

Tekil değerlerin ayrıştırılması (TDA) yöntemi ile duyarlılık analizi

Hakan ERSOY*, **Ata MUĞAN**

İTÜ Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 34437, Gümüşsuyu, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, lineer cebirin araçlarından olan Tekil Değerlere Ayrıştırma "TDA" (Singular Value Decomposition, SVD) metodu, yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı analizlerine uygulanarak TDA'ya dayalı duyarlılık analizi yöntemi geliştirilmiştir. Bir yapısal sistemin tekil değerlerinin şekillendirilmesi, aynı zamanda sistem cevabının belirlenmesi anlamına gelmektedir. Buradan hareketle, geliştirilen TDA'ya dayalı duyarlılık analizi yöntemi ile mevcut klasik tasarım duyarlılığı metodlarının statik, dinamik analizler, çoklu yükleme hali ve yapısal gürbüzlük gibi alanlarda karşılaştırmaları yapılmış ve yöntemin performansı sayısal örnekler üzerinde denenmiştir. Yöntemin belli alanlarda klasik metodlara göre daha fazla bilgi açığa çıkarmasının yanı sıra, hesaplamalı alanda işlemci süresi ve hafıza kullanımında büyük avantajlara sahip olduğu görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: *Tasarım duyarlılık analizi, tekil değerler, tekil değerlere ayrıştırma, en kötü yükleme hali, yapısal gürbüzlük.*

Design sensitivity analyses of structures based on singular value decomposition

Abstract

In this study, the singular value decomposition (SVD) is employed for design sensitivity analyses of structures. As the squares of singular values are the bounds of power, energy and power spectral density ratios between the input and output vectors, shaping the singular values of a structure. is equivalent to shaping the response of the structure. Comparison is made of the proposed sensitivity analysis based upon the SVD with static and dynamic responses, and eigenvalue design sensitivity analyses. The issues such as structural robustness, worst loading case and multiple load cases are studied. As shown, design sensitivity analyses based upon the SVD can give good insight into static and dynamic response characteristics of structures. Several numerical examples are also presented to illustrate the proposed approach. As a result, the SVD based analysis is compared with the classical techniques yield more information and computationally advantageous particularly in case of multiple load cases, finding worst case loading and sensitivity bounds of a structure. Another advantage of this method is that it is well suited for finite element method equations which is the most popular method among computational methods especially in modeling continuous structures. That's why the proposed method can be applied to sensitivity and optimization algorithms of well-known commercial analysis softwares such as Ansys, Nastran etc.

Keywords: *Design sensitivity analysis, singular values, singular value decomposition, worst case loading, structural robustness.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Hakan ERSOY. ersoyhaka@itu.edu.tr; Tel: 212 293 13 00/2488.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makina Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı analizlerinin Tekil Değerlere Ayrıştırma (TDA) metoduna dayalı olarak yapılması" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 04.08.2003 tarihinde dergiye ulaşılmış, 04.12.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Bir yapısal sistemin tasarlanmasındaki temel noktalardan birisi de tasarım parametrelerindeki değişime karşı sistemin verdiği cevaptır. Tasarım duyarlılığı analizi, sistem parametreleri ile sistemin belirli alanlardaki performansları aracılığıyla tanımlanan sistem cevabı arasındaki ilişkileri açığa çıkarır. Yapısal sistemin tasarım değişkenleri olarak kesit atalet momenti, plaka kalınlığı, çubuk elemanların kesit alanı, elastisite modülü gibi değerleri, sistem cevabı olarak da şekil değişimi, gerilme büyüklüğü, doğal frekans, burkulma yükü gibi kavramları örnek olarak gösterebiliriz. Duyarlılık analizlerinde, tasarım parametrelerindeki değişime karşı sistem cevabının bulunması, bazı performans değerlerinin belirli parametre değişimlerine karşı gösterdiği değişimin belirlenmesi ile olmaktadır. Bu işlemler cebirsel denklemlerin çözümü, özdeğer problemleri, matris cebri, veya diferansiyel denklem çözümleriyle gerçekleştirilmektedir. Yapısal duyarlılık analizlerinde kullanılmakta olan çeşitli klasik yöntemler mevcut olmakla birlikte yapısal sistemlerin tasarım duyarlılık analizlerinin yapılmasında şimdiye kadar sistemin tekil değer ve tekil vektörlerinin davranışlarına bakılmamıştır.

Halbuki tekil değerlere ayrıştırma, TDA (Singular Value Decomposition, SVD) işlemi çok çeşitli alanlarda kullanılıyor olmasının yanı sıra, sistemlerin giriş-çıkış ilişkilerinin incelenmesinde de oldukça başarılıdır. Özellikle bir yapısal sistemin tekil değerleri özel bir anlama sahiptir. Çünkü tekil değerlerin kareleri ile giriş-çıkış vektörlerinin güç, enerji ve güç spektrumu arasında oransal bir bağ vardır. Buradan hareketle, sisteme ait tekil değerlerin biçimlendirilmesi ile sistem cevabı şekillendirilebilmektedir. Ayrıca, tekil vektörler, giriş ile çıkış değerleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu bize söyleyebilmektedir.

Bu çalışmada, çok değişkenli kontrol sistemlerinin giriş-çıkış özelliklerinin incelenmesinde kullanılmakta olan TDA metodu, hesaplamalı mekanik ve sistem teorisi disiplinlerinin karşılıklı etkileşimi ile yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı analizine uygulanmıştır.

