

# Üç boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin paralel, kapalı sayısal çözümü

Vildan ÜSTOĞLU ÜNAL\*, Ülgen GÜLÇAT

İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uzay Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

Üç boyutlu ve zamana bağlı Navier-Stokes denklemlerinin sayısal hassas çözümü, analiz edilecek alanın büyüklüğü ve karmaşıklığı söz konusu olduğunda paralel hesap gereksinimini ortaya çıkartmaktadır. Bu amaca uygun olarak, zamanda ve uzayda ikinci mertebeden hassas kapalı sayısal bir çözüm tekniği bu çalışma çerçevesinde geliştirilmiş ve uygulanan yeni bir paralel çözüm tekniği ile sonuçlar elde edilmiştir. Momentum denkleminin kapalı sayısal çözümü, zamana göre yapılan ayrıklaştırmada atılacak zaman adımı büyüklüğüne bir kısıtlama getirilmeden koşulsuz kararlı bir şekilde yapılabilmekte ve basınç alanı Poisson denkleminde elde edilmektedir. Çözüm alanı birbirleriyle bitişik çözüm bölgelerine ayrılmakta ve hem momentum hem de basınç denklemleri, ayrı ayrı, bu bölgelerde iteratif yöntemlerle çözülmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Kapalı yöntem, paralel hesaplama, sıkıştırılmaz üç boyutlu Navier-Stokes.

## Parallel, implicit numerical solution of 3-D Navier-Stokes equations

### Abstract

3-D Navier-Stokes equations are the fundamental tool for modelling the laminar and turbulent character of the flow. The numerical solution of the equations to study large scale problems has gained considerable attention in recent years. The size of the problem considered necessitates the utilization of parallel computing. A second order accurate implicit scheme, both in time and space, is developed and implemented for parallel solution of incompressible, unsteady 3-D Navier-Stokes equations. A modified version of the two step fractional method is used in time discretization of the momentum equation which is implicitly solved for the intermediate velocity field at each time step. A flow field is resolved with less number of points while taking large time steps. The pressure at each time level is obtained via an auxiliary scalar potential which satisfies the Poisson's equation. The Domain Decomposition Technique is modified and implemented separately for parallel solution of the momentum and pressure equations using non-overlapping matching sub domains. Lid-driven flow in a cubic cavity with Reynolds number of 400 and 1000 is selected as a test case to demonstrate the accuracy and the robustness of the method used. The solution domain is divided into 2, 4 and 6 sub domains. Time accurate solutions are obtained with time steps 5 times the step size of a stable explicit method. Super-linear speed-up is achieved with the modified Domain Decomposition Technique.

**Keywords:** Domain Decomposition Technique, Incompressible 3-D Navier-Stokes, implicit method.

---

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Vildan ÜSTOĞLU ÜNAL. vunal@yeditepe.edu.tr; Tel: (216) 578 06 93.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi'nde tamamlanmış "Parallel solution of unsteady, incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations with a new implicit method" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.01.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 24.01.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2003 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Gerçek iç ve dış kompleks akışların hassas olarak analiz edilebilmesi için Navier–Stokes denklemlerinin paralel hesap yardımıyla sayısal çözümü bu çalışmanın konusunu oluşturmaktadır. Uygulanan zamanda ve uzayda ikinci mertebeden hassas kapalı sayısal çözüm tekniği, az sayıda nokta kullanarak ve zaman adımı büyüklüğüne sınır getirmeden, akış alanını kararlı ve hassas bir şekilde çözebilmektedir.

Zamana bağlı, viskoz ve sıkıştırılamaz akışların analizi, akım alanlarının sonlu elemanlar yardımıyla ayrıklaştırılması temeline dayandırılırken, zaman boyutundaki integrasyon ise kesirli zaman adımları kullanılarak yapılmaktadır (Gülçat ve Aslan 1997). Her zaman adımında momentum denkleminin kapalı sayısal çözümü elde edilmekte ve yarı zaman adımında elde edilen hız alanı kullanılarak Poisson denklemini sağlayan yardımcı potansiyel fonksiyonu elde edilerek basınç alanına ulaşılmaktadır.

Paralel çözüme uygun hale getirilen bu şema akım alanının bölgelere ayrılmasıyla her bölge için verilen bir zamanda her bir işlemcide birbirinden bağımsız çözümler elde edilmesi ve gerekli bilgilerin bölge arakesitlerinde birbirlerine iletilmesi esasına dayanmaktadır. Her zaman adımında basınç ve hız, ayrı ayrı, modifiye edilmiş Bölgelere Ayırma (Domain Decomposition) yöntemi, (Glowinski ve Periaux 1982; Dinh v. diğ., 1992; Glowinski v. diğ., 1995), ile çözülmektedir. İki bölge arakesitinde tahmini bir başlangıç koşulu ile başlatılan çözümler iteratif bir yöntemle elde edilmektedir. Bu kriterler arakesitte bilinmeyen sürekliliğini sağlayacak şekilde saptanmaktadır. Çözümler, sekiz işletimcinin bulunduğu SGI Origin 3000 Unix işletim sisteminde, PVM (Parallel Virtual Machine) yazılımı kullanılarak elde edilmiştir.

Geliştirilen yöntem; kapağı çekilen küp biçimindeki oyuk içerisindeki akım probleminin Reynolds sayısı 1000 alınarak çözümü için denenmiştir. İki, dört ve altı bölgeli çözümlerde sırasıyla  $2x(13x13x25)$ ,  $4x(7x13x25)$  ve

$6x(5x13x25)$  hesap noktası kullanılmıştır. 25 boyutsuz zaman adımında sonuca ulaşılmış ve tüm hesap zamanına göre 3.12 hızlanma (speed-up) ve CPU zamanına göre de, 5.69 hızlanma elde edilmiştir.  $6x(55x28x10)$  hesap noktası ile de hassas çözümlere ulaşılmıştır. Gerek  $Re=400$  gerekse  $Re=1000$  için elde edilen paralel program sonuçları, referans çözümlerle iyi bir yaklaşım göstermektedir.

## Formülasyon

### Navier-Stokes denklemleri

Zamana bağlı sıkıştırılamaz viskoz bir akışkanın hareketini yöneten denklemler süreklilik denklemi:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

ve momentum (Navier-Stokes) denklemdir:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

Denklemler vektör formda yazılmıştır (buradan itibaren, kalın olarak yazılmış semboller vektör veya matris büyüklükleri gösterecektir). Değişkenler her zaman olduğu gibi referans bir hız ve karakteristik bir uzunluk kullanılarak boyutsuz formda ifade edilmiştir.  $Re$ , Reynolds sayısını ifade etmektedir,  $Re = Ul/\nu$ ,  $U$  karakteristik hız,  $l$  karakteristik uzunluk ve  $\nu$  akışkanın kinematik viskozitesidir. Hız vektörü, basınç ve zaman sırası ile  $\mathbf{u}$ ,  $p$  ve  $t$  ile gösterilmiştir.

### FEM formülasyonu

Denklem (2) nin zayıf formdaki yazılışı aşağıdaki şekildedir,

$$\iint_{\Omega_t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{N} d\Omega dt = \iint_{\Omega_t} (-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} d\Omega dt \quad (3)$$

burada  $\mathbf{N}$  şekil fonksiyonudur. Yarı zaman adımı ile,  $\Delta t/2$ , Denklem (3) ün zaman integrasyonu eski zaman adımı seviyesi  $n$  den  $n+1/2$  yarı zaman adımı seviyesine kadar hesaplanırsa, sonuç şu şekilde ifade edilir:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n) \mathbf{N} d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} (-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} - \nabla p^n) \mathbf{N} d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} \mathbf{N} d\Omega dt. \quad (4)$$

Ara zaman adımını, Denklem (3) ün zaman integrasyonunda, konvektif ve viskoz terimleri  $n+1/2$  ve basınç terimini  $n$  zaman adımında alarak aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) \mathbf{N} d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} (-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} - \nabla p^n) \mathbf{N} d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} \mathbf{N} d\Omega. \quad (5)$$

Tam zaman adımı, Denklem (3) ün zaman integrasyonu  $n$  den  $n+1$  zaman adımına kadar hesaplanması ve basıncın  $n$  ve  $n+1$  zaman adımlarındaki değerlerinin ortalaması kullanılarak yazılması ile elde edilir,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \mathbf{N} d\Omega = \Delta t \int_{\Omega} (-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \nabla \frac{p^n - p^{n+1}}{2}) \mathbf{N} d\Omega. \quad (6)$$

Denklem (6) dan, Denklem (5) in çıkartılması ile Denklem (7) elde edilir:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) \mathbf{N} d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} -\nabla (p^{n+1} - p^n) \mathbf{N} d\Omega. \quad (7)$$

Eğer Denklem (7) nin diverjansı alınırsa, aşağıdaki forma ulaşılır;

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Omega = -\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \nabla^2 (p^{n+1} - p^n) \mathbf{N} d\Omega. \quad (8)$$

Denklem (5) den Denklem (4) ün çıkartılması ara zaman adımı hızını aşağıdaki şekilde verir:

$$\mathbf{u}^* = 2\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n. \quad (9)$$

### Sayısal formülasyon

Poisson denklemini sağlayan yardımcı potansiyel fonksiyonu  $\phi = -\Delta t (p^{n+1} - p^n)$

ifadesi ile tanımlanarak, Denklem (4) aşağıdaki şekilde ayrıklaştırılır:

$$\left( \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{A}}{\text{Re}} \right) \mathbf{u}_{\alpha}^{n+1/2} = \mathbf{B}_{\alpha} + p_e \mathbf{C}_{\alpha} + \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t} \mathbf{u}_{\alpha}^n \quad (10)$$

burada  $\alpha$  Kartezyen koordinatlarda  $x, y$  ve  $z$ ,  $\mathbf{M}$  lumped eleman kütle matrisi,  $\mathbf{D}$  adveksiyon matrisi,  $\mathbf{A}$  katılık matrisi,  $\mathbf{C}$  basınç katsayı matrisi,  $\mathbf{B}$  sınır şartlarından doğan matris ve  $\mathbf{E}$  sıkıştırılmazlıktan dolayı ortaya çıkan ( $\mathbf{D}$  matrisi içinde yer alan) matristir. Denklem (10) direkt çözüm tekniği ile yarı zaman adımı hızlarının elde edilmesini sağlamaktadır.

Denklem (8) in ayrıklaştırılması Denklem (11) de görüldüğü şekildedir:

$$\frac{1}{2} \mathbf{A} \phi = -\frac{1}{2} \mathbf{A} (p^{n+1} - p^n) \Delta t = 2\mathbf{E}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}^{n+1/2} \quad (11)$$

Denklem (6) dan Denklem (5) i çıkarır ve yardımcı potansiyel fonksiyonu  $\phi$  yi yerleştirirsek:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_{\alpha}^{n+1} = 2\mathbf{M} \mathbf{u}_{\alpha}^{n+1/2} - \mathbf{M} \mathbf{u}_{\alpha}^n + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{\alpha} \phi. \quad (12)$$

tam zaman adımındaki hız denklemini buluruz.

Eleman yardımcı potansiyel fonksiyonu  $\phi_e$ :

$$\phi_e = \frac{1}{\text{vol}(\Omega_e)} \int_{\Omega_e} N_i \phi_i d\Omega_e, \quad i = 1, \dots, 8,$$

şekindedir ve  $\Omega$  akış bölgesi,  $N_i$  şekil fonksiyonlarıdır.

Bir zaman adımında çözüme ulaşmak için aşağıdaki basamaklar izlenmektedir:

- i)  $n+1/2$  zaman adımında hız alanı, Denklem (10) un Bölgelere Ayırma metodu ile çözülmesiyle bulunur,
- ii) Yarı zaman adımındaki hız alanı kullanılarak, Denklem (11) yardımcı

- potansiyel fonksiyonunu  $\phi$  bulmak için Bölgelere Ayırma metodu ile çözülür,
- iii) Elde edilen  $\phi$  değeri ile, yeni zaman adımındaki hız alanı,  $\mathbf{u}^{n+1}$ , Denklem (12) yoluyla elde edilir,
- iv) Basınç alanı  $p^{n+1}$ , eski zaman adımındaki basınç değeri  $p^n$  ve  $\phi$  (ii basamağında elde edilen) kullanılarak çözülür.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}\mathbf{y}_i &= \mathbf{f}_i & \Omega_i \text{ bölgesinde} \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{g}_i & \partial\Omega_i \text{ sınırında} \\ \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{n}_i} &= (-1)^{i-1} \boldsymbol{\mu}^k & S_j \text{ arakesitinde} \\ \mathbf{g}^o &= a\mathbf{w}^k - (\mathbf{y}_2^o - \mathbf{y}_1^o) S_j \end{aligned}$$

Yukarıdaki basamaklar istenilen yakınsama sağlanıncaya kadar tekrarlanır.

$$\mathbf{w}^o = \mathbf{g}^o \text{ ve } \boldsymbol{\mu}^o = \boldsymbol{\mu}^k$$

### Paralel çözüm

Bölgelere Ayırma tekniği, (Dinh v. diğ., 1992; Glowinski v. diğ., 1995; Aslan v. diğ., 1999), momentum denklemi (10) ve Poisson denklemi (11) i verimli bir paralizasyonla çözmek üzere uygulanmıştır. Çözüm bölgesi birbirine bitişik alt bölgelere ayrılır (*köleler*) ve her bölge işlemcilerle dağıtılır, her köle kendisine ait bölgede çözüm yapmak ve kendi arakesitlerinde iteratif yöntemle doğru geçiş şartlarını bulmak için hesaplamalar yapmakla görevlidir. Ana işlemci (*baş*), *köleleri* çalıştırmaya başlatmak, paralel çözüm esnasında tüm arakesitler için gerekli katsayıları hesaplamak ve arakesit iterasyonlarının yakınsamasını kontrol etmekle sorumludur. Daha önce uygulanan (Gülçat ve Üstoğlu Ünal, 2000; Üstoğlu Ünal ve Gülçat 2001, Gülçat v. diğ., 2000) paralel çözüm tekniğinde değişiklik yapılmış ve elde edilen son denklemler aşağıdaki çözüm basamaklarında yeniden ifade edilmiştir.

$$\text{burada: } \overline{\mathbf{A}} = \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{D} + \frac{\mathbf{A}}{\text{Re}} \text{ ve } \mathbf{y}_i = \left\{ \mathbf{u}_\alpha^{n+1/2} \right\},$$

(bkz. Denklem (10)).

Yukarıdaki denklemlerde, bölgeler  $\Omega_i$ , bölge sınırları  $\partial\Omega_i$  ve arakesitler  $S_j$  ile gösterilmekte,  $i$  ve  $j$  indisleri sırasıyla bölge numarası ve arakesit numarasını, 1 ve 2 rakamları ise komşu arakesitleri ifade etmektedir. Üst indis  $o$  her zaman adımı başlangıcında arakesit iterasyonları başlamadan önce alınacak ilk değeri ifade etmektedir. Üst indis  $k$  ise yakınsamanın sağlandığı arakesit iterasyon seviyesini göstermektedir.

Sadece birinci zaman adımında,

$$\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{0} \text{ ve } a\mathbf{w}^k = \mathbf{0} \text{ alınır.}$$

*Birim problem:* Arakesitlerde doğru geçiş şartlarını bulmak üzere iterasyon başlar, her bölgede birim problem çözülür ve optimizasyonla doğru Neumann şartları elde edilinceye kadar iterasyon devam eder,

Her zaman adımı başında, her bölgede, ilk çözümler bir önceki zaman adımı arakesit iterasyonları sonucu yakınsamış Neumann şartı ile beraber yapılmakta ve arakesit iterasyonlarını başlatmadan önce seçilen başlangıç şartı, bir önceki zaman adımında yakınsamış değerlere göre düzenlenmektedir:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_i^n &= \mathbf{0} & \Omega_i \text{ bölgesinde} \\ \mathbf{x}_i^n &= \mathbf{0} & \partial\Omega_i \text{ sınırında} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_i^n}{\partial \mathbf{n}_i} &= (-1)^{i-1} \mathbf{w}^n & S_j \text{ sınırında} \end{aligned}$$

*Başlangıç(initialization):* Yarı zaman adımı momentum denklemi (10) her bölgede, arakesitlerde Neumann sınır şartlarını sağlayacak şekilde direkt yöntemle çözülür.

*Optimizasyon (steepest descent):* Baş işlemci kölelerin arakesitte bulunduğu değerlerin farkını kullanarak optimum geçiş şartı bulmaya çalışır, eğer eski iterasyon değeri ile yenisi arasında bulunan fark, iterasyon kriterini sağlamazsa, yakınsamamış olan değerler tekrar kölelere birim problemi yeniden çözmek üzere gönderilir. Eğer yakınsama sağlanırsa arakesit iterasyonu biter ve sonuçlandırma bölümüne geçilir,

$$aw^n = (x_1^n - x_2^n)S_j, \quad g^{n+1} = g^n - \beta^n aw^n$$

$$\beta^n = \frac{\sum_j \int_{S_j} |g^n|^2 ds}{\sum_j \int_{S_j} (aw^n) w^n ds}, \quad s^n = \frac{\sum_j \int_{S_j} |g^{n+1}|^2 ds}{\sum_j \int_{S_j} (g^n)^2 ds}$$

$$w^{n+1} = g^{n+1} + s^n w^n, \quad \mu^{n+1} = \mu^n - \beta^n w^n$$

*Yakınsama kontrolü:*

$$|\mu^{n+1} - \mu^n| < \varepsilon \Rightarrow aw^n = aw^k \text{ ve } \mu^{n+1} = \mu^k$$

Burada üst indis  $n$  arakesit iterasyon seviyesini göstermektedir.

*Sonuçlandırma(finalization):* Her arakesit için elde edilen doğru Neumann sınır şartları ile, her bölgede ana akış problemi son olarak yeniden çözülür.

$$\bar{A}y_i = f_i \quad \Omega_i \quad \text{bölgesinde}$$

$$y_i = g_i \quad \partial\Omega_i \quad \text{sınırında}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial n_i} = (-1)^{i-1} \mu^k \quad S_j \quad \text{sınırında}$$

*Basınç denklemi için:* Elde edilen yarı zaman adımı hız alanı kullanılarak, Denklem (11) her bölgede çözülür ve yukarıdaki hız alanı için uygulanan bölgelere ayırma tekniği basamaklarının aynısı, yardımcı potansiyel fonksiyonu için tekrarlanır, yalnız bu defa,

$\bar{A} = A$  katılık matrisini ifade etmektedir (bkz. Denklem (11)) ve  $y_i = \{\phi: \text{yardımcı potansiyel fonksiyon}\}$ .

Bir adımda çözüme giderken önce momentum denklemi bölgelere ayırma tekniği ile sayısal kapalı çözülür. Denklem (10) yarı zaman adımındaki hız alanını verir ve bu hız alanı Poisson denkleminin (12) sağ tarafında kullanılarak yardımcı potansiyel fonksiyonu elde edilir.

Yardımcı potansiyel fonksiyonu yine bölgelere ayırma tekniği ile çözülür ve arakesitte gereken iteratif çözüm yapılır. Hesaplamalar, iç iterasyon döngüsü ve zaman adımındaki gelişmeler de dahil olmak üzere her makinenin birbiriyle haberleşmesi ile paralel bir şekilde ilerler.

## Sonuçlar ve tartışma

Geliştirilen yöntem; kapağı çekilen küp biçimindeki oyuk içerisindeki akım probleminin çözümü için denenmiştir. Reynolds sayısı 400 ve 1000 seçilmiştir. Sonuçlar 25 boyutsuz zamanda elde edilmiş ve 0.1 gibi büyük bir zaman adımında yakınsama elde edilmiştir. İki, dört ve altı bölgeli çözümlerde sırasıyla 2x(13x13x25), 4x(7x13x25) ve 6x(5x13x25) hesap noktası kullanılmıştır. 25 boyutsuz zaman adımında sonuca ulaşılmıştır. Yarı zaman adımı hızı ve yardımcı potansiyel fonksiyonu için seçilen arakesit iterasyon kriterleri sırası ile  $10^{-5}$  ve  $10^{-6}$  alınmıştır.

Tablo 1'den görüleceği gibi, bu yeni paralel progama ile daha önce, (Gülçat ve Üstoğlu Ünal, 2000; Üstoğlu Ünal ve Gülçat 2001, Gülçat v. diğ., 2000)elde edilen sonuçlara göre, yakınsama hızlanmış, iterasyonlar % 50 oranında azalmış ve dolayısıyla paralel performans önemli ölçüde artmıştır, süper-lineer hızlanma elde edilmiştir. Bu son yeni yöntem ile, hızlanma değeri köle işlemcilerin CPU hesap zamanına göre hesaplandığında, dört bölge çözümü ile 3.31 e ve 6-bölge ile 5.69 a kadar çıkmaktadır. Tüm hesap zamanına göre hesaplanmış, ilk paralel çözüm yöntemi ile elde

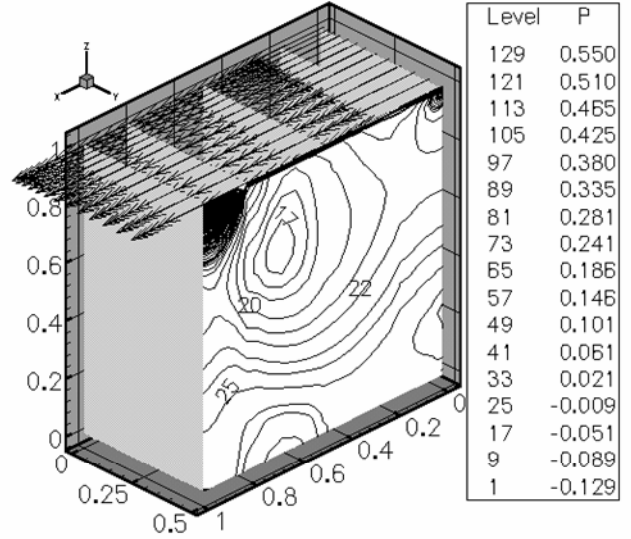
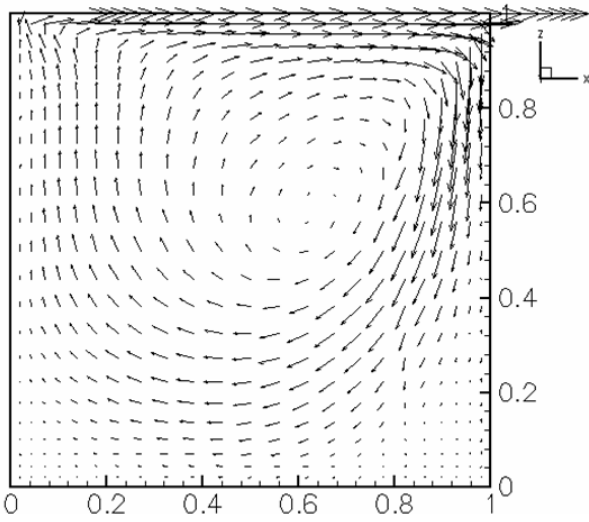
edilen hızlanma, dört bölge çözümünde 2.71 e ve altı bölge çözümünde 3.12 ye yükselmektedir. Hızlanma değerleri hesaplanırken 2-bölgeli çözümün hesap zamanı baz alınmıştır.

4x(7x13x25) hesap noktasında  $Re=400$  için elde edilmiş hız ve basınç alanları Şekil 1’de, 6x(55x28x10) hesap noktasında elde edilmiş, simetri düzlemindeki hız ve basınç alanları  $Re=1000$  için Şekil 2’de gözlenebilir.

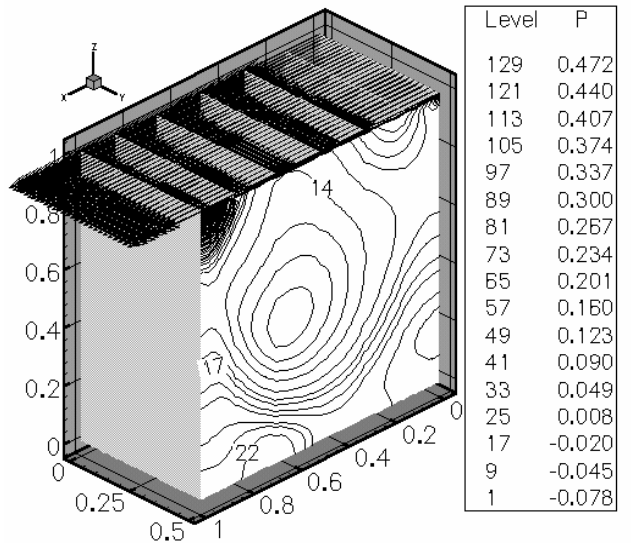
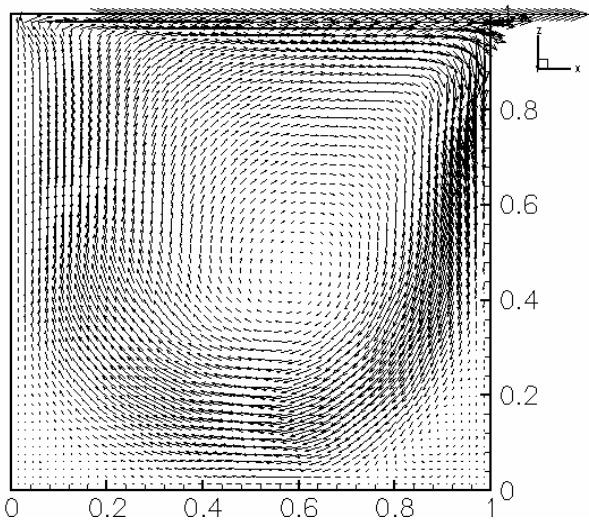
2, 4 ve 6 bölge toplam 25x13x25 hesap noktası ile yapılan sayısal çözümlerin, göreceli CPU hesap zamanı karşılaştırması Şekil 3’te gözlenebilir.

Tablo 1. Paralel çözüm performans sonuçları

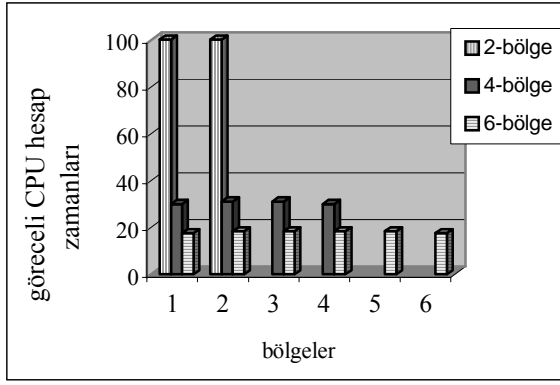
SGI ORIGIN 3000			
kapağı çekilen küp oyuk $Re=1000, \Delta t=0.1$			
Bölge sayısı	2	4	6
Tüm hesap zamanı (s)	471	174	151
Hızlanma (tüm hesap zamanı)	1	2.71	3.12
Hızlanma (CPU zamanı)	1	3.31	5.69



Şekil 1. Simetri düzleminde hız ve basınç alanları,  $Re=400$ , 4 x (7x13x25)



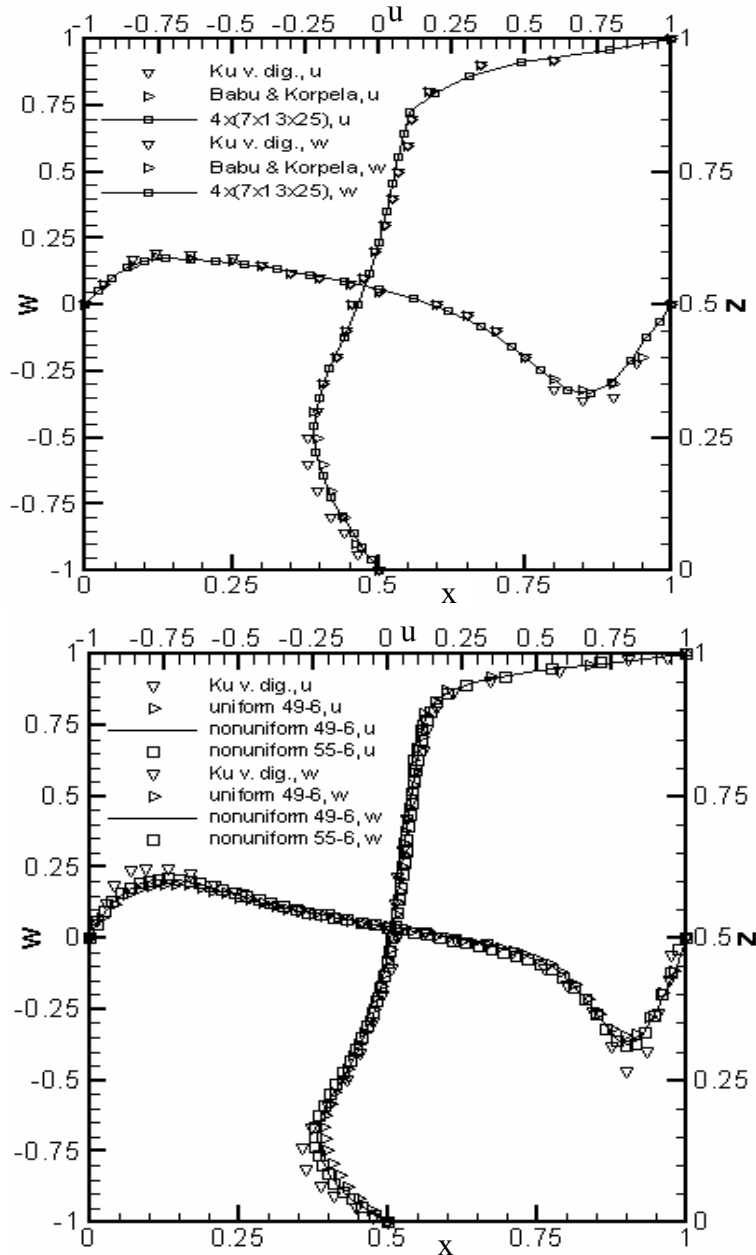
Şekil 2. Simetri düzleminde hız ve basınç alanları,  $Re=1000$ , 6 x (10x28x55)



Şekil 3. 2, 4 ve 6-bölgeli çözümlerde, göreceli paralel hesap(CPU) zamanları

Sonuçlar, referans sonuçları (Ku v. diğ., 1987; Babu ve Korpela, 1994) ile daha kaba hesap ağı kullanılmasına rağmen iyi bir uygunluk göstermektedir.

Re=400 için referans (Babu ve Korpela, 1994) sonucuna bakıldığında, 63x33x63 hesap noktası ile ulaşılan hassasiyetten fazlasına, bu çalışmada toplam 25x13x25 hesap noktası ile ulaşılabilmektedir. Simetri düzleminde merkez boyunca yatay ve dikey hız karşılaştırmaları Re=400 ve Re=1000 için Şekil 4’te izlenebilir.



Şekil 4. Simetri düzlemi orta yatay ve dikey eksenleri boyunca hız dağılımı, Re=400 (üstte) ve Re=1000 (altta)

## Semboller

$\mathbf{D}$	: Adveksiyon matrisi
$n$	: Arakesit iterasyon seviyesi
$p$	: Basınç
$\mathbf{C}_\alpha$	: Basınç katsayı matrisi
$e$	: Eleman değeri
$n$	: Eski zaman adımı seviyesi
$d\Omega$	: Hacim elemanı
$\mathbf{u}=\mathbf{u}(u, v, w)$	: Hız vektörü
$d\Gamma$	: Hacim elemanının sınırı
$\Omega_i$	: $i$ . bölge
$S_j$	: $j$ . arakesit
$o$	: İlk arakesit iterasyon seviyesi
$Y_i$	: $i$ numaralı bölgedeki bilinmeyen
$\alpha$	: Kartezyen koordinatlar $x, y, z$
$U_o$	: Karakteristik hız
$l$	: Karakteristik uzunluk
$\mathbf{A}$	: Katılık matrisi
$\nu$	: Kinematik viskozite
$\mathbf{M}_{ij}$	: Kütle matrisi
$\mathbf{u}^*$	: Orta zaman adımı hızı
$Re$	: Reynolds sayısı
$h_\alpha$	: Sınır tabaka verisi
$\phi$	: Yardımcı potansiyel fonksiyonu
$\mu^k$	: Yakınsamış arakesit Neumann sınır şartı
$w^n$	: Yakınsamamış arakesit Neumann sınır şartı
$n + \frac{1}{2}, n+1$	: Yarı ve tam zaman adımları
$t$	: Zaman
$\Delta t$	: Zaman adımı büyüklüğü

## Kaynaklar

- Aslan A. R., Edis F.O., Gülçat Ü ve Mısırlıoğlu A., (1999). Accurate Incompressible N-S Solution on Cluster of Workstations, *Parallel CFD'98*, Edited by C.A.Lin et al, Elsevier, Amsterdam.
- Babu V. ve Korpela S. A., (1994). Numerical Solution of the Incompressible Three-Dimensional Navier-Stokes Equations, *Computer Fluids*, **23**, 5, 675-691.
- Dinh Q. V., Ecer A., Gülçat Ü., Glowinski R. ve Periaux J., (1992). Concurrent Solutions of Elliptic Problems via Domain Decomposition, Applications to Fluid Dynamics, *Parallel CFD'92*, May 18-20, Rutgers University.
- Glowinski R. ve Periaux J., (1982). Domain Decomposition Methods for Nonlinear Problems in Fluid Dynamics, *Research Report*, INRIA, France. **147**.
- Glowinski R., Pan T. W. ve Periaux J., (1995). A One Shot Domain Decomposition/Fictitious Domain Method for the Solution of Elliptic Equations, *Parallel CFD'95*, Elsevier.
- Gülçat Ü. ve Aslan R. A., (1997). Accurate 3D Viscous Incompressible Flow Calculations with the FEM, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25**, 985-1001.
- Gülçat Ü., Üstoğlu Ünal V., (2000). Accurate Implicit Solution of 3D Navier-Stokes Equations on Cluster of Workstations, *Pro. of Parallel CFD 2000 Conference*, Trondheim, Norway, Elsevier.
- Gülçat Ü., Aslan A. R., Üstoğlu Ünal V., (2000). Accurate Implicit Solution of 3D Navier-Stokes Equations, *ECCOMAS 2000 Conference*, Barcelona.
- Ku H. C., Hirsh R. S. ve Taylor T. D., (1987). *Journal of Computational Physics*, **70**, 439.
- Üstoğlu Ünal, V., Gülçat, Ü., (2001). Üç boyutlu Navier-Stokes denkleminin paralel, hassas kapalı sayısal çözümü, **XII. Ulusal Mekanik Kongresi**, Konya.