımlanmışlardır

$$\mu_1 = \frac{5}{2\lambda_\theta} + \frac{1}{2g^2}(\lambda_\theta\beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})\,,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4g^2}(\frac{mg^2}{\lambda_z} - \lambda_\theta\alpha_0)\,, \tag{39}$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2\lambda_\theta} + \frac{\beta_0\beta_2}{\beta_1(\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)}$$

(39) ifadelerinden görülebileceği gibi μ_1, μ_2 ve μ_3 katsayılarının değerleri, tüp malzemesinin başlangıç şekil değiştirmesine bağlıdır. Buna ek olarak, eğer yarıçap değişim parametresi olan a sıfıra eşitlenirse, (38) denklemi, klasik KdV denklemine dönüşür. Bir başka deyişle, (38) denklemindeki son terim, tüpün yarıçapının değişiminin probleme etkisini ifade etmektedir.

İlerleyen dalga çözümü

Bu bölümde, (38) ile ifade edilen değişken katsayılı KdV denklemine ilerleyen dalga çözümü sunulacaktır. Bu amaçla (38) denklemine aşağıdaki formda çözüm önerilecektir:

$$U = F(\zeta)\ ,\ \zeta = \lambda(\xi - \beta\tau - \frac{\mu_3}{2}a\tau^2) \tag{40}$$

Burada, λ ve β, denklemin çözümünden belirlenecek olan iki sabittir. (40) ifadesi (38)'de kullanılırsa, aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$-\beta F' + \mu_1 F F' + \lambda^2 \mu_2 F''' = 0 \tag{41}$$

Burada üs, ζ'ya göre türevi ifade etmektedir.

Bu çalışmada, lokalize olmuş ilerleyen dalga çözümü göz önüne alınacaktır yani F ve çeşitli mertebeden türevlerinin $\zeta \to \mp\infty$ olurken sıfırlandığı varsayılacaktır. Bu durum göz önünde bulundurularak (41) denklemi ζ'ya göre integre edilir ve lokalize olma koşulu kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$-\beta F+\frac{\mu_1}{2}F^2+\mu_2\lambda^2F''=0 \qquad (42)$$

Bu tip diferansiyel denklemlerin çözümünde, Hiperbolik Tanjant metodunu kullanmak uygun olacaktır (Malfliet ve Wieers 1996). Bu doğrultuda, yeni bir η değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

$$\eta=\tanh\zeta \qquad (43)$$

Bu durumda, (42) denklemi için önerilecek çözüm aşağıdaki formu alır

$$F=c+d\eta^2 \qquad (44)$$

Burada c ve d çözümden belirlenecek olan sabitlerdir. Çalışmada lokalize olmuş çözümü göz önüne alındığından, $\eta\to\mp1$ için F sıfır olmaktadır. Bu koşul $d=-c$ bağıntısını üretir. $d/d\zeta=(1-\eta^2)d/d\eta$ türev bağıntısı göz önünde bulundurularak (44) ifadesi (42)'de yerine konur ve η'nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$\lambda=\left(\frac{\mu_1c}{12\mu_2}\right)^{1/2}, \quad \beta=\frac{\mu_1c}{3} \qquad (45)$$

Bu durumda, aşağıdaki formdaki çözüm ifadesine ulaşılır:

$$U=c\sec h^2\zeta,$$
$$\zeta=\left(\frac{\mu_1c}{12\mu_2}\right)^{1/2}\left(\xi-\frac{\mu_3a}{2}\tau^2-\frac{\mu_1c}{3}\tau\right) \qquad (46)$$

Burada c, yalnız dalganın genliğine karşı gelmektedir. Yalnız dalganın hızının değişken olduğu görülmektedir. Elde edilen bu çözüm, aynı formdaki değişken katsayılı KdV denkleminin çözümlerini Ters Saçılma yöntemini kullanarak elde eden Wadati (1983)'nin sunduğu çözümlerle tamamen aynıdır. Dalganın yayılma hızı ise aşağıdaki gibi verilir

$$v_p=\frac{1}{\beta+\mu_3a\tau} \qquad (47)$$

Sonuçlar

Yarıçap değişiminin (47) ile verilen v_p dalga hızına olan etkisini inceleyebilmek için μ_3 katsayısının sayısal değerini belirlemek gereklidir. Bunun için, tüp malzemesinin bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Bu çalışmada, Demiray (1972) tarafından yumuşak biyolojik dokular için önerilen bünye bağıntısı kullanılacaktır. Demiray (1972) tarafından önerilen şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonu aşağıdaki formda ifade edilir:

$$\Sigma=\frac{1}{2\alpha}\{\exp[\alpha(I_1-3)]-1\} \qquad (48)$$

Burada α maddesel bir sabit ve I_1 Finger deformasyon tansörünün birinci invaryantı olup, $I_1=\lambda_z^2+\lambda_\theta^2+1/\lambda_z^2\lambda_\theta^2$ biçiminde ifade edilir. (48) bağıntısı (29) denkleminde kullanılırsa, α_0,β_0,β_1 ve β_2 katsayıları aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\alpha_0=\left(\frac{1}{\lambda_\theta}-\frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^4}\right)F(\lambda_\theta,\lambda_z),$$

$$\beta_0=\left(\frac{1}{\lambda_z}-\frac{1}{\lambda_\theta^4\lambda_z^3}\right)F(\lambda_\theta,\lambda_z),$$

$$\beta_1=\left[\left(\frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}+\frac{3}{\lambda_\theta^5\lambda_z^3}\right)+2\frac{\alpha}{\lambda_\theta\lambda_z}\left(\lambda_\theta-\frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2}\right)^2\right] F(\lambda_\theta,\lambda_z), \qquad (49)$$

$$\beta_2=\left[-\frac{6}{\lambda_\theta^6\lambda_z^3}+3\frac{\alpha}{\lambda_\theta\lambda_z}\left(1+\frac{3}{\lambda_\theta^4\lambda_z^2}\right)\left(\lambda_\theta-\frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2}\right)+2\frac{\alpha^2}{\lambda_\theta\lambda_z}\left(\lambda_\theta-\frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2}\right)^3\right]F(\lambda_\theta,\lambda_z).$$

Burada, $F(\lambda_\theta, \lambda_z)$ fonksiyonu:

$$F(\lambda_\theta, \lambda_z) = \exp\left[\alpha(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - 3)\right] \quad (50)$$

olarak tanımlanmıştır.

μ_3 katsayısının başlangıç şekil değiştirmesi ile değişimini incelemek için α maddesel sabitinin değerine gereksinim vardır. Bu çalışmada kullanılan mekanik modelde, Simon ve çalışma arkadaşları (1972) tarafından köpek aortu üzerinde yapılan deneysel çalışma sonuçları, Demiray (1976) tarafından elde edilen analitik sonuç ile $R_i = 0.31cm$, $R_0 = 0.38cm$ ve $\lambda_z = 1.53$ değerleri için karşılaştırılarak α maddesel sabiti $\alpha = 1.948$ olarak bulunmuştur. α'nın bu sayısal değeri kullanılarak, μ_3 katsayısının değişimi, λ_θ ve λ_z'nın bir fonksiyonu olarak analiz edilebilir. Örneğin, $\lambda_\theta = \lambda_z = 1.6$ değeri için μ_3'ün sayısal değeri 0.06 olarak bulunur. Bunun sonucu olarak, yarıçapı daralan tüpler için dalga hızının orijinden uzaklaştıkça arttığı; yarıçapı genişleyen tüplerde ise, dalga hızının orijinden uzaklaştıkça azaldığı çıkarımına varılabilir ki bu da beklenen bir sonuçtur.

Kaynaklar

Demiray, H., (1996). Solitary waves in a prestressed elastic tube, *Bulletin of Mathematical Biology,* **58**, 939-955.

Demiray, H., (1972). On the elasticity of soft biological tissues, *Journal of Biomechanics*, **5,** 309-311.

Demiray, H., (1976). Large deformation analysis of some basic problems in biophysics, *Bulletin of Mathematical Biology,* **38**, 701-711.

Fung, Y. C., (1981). *Biodynamics: Circulation*, Springer Verlag, New York.

Hashizume, Y., (1985). Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube, *Journal of the Physical Society of Japan.* **54**, 3305-3312.

Jeffrey, A. and Kawahara, T., (1981). *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory,* Pitman, Boston.

Malfliet, M. ve Wieers, E., (1996). Theory of ion-acoustic waves revisited, *Journal of Plasma Physics*, **56,** 441-450.

Pedley, T. J., (1980). *Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge University Press, Cambridge.

Simon, B. R., Kobayashi, A. S., Stradness, D. E. ve Wiederhielm, C. A., (1972). Re-evaluation of arterial constitutive laws, *Circulation Research,* **30**, 491-500.

Wadati, M., (1983). Stochastic Korteweg-de Vries equation, *Journal of the Physical Society of Japan,* **52**, no.8, 2642-2648.

Yomosa, Y., (1987). Solitary waves in large blood vessels, *Journal of the Physical Society of Japan,* **56,** 506-520.