Çalışmada, sonlu elemanlar denklem sistemleri kullanılarak yapısal sistemlerin statik ve dinamik

duyarlılık analizleri TDA'ya dayalı olarak çıkarılmıştır. Geliştirilen TDA temeline dayalı duyarlılık analizi ile diğer mevcut olan klasik duyarlılık tekniklerinin karşılaştırması yapılmıştır. Ayrıca metodun performansı, farklı duyarlılık analiz tiplerini içerecek şekilde sayısal örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Tasarım duyarlılığı analizi

Bir yapısal sistemin tasarım aşamasında iken giriş ve çıkış parameterlerinin arasındaki ilişkinin baştan bilinebilmesi halinde, ürünün nihai performansının yükseltilmesi, tasarım süresinin kısaltılması ve prototip adetinin düşük tutulması konularında önemli ilerlemeler sağlanabileceği açıktır. Duyarlılık kavramı, sistem cevabındaki değişim miktarının, bu değişime sebep olan tasarım parametrelerindeki değişime oranı olarak tarif edilmektedir. Bunu, en genel anlamda:

$$\text{Duyarlılık} = \frac{\Delta \text{ Sistem cevabı}}{\Delta \text{ Giriş parametresi}}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu tanımlama, aynı zamanda duyarlılık ifadelerinin türevsel denklemlerle gelişeceğinin de göstergesidir. Diğer taraftan, tasarım duyarlılığı ve optimizasyonu birbirlerinden ayrı konular olmakla birlikte, yakın ilişki içerisindedirler. Optimizasyon işlemi belirlenen kısıtlar dahilinde en iyi tasarımı elde etmeye çalışırken, kendi algoritmalarının içerisinde duyarlılık katsayıları ve sonuçlarını da kullanabilmektedir.

Duyarlılık metodları statik, dinamik veya özdeğer duyarlılığı gibi analizin türüne göre bazı farklılıklar göstermekle birlikte, matematiksel olarak matris ve vektör türevleri olarak gelişmektedir. Problemin tipine bağlı olarak elde edilen differansiyel ifadesinin çözümünde doğrudan türevleme veya bitişik (adjoint) değişkeni metodları kullanılmaktadır.

Parça boyutlarının tasarım değişkenleri olarak alınması durumunda genelleştirilmiş global katılık matrisi ve şekil değiştirme vektörü tasarım değişkenlerinin fonksiyonu olmaktadır:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_g(b) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_g = \mathbf{z}_g(b) \quad (2) \quad m < n \text{ durumunda ise:}$$

Burada $\mathbf{b}=[b_1, b_2, \dots, b_k]^T$ şeklinde tasarım değişkenleri bir vektörün elemanlarını oluşturacak tarzda yazılmıştır.

Yapısal sistemlerin optimum tasarımlarının yapılmasında izlenen yol, belirli sınır koşulları altındaki sistemin tasarım değişkenlerine bağlı olarak tanımlanan maliyet veya temel fonksiyonunun minimize yada maksimize edilmesidir. Buradan hareketle yapısal sistemlerde:

$$\Psi = \Psi(b, \mathbf{z}_g(b)) \quad (3)$$

şeklinde tanımlanan genel bir performans ölçüm fonksiyonunu ele alırsak, tasarım duyarlılığı bu fonksiyonun giriş parametrelerindeki değişime karşı verdiği cevap olacaktır. Bu durum, en genel halde $d\Psi/d\mathbf{b}$ türevinin bulunması olarak tanımlanabilir (Haug 1986).

Tekil değerlere ayrıştırma (TDA) işlemi TDA'nın cebirsel açıklaması

Reel veya kompleks en genel haldeki her matris:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times m} \mathbf{\Sigma}_{m \times n} \mathbf{V}_{n \times n}^* \quad (4)$$

[Matris]=[Ortogonal/unitary].[Diagonal].[Ortogonal/unitary]

şeklinde üç ayrı matrisin çarpımı olacak tarzda ayrıştırılabilir. Eğer \mathbf{A} matrisi reel ise $*$ \equiv T (transpoz), eğer \mathbf{A} matrisi kompleks ise $*$ \equiv H (eşlenik transpoz) olacaktır. Ayrıca \mathbf{A} matrisinin reel olması durumunda ortogonallık, kompleks olması durumunda unitary matris söz konusudur. (4) ifadesinde \mathbf{U} 'nun kolonları sol tekil vektörler, \mathbf{V} 'nin kolonları sağ tekil vektörler, $\mathbf{\Sigma}$ 'nin diagonal elemanları ise tekil değerleri içerir. $\mathbf{U}=[\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_m]$ ve $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n]$ olur. Eğer $m = n$ ise:

$$\mathbf{\Sigma} = \text{Diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \quad (5)$$

$m > n$ ise:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_d \\ \mathbf{O}_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_d & \mathbf{O}_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

şeklinde dir. Burada $\mathbf{\Sigma}_d = \text{Diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, $p = \min(m, n)$, $\mathbf{O}_{ixj} \in R^{ixj}$ olarak verilmektedir.

$\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri için $\lambda_1 = \sigma_1^2$, $\lambda_2 = \sigma_2^2$, $\dots, \lambda_n = \sigma_n^2$ olarak yazılabilir. Aralarındaki ilişki pozitif belirlilikten dolayı $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ve $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$ şeklindedir. Burada $r = \text{Rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, bulunan özdeğerler $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 'nın özdeğerleridir ve bunlara karşılık gelen özvektörler $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ olarak bulunabilir. Bu tekil vektörler, \mathbf{V} matrisinin kolonlarını sağ tekil vektörler olarak oluştururlar. $\mathbf{V}_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$, $\mathbf{V}_2 = (\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ olarak yazabiliriz. Buradaki \mathbf{v}_1 'den \mathbf{v}_r 'e kadar olan vektörler sıfırdan farklı $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ özdeğerlerine karşılık gelmektedir. Diğer grupta kalan $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ sıfır özdeğerlere karşılık gelen vektörlerdir. Sıfırdan farklı $\{\mathbf{u}_i\}$ sol tekil vektörler:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (8)$$

ifadesi ile elde edilir ve \mathbf{u}_i 'ler $i=1, \dots, r$ ortonormal set formundadır. $\mathbf{U}_1 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$, yukarıda açıklandığı şekilde bulunurken, $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ 'nin ortogonal olması sebebiyle $\mathbf{U}_2 = (\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m)$, bölümü ortogonalite kuralını sağlayacak tarzda belirlenir.

Diğer taraftan \mathbf{u}_i ve \mathbf{v}_i 'lerin sırasıyla $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ ve $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 'nın ortonormal özvektörleri olduğundan hareket edersek:

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I} \text{ ve } \mathbf{A} \mathbf{A}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^2 \quad (9)$$

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^H = \mathbf{I} \text{ ve } \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^2 \quad (10)$$

ifadeleri yazılabilmektedir. \mathbf{I} birim matrisi göstermektedir. Sonlu elemanlar ifadesindeki katılık matrisinin kare olduğunu düşünürsek, bunlara ilave olarak \mathbf{A} matrisinin kare olması durumunda $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$ ise:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U} \quad (11)$$

olur. Her ne kadar \mathbf{A} matrisinin tekil değerleri tek olarak belirlenirken, özvektörler tek değildir. Eğer $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$ ise $\mathbf{A}=\mathbf{U}'\mathbf{\Sigma}'\mathbf{V}'^H$ yazılabilir. Burada θ herhangi bir değer alırken $\mathbf{U}'=\mathbf{U}e^{j\theta}$, $\mathbf{V}'=\mathbf{V}e^{j\theta}$ değerlerine sahiptir.

TDA'nın sonlu elemanlar denklemlerine uygulanması

Bu bölümde TDA'nın zamana bağlı ve zamandan bağımsız problemlerde sonlu elemanlar denklemlerine nasıl uygulanacağı üzerinde durulacaktır. Sonlu elemanlar ifadelerinde kullanılan:

$$\mathbf{Kd}=\mathbf{f} \quad (12)$$

doğrusal denklem sistemini ele alırsak, burada, en genel halde, $\mathbf{K}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ olarak sistemin katılık matrisi, $\mathbf{d}\in\mathbb{C}^n$ şekil değiştirme vektörü ve $\mathbf{f}\in\mathbb{C}^n$ sistemin girişini temsil eden yük vektörü, olacak tarzda $\mathbf{d}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ şeklinde ifade edilebilir. \mathbf{K}^{-1} 'nin TDA'sı için $\mathbf{K}^{-1}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}^H$, yazılabilir. Burada $\mathbf{U}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{\Sigma}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ve $\mathbf{V}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ dir. Sistemin farklı giriş doğrultularında farklı kazançlarının olduğunu gösterilmesi amacıyla \mathbf{K}^{-1} 'in TDA'sı diyadik formda ifade edilebilir:

$$\mathbf{K}^{-1}=\sum_{i=1}^n\sigma_i^{-1}\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^H \quad (13)$$

fiziksel sistemlerde tekil değerlerin ayrı olduğundan yola çıkılarak, kuvvet vektörü \mathbf{f} 'in k .ıncı sağ tekil vektöre eşit olması halinde $\mathbf{f}=\mathbf{v}_k$ için:

$$\mathbf{d}=\sum_{i=1}^n\sigma_i^{-1}\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^H\mathbf{v}_k \quad (14)$$

ifadesini elde ederiz. \mathbf{v}_i 'lerin ortonormal olması sebebiyle $\mathbf{v}_i^H\mathbf{v}_k=\delta_{ik}$ yazılabilir. Burada δ_{ik} kronecker delta fonksiyonudur. Böylece:

$$\mathbf{d}=\sigma_k^{-1}\mathbf{u}_k \quad (15)$$

$$\|\mathbf{d}\|_2=\sigma_k^{-1} \quad (16)$$

ifadelerine ulaşılır. Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere, \mathbf{f} 'in \mathbf{v}_k ile aynı doğrultuda olması halinde (15) denklemden çıkış durumunda olan \mathbf{d}

vektörü \mathbf{u}_k doğrultusunda olacaktır. (16) ifadesi ise sistemin kazancının σ_k olacağını göstermektedir. Böylece her bir sağ tekil vektörle temsil edilen girişlerin ne şekilde bir çıkışa sebep olacağı sol tekil vektörler aracılığıyla ortaya konmaktadır. Karşılık gelen tekil değerler ise giriş çıkış arasındaki kazanç faktörünü belirtmektedir (Freudenberg, 1988). TDA'nın yapısal dinamiğe ait uygulaması için:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}+\mathbf{K}\mathbf{d}=\mathbf{f} \quad (17)$$

matris denklemini alırsak. Burada $\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ kütle matrisi, $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ viskoz sönüm matrisi, $\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ katılık matrisi, $\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n$ dış kuvvet vektörü, $\mathbf{d},\dot{\mathbf{d}}$ ve $\ddot{\mathbf{d}}\in\mathbb{R}^n$ sırasıyla şekil değiştirme, hız ve ivme vektörleridir. (17) ifadesinin Laplace dönüşümünden:

$$\mathbf{D}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s) \quad (18)$$

elde ederiz. İfadede s kompleks Laplace dönüşüm değişkenidir. $\mathbf{D}(s)$ ve $\mathbf{F}(s)$ vektörleri sırasıyla $\mathbf{d}(t)$ ve $\mathbf{f}(t)$ 'nin Laplace dönüşümleri, $\mathbf{G}(s)$ transfer fonksiyon matrisidir ve:

$$\mathbf{G}(s)=(\mathbf{M}s^2+\mathbf{C}s+\mathbf{K})^{-1} \quad (19)$$

şeklinde tanımlanır. ω frekansındaki $\mathbf{f}=\tilde{\mathbf{f}}\sin(\omega t)$ sinuzoidal girişe ait sistem cevabı olan $\mathbf{D}(j\omega)$ sürekli rejim çıkışı:

$$\mathbf{D}(j\omega)=\mathbf{G}(j\omega)\tilde{\mathbf{f}} \quad (20)$$

ifadesi ile verilir. Burada $\tilde{\mathbf{f}}$ giriş vektörünün şiddeti, j kompleks değişkenidir. (20) denkleminde $D_i(j\omega)$ şiddeti çıkış vektörü \mathbf{d} 'nin i .inci elemanının şiddetine karşılık gelmektedir. Bu esnada $D_i(j\omega)$ 'nin faz açısı, \mathbf{d} çıkış vektörünün i .nci elemanı ile \mathbf{f} giriş vektörünün arasındaki faz açısı kadardır. Statik durumdakine benzer şekilde, eğer $\tilde{\mathbf{f}}$ giriş vektörü \mathbf{v}_k doğrultusunda ise, $\mathbf{D}(j\omega)$ cevabı σ_k kazancı ile \mathbf{u}_k doğrultusunda olacaktır. $\mathbf{G}(j\omega)$ 'nin tekil değerleri ve tekil vektörleri tahrik frekansı ω 'nın fonksiyonudur.

TDA ve duyarlılık analizi

Yapısal sistem denklemlerinin ifade (18)'deki gibi Laplace değişkenlerini içerdiğini ve ω

frekansına sahip tahrik uygulandığını varsayarsak, (kısa gösterim amacıyla $s=j\omega$ yazılmayacaktır) \mathbf{G} 'nin TDA'sı $\mathbf{G}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H$ şeklinde yazılabilir. Bir sisteme herhangi bir girişi, $\{\mathbf{v}_i\}$ vektörünü temel alarak:

$$\mathbf{F}=\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i \quad (21)$$

formuyla temsil edebiliriz. Buradaki a_i katsayısı, \mathbf{v}_i 'lerin ortonormal olması özelliği kullanılarak:

$$a_i = \langle \bar{\mathbf{v}}_i, \mathbf{F} \rangle \quad (22)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir. $\langle \rangle$ iç çarpımı, üst çizgi ise eşleniği göstermektedir. \mathbf{D} çıkışı:

$$\mathbf{D} = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \mathbf{u}_i \quad (23)$$

ifadesi ile hesaplanır. Ayrıca i .inci çıkış ile j .inci giriş arasındaki transfer fonksiyon matris elemanları:

$$G_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial F_j} = \sum_{m=1}^n \sigma_m u_{m,i} \bar{v}_{m,j} \quad (24)$$

ile bulunabilir. Burada D_i , \mathbf{D} matrisinin i .nci elemanı, $u_{m,i}$, \mathbf{u}_m 'nin i .nci elemanı, σ_m ise \mathbf{G} 'nin m .nci tekil değeridir. Dikkat edilecek bir nokta G_{ij} , σ_n ile doğru orantılı olduğudur. Ayrıca ifadelerle bakıldığında giriş-çıkış duyarlılığının doğal olarak tahrik frekansı ω 'nın bir fonksiyonu olduğu görülür.

Enerji yayını ve tekil değerler

Mac Farlane, (1979) ve Postlethwaite, (1981)'de tekil değerlerin frekans alanındaki davranışları belli kazanç limitleri dahilinde gösterilmiştir. İfadelerde ω frekansına sahip periyodik bir \mathbf{f} giriş sinyalinin bir periyodluk alan için sürekli rejim çıkışlarının, \mathbf{d}_{ss} ortalama değerlerinin toplamı:

$$\begin{aligned} SMSVO(j\omega) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{d}_{ss}^T(t) \mathbf{d}_{ss}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{S}(j\omega) \mathbf{f} \end{aligned} \quad (25)$$

olarak verilmektedir. Burada:

$$\mathbf{S}(j\omega) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{G}^H(j\omega) \mathbf{G}(j\omega) + \overline{\mathbf{G}^H(j\omega) \mathbf{G}(j\omega)} \right] \quad (26)$$

Diğer taraftan girişe ait ortalama değerlerin toplamı bir periyod için:

$$SMSVI = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{f}^T(t) \mathbf{f}(t) dt = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{f} \quad (27)$$

ve

$$\sigma_1^2(j\omega) \geq \frac{SMSVO(j\omega)}{SMSVI} \geq \sigma_n^2(j\omega) \quad (28)$$

şeklinindedir. Periyodik olmayan bir giriş için (28) denklemi:

$$\sigma_1^2(j\omega) \geq \frac{\|\hat{\mathbf{d}}(j\omega)\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{f}}(j\omega)\|_2^2} \geq \sigma_n^2(j\omega) \quad (29)$$

olmaktadır. Burada:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{d}}(j\omega)\|_2^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{d}_i(j\omega)|^2}{\sum_{i=1}^n |\hat{f}_i(j\omega)|^2} \end{aligned} \quad (30)$$

şeklindeki denklem ω frekansındaki enerji çıkışları toplamının ω frekansındaki enerji girişleri toplamına oranı olarak açıklanabilir. İfadedeki şapkalı değişkenler Fourier dönüşümü yapılmış değişkenleri tanımlamaktadır.

$$\hat{f}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (31)$$

Stochastic bir giriş sinyali için (28) ifadesi,

$$\sigma_1^2(j\omega) \geq \frac{iz(P_d(j\omega))}{iz(P_f(j\omega))} \geq \sigma_n^2(j\omega) \quad (32)$$

olur. $P_d(j\omega)$ ve $P_f(j\omega)$ giriş ve çıkış vektörlerinin kovarians matrislerinin Fourier dönüşümleridir. İspatlar Mac Farlane (1979) ve Postlethwaite (1981)'de verilmiştir.

(28) ve (29) ifadelerine bakıldığında $\sigma_1^2(j\omega)$ ve $\sigma_n^2(j\omega)$ nin periyodik giriş sinyalleri için ortalama güç oranlarının, periyodik olmayan sinyaller için ise enerji oranlarının sınırını oluşturduğu görülmektedir. Girişin \mathbf{v}_1 doğrultu-

sunda olması durumunda üst sınır şartı, \mathbf{v}_n doğrultusunda olması halinde ise alt sınır şartı gerçekleşmektedir. Böylece yapısal bir sistemin tekil değerleri şekillendirilerek, diğer bir değişle, tekil değerlerin sayısal büyüklüklerine müdahale edilerek yapısal sistemin cevabı belirlenmiş olmaktadır.

Tekil değerler ve vektörlerin tasarım duyarlılığı

Yapısal bir sistemin, $\mathbf{G}=\mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H$ şeklinde transfer fonksiyonu matrisinin TDA'sını ele alırsak ($s=j\omega$ 'yu kısa gösterim amacıyla yazmadığımızı düşünerek) b 'yi tasarım değişkeni olarak kabul edelim. Buradaki önemli bir nokta $\sigma_i(b)$ ifadeleri genellikle türevlenebilen ifadeler içermemektedir. Bu nedenle σ_i , \mathbf{u}_i , ve \mathbf{v}_i fonksiyonlarının Δb tasarım değişkenine göre sayısal anlamda sonuç üreten Gateaux türevleri kullanılacaktır. Dyadik

gösterimle yazdığımız $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H$ transfer

fonksiyon matrisinin Gateaux türevini alırsak:

$$\delta \mathbf{G}(b; \Delta b) = \sum_{i=1}^n (\delta(\mathbf{u}_i(b; \Delta b)) \sigma_i \mathbf{v}_i^H + \mathbf{u}_i \delta(\sigma_i(b; \Delta b)) \mathbf{v}_i^H + \mathbf{u}_i \sigma_i \delta(\mathbf{v}_i^H(b; \Delta b))) \quad (33)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Diğer taraftan $\delta \sigma_i(b; \Delta b)$ ifadesinin türevi (Freudenberg 1982):

$$\delta \sigma_i(b; \Delta b) = R \left[\mathbf{u}_i^H \delta [\mathbf{G}(b; \Delta b)] \mathbf{v}_i \right] \quad (34)$$

şeklindedir. Buradaki $R[\cdot]$ parantez içersindeki ifadenin reel kısmı temsil etmektedir. $\delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b)$ ifadesi için \mathbf{u}_i denkleminin her iki tarafının Gateaux türevlerini alırsak:

$$\delta(\mathbf{G} \mathbf{G}^H(b; \Delta b)) \mathbf{u}_i + \mathbf{G} \mathbf{G}^H \delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) = 2 \sigma_i \mathbf{u}_i \delta \sigma_i(b; \Delta b) + \sigma_i^2 \delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) \quad (35)$$

bulunmaktadır. Bu ifadenin düzenlenmesiyle:

$$\left(\mathbf{G} \mathbf{G}^H - \sigma_i^2 \mathbf{I} \right) \delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) = 2 \sigma_i \mathbf{u}_i \delta \sigma_i(b; \Delta b) - \delta [\mathbf{G} \mathbf{G}^H(b; \Delta b)] \mathbf{u}_i \quad (36)$$

elde edilmektedir. Benzer şekilde bu ifadenin de Gateaux türevleri alınarak düzenlenmesi ile:

$$\left(\mathbf{G}^H \mathbf{G} - \sigma_i^2 \mathbf{I} \right) \delta \mathbf{v}_i(b; \Delta b) = 2 \sigma_i \mathbf{v}_i \delta \sigma_i(b; \Delta b) - \delta [\mathbf{G}^H \mathbf{G}(b; \Delta b)] \mathbf{v}_i \quad (37)$$

denklemini bulunmaktadır (Freudenberg 1988). Böylelikle bir kez $\delta \mathbf{G}(b; \Delta b)$, $\delta [\mathbf{G}^H \mathbf{G}(b; \Delta b)]$ ve $\delta [\mathbf{G} \mathbf{G}^H(b; \Delta b)]$ hesaplandıktan sonra (34), (36) ve (37) denklemleri kullanılarak sırasıyla $\delta \sigma_i(b; \Delta b)$, $\delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b)$ ve $\delta \mathbf{v}_i(b; \Delta b)$ değerleri bulunabilmektedir. Tekil değerler ve tekil vektörlere ait sayısal Gateaux türevlerinin bu şekilde bulunması, sonlu farklar denklemlerinin kullanılarak bulunmasına göre sayısal olarak daha kararlı ve hesaplamalı alanda CPU süresi ve hafıza kullanımı bakımından daha avantajlıdır.

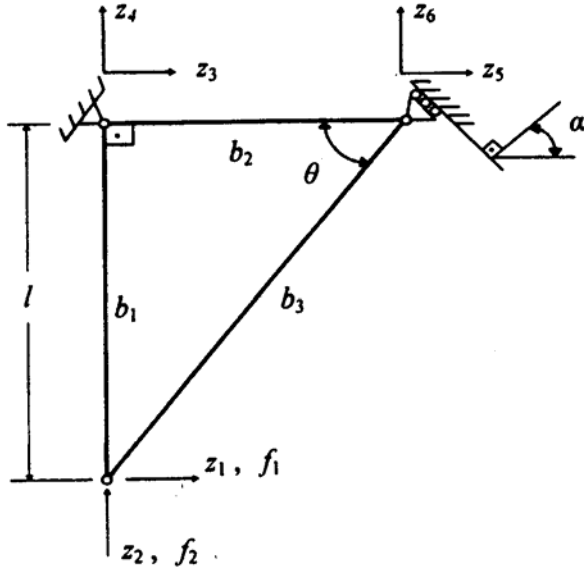
Bu tarzda yapılan hesaplama işlemlerinde her bir tasarım parametresindeki Δb değişimine karşılık \mathbf{G} 'nin TDA'sının tekrar hesaplanması zorunluluğu ortadan kalkmaktadır. Ayrıca (11)'deki özellik sayesinde, \mathbf{G} 'ye ait \mathbf{u}_i ve \mathbf{v}_i 'leri bulmak için (19)'daki matris tersi alma işlemine de gerek kalmamaktadır. Diğer taraftan yapısal sistem cevabının sınırları ile ilgilenilmesi durumunda sadece en büyük ve en küçük tekil değerler ile onlara karşılık gelen tekil vektörleri hesaplamak yeterlidir (Golub, 1983). Diğer tekil değer ve vektörlerin hesaplanmasına gerek yoktur. Bu durum, hesaplama süresi ve hafıza kullanımı açısından büyük avantaj sağlamaktadır.

Yapısal sistemlere ait duyarlılık analizleri ve sayısal örnekler

Bu bölümde, çalışmada geliştirilen yöntem, çeşitli duyarlılık analiz tiplerini içerecek şekilde sayısal örnekler üzerinde izah edilmiş karşılaştırmalar yapılmış ve yöntemin avantajları ortaya konmuştur.

Hesaplamalar ve diğer işlemlerde Matlab, Mathematica ve Mathcad gibi yazılımlardan faydalanılmıştır. Örneklerde anılan işlemci hesaplama süreleri (CPU time) Intel 166MMX işlemcisinde gerçekleşen değerlerdir.

İlk olarak Şekil 1’de gösterilen üç çubuk kafes sistemini ele alalım. Bu kafes sisteminin, statik cevap ve özdeğer tasarım duyarlılığı Haug (1986)’da verilmiştir. Burada, çalışmada oluşturulan TDA’ya dayalı tasarım duyarlılığı ile adı geçen klasik duyarlılık metodlarının karşılaştırılması yapılacaktır.



Şekil 1. Üç çubuk kafes sistemi.

$\theta = 45^\circ$ ve $\alpha = 30^\circ$ için yapısal sisteme ait sonlu elemanlar denklemleri şu şekilde oluşmaktadır:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (38)$$

Düğüm noktalarının kinematik bağ, indirgenmiş kütle matrisi, indirgenmiş katılık matrisi ile şekil değiştirme ve kuvvet vektörü ifadeleri:

$$\mathbf{Z} = \{ \mathbf{z}_g \in \mathbb{R}^6 : z_3 = z_4 = 0, z_5 \cos \alpha + z_6 \sin \alpha = 0 \} \quad (39)$$

$$\mathbf{M}(b_i) = \frac{\rho \ell}{2} \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{2}b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + \sqrt{2}b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4(b_2 + \sqrt{2}b_3) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{K}(b_i) = \frac{E}{2\sqrt{2}\ell} \begin{bmatrix} b_3 & b_3 & (\sqrt{3}-1)b_3 \\ b_3 & 2\sqrt{2}b_1 + b_3 & (\sqrt{3}-1)b_3 \\ (\sqrt{3}-1)b_3 & (\sqrt{3}-1)b_3 & 2\sqrt{2}b_2 + (4-2\sqrt{3})b_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_5]^T \quad (42)$$

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ 0]^T \quad (43)$$

şeklindedir. Burada E Elastiklik modülü, ℓ birinci çubuğun boyu ρ çubuk malzemesinin yoğunluğu, b_i i.nci çubuğa ait kesit alanı ve f_i dış kuvvetlerdir.

Statik cevap tasarım duyarlılığı analizi

Şekil 1’deki üç çubuk kafes sisteminin statik cevap tasarım duyarlılığı analizinin performans ölçüm fonksiyonu olarak $\psi(b_k, \mathbf{z}(b_k)) = z_1$, yani birinci düğüm noktasının yatay yer değişimini alarak yapalım. Önce klasik yöntemle başlarsak, Haug (1986)’daki ifadeler neticesinde, \mathbf{z} yerdeğiştirme vektörü:

$$\mathbf{z} = \frac{\ell}{E} \begin{bmatrix} \frac{(2\sqrt{2}b_1b_2 + 4b_1b_3 - 2\sqrt{3}b_1b_3 + b_2b_3)f_1 - b_2b_3f_2}{b_1b_2b_3} \\ \frac{f_2 - f_1}{b_1} \\ \frac{(1-\sqrt{3})f_1}{b_2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$f_1 = f_2 = 1$ ve $\ell = 1$ alınması durumunda:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{4-2\sqrt{3}}{Eb_2} + \frac{2\sqrt{2}}{Eb_3} & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{Eb_3} \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

olur. Performans fonksiyonu $\psi = z_1$ için bitişik ifadesi:

$$\mathbf{K}(b)\boldsymbol{\lambda} = \partial \psi^T / \partial \mathbf{z} = [1 \ 0 \ 0]^T \quad (46)$$

çözüm sonrasında, indirgenmiş katılık matrisi, \mathbf{z} ve $\boldsymbol{\lambda}$ ‘nın kullanımıyla:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{K}(b)\tilde{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{3}-4}{Eb_2^2} & -\frac{2\sqrt{2}}{Eb_3^2} \end{bmatrix}^T \quad (47)$$

biçiminde elde edilir. Analizde tasarım parametreleri olarak çubukların kesit alanları b_i ’leri alalım. Bilinmeyenler dış kuvvetler f_1 ve f_2 olsun. Dış kuvvetlerle birlikte performans ölçüm fonksiyonu ψ ’nin tasarım parametreleri olan b_i ’lere göre olan türev ifadesi:

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{d\mathbf{b}} = \frac{\ell}{E} \begin{bmatrix} \frac{f_2 - f_1}{b_1^2} & \frac{f_1(2\sqrt{3} - 4)}{b_2^2} & \frac{-2\sqrt{2}f_1}{b_3^2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

olarak bulunmaktadır. Genelleştirilmiş global formülasyon durumunda \mathbf{z}_g vektörü:

$$\mathbf{z}_g = \begin{bmatrix} \frac{4-2\sqrt{3}}{Eb_2} + \frac{2\sqrt{2}}{Eb_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{Eb_2} & \frac{3-\sqrt{3}}{Eb_2} \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

olur. $d\mathbf{z}_g/db_i$ ($i=1, 2, 3$) değerlerini hesaplırsak:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}_g}{db_1} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \frac{d\mathbf{z}_g}{db_2} &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-4}{Eb_2^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{Eb_2^2} & \frac{\sqrt{3}-3}{Eb_2^2} \end{bmatrix}^T \\ \frac{d\mathbf{z}_g}{db_3} &= \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{Eb_3^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (50)$$

bulunur. Bu ifadelerde her bir tasarım parametresinin yer değiştirme vektörü üzerindeki etkisi görülmektedir.

Tekil değerlerin tanım ifadeleri gereğince kuvvet vektörü için $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$, çıkışı temsil eden yerdeğiştirme vektörü için $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \mathbf{u}_i$ ifadeleri yazılabilir.

Buradan anlaşıldığına göre, eğer biz tekil değerleri minimize edersek, diğer bir deyişle tüm tekil değerlerin üst sınırı yani en büyüğü olan σ_1 'i minimize edersek çıkış vektörü elemanları ve doğal olarak performans ölçüm fonksiyonu, $\boldsymbol{\Psi} = z_1$ 'de minimize olacaktır.

TDA'ya dayalı tasarım duyarlılığı analizinin avantajlarından birisi de çoklu yükleme durumunda ortaya çıkar. Buradaki a_i katsayılarının b_i tasarım parametrelerinden bağımsız olduğundan yola çıkarsak:

$$\delta \mathbf{z}(b_i; \Delta b_i) = \sum_{k=1}^n a_k \delta[\sigma_k(b_i; \Delta b_i) \mathbf{u}_k(b_i; \Delta b_i)] \quad (51)$$

yazılabilir. $\delta[\sigma_k(b_i; \Delta b_i) \mathbf{u}_k(b_i; \Delta b_i)]$ ifadesi birkez hesaplandıktan sonra statik (TDA sabit)

ve dinamik harmonik (TDA tahrik frekansı ω 'nın fonksiyonu) duyarlılık analizleri, a_i katsayısının (51) ifadesinde yerine konması ile çoklu yükleme "multiple load case" durumu için doğrudan hesaplanabilir. Ayrıca $\boldsymbol{\Psi}(b_k, z(b_k))$ performans ölçüm fonksiyonu ifadesinin Gateaux türevleri:

$$\delta \boldsymbol{\Psi}(b_i; \Delta b_i) = \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial b_i} \Delta b_i + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z}(b_i; \Delta b_i) \quad (52)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki $\delta \mathbf{z}(b_i; \Delta b_i)$ ifadesi (51)'de verilmiştir. $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = 2\sqrt{2}$, $E = 1$ ve $\ell = 1$ değerleri için, birim yükleme durumu $f_1 = f_2 = 1$ olması halinde z_1 ve σ_1 'nin Gateaux türevleri Tablo 1'dedir. Burada tasarım parametrelerindeki değişim %5'lik olarak $\Delta b_i = 0.05b_i$ şeklinde göz önüne alınmıştır. Tablo 1 incelendiğinde $i = 1, 2, 3$ için $d\boldsymbol{\Psi}/db_i = dz_1/db_i = 0$ ve $\delta z_1(b_i; \Delta b_i) = 0$ iken $\delta \sigma_i(b_i; \Delta b_i) \neq 0$ dır. En büyük tekil değer σ_1 'in minimize edilmesi demek aslında tüm yapısal sistemin statik cevap büyüklüğünün minimize edilmesi demektir. Bu aynı zamanda sistemin katılığının artırılması anlamına gelmektedir.

Tablo 1. $f_1 = f_2 = 1$ ve $\Delta b_i = 0.05b_i$ için birinci çıkış, $\delta z_1(b_i; \Delta b_i)$ ve tekil değerler $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$ ait Gateaux türevleri.

i	1	2	3
$\delta \sigma_1(b_i; \Delta b_i)$	-8.016×10^{-2}	-4.296×10^{-2}	-3.816×10^{-2}
$\delta \sigma_2(b_i; \Delta b_i)$	-1.744×10^{-2}	-3.255×10^{-2}	0
$\delta \sigma_3(b_i; \Delta b_i)$	-2.3877×10^{-3}	-1.279×10^{-3}	-1.183×10^{-2}
$\delta z_1(b_i; \Delta b_i)$	0	-2.679×10^{-2}	-5.000×10^{-2}

Tablo 1'den herhangi bir yükleme koşulunda yapısal sistemin şekil değiştirmesi üzerinde etkili tasarım parametresinin b_1 olduğu $\delta \sigma_1(b_i; \Delta b_i)$ 'in tablodaki en düşük değer olması sebebiyle anlaşılmaktadır. Bir başka deyişle çubuk kesitleri göz önüne alındığında birinci çubuğun kesitinin artırılması yapının rijitliğinin artırılması üzerinde en etkili olanıdır. Bu sonuca ulaşılmasında hesaplama süresi 0.3713 saniye işlemci zamanıdır. Eğer klasik usuldeki direk yaklaşımla hesaplama yapılsaydı her bir b_i tasarım parametresi için mümkün olan tüm

yüklemeye durumları için hesaplama yapmak gerekmektedir. Bu hesaplama sırasında kuvvet arttırımının 0.01 olması ve -1 den 1'e kadar değişmesi halinde 34.335 saniye işlemci süresi geçecektir. (Bunun 34.330 saniyesi maksimum yerdeğiştirmeyi veren kuvvetin bulunması, 0.005 sn.de duyarlılıkların hesaplanmasında geçen süredir). Problemin boyutunun artması ve yük adedinin çoğalması halinde TDA'ya dayalı analizin işlemci zamanı ile klasik tekniklerin işlemci zamanı arasındaki süre farkı doğrusal olarak artmaktadır.

Özdeğer tasarım duyarlılığı analizi

Bu kısımda, tekil değerlerin duyarlılık analizi amacıyla kullanımı dinamik harmonik analiz üzerinde gösterilecektir. Bunun için tekil değerler tasarım duyarlılığı analizi, klasik yöntem olan özdeğer tasarım duyarlılığı analizi ile karşılaştırılarak Şekil 1'deki üç çubuklu kafes sistem üzerine uygulanmıştır.

$E=1, \rho = 1, b_1 = b_2 = 1$ ve $b_3 = 2\sqrt{2}$ değerleri için düğüm noktalarının kinematik yer değiştirmeleri,

$$\mathbf{Z} = \{y_g \in R^6 : y_3 = y_4 = 0, y_5 \cos \alpha + y_6 \sin \alpha = 0\} \quad (53)$$

$\theta = 45^\circ$ $\alpha = 30^\circ$ değerleri için $\mathbf{K}_g(b)$ pozitif belirlidir. İndirgenmiş kütle matrisi:

$$\mathbf{M}(b) = \frac{\rho \ell}{2} \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{2}b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + \sqrt{2}b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4(b_2 + \sqrt{2}b_3) \end{bmatrix} \quad (54)$$

olarak bulunur. Yapısal sisteme ait temel özdeğer ve karşılık gelen normalize edilmiş özvektör sırası ile Haug (1986)'dan $\xi = 0.08038$

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_5]^T = [-0.3496 \ 0.08451 \ 0.2601]^T \quad (55)$$

$$\frac{d\xi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}(b) \tilde{\mathbf{y}}) - \xi \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}(b) \tilde{\mathbf{y}}) \quad (56)$$

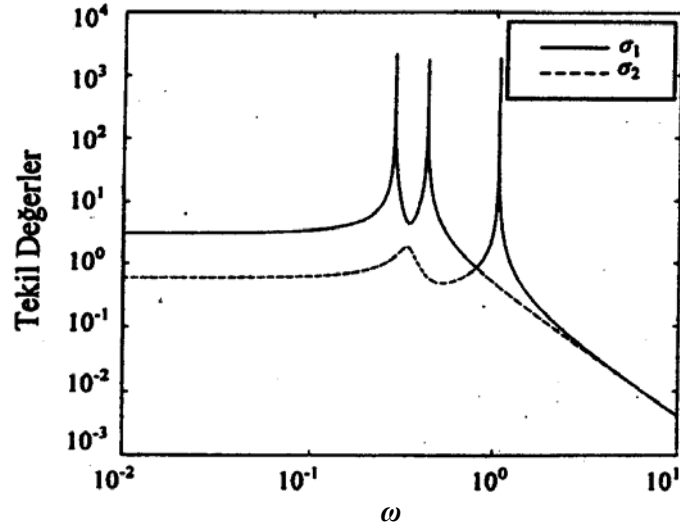
$$\frac{d\xi}{d\mathbf{b}} = [0.001944 \ 0.05678 \ -0.02076]^T \quad (57)$$

olarak bulunur. Sisteme olan girişler f_1 ve f_2 ($f_3=0$ olduğu için formüllerde yer almamıştır), çıkışlar ise z_1, z_2 ve z_5 olarak TDA hesaplamalarına dahil edilmiştir. Tahrik frekansı $\omega = \sqrt{\xi} = \sqrt{0.08038} = 0.2835$ rad/sn için sistemin tekil değerleri ve tekil vektörleri şu şekilde bulunmaktadır. Tekil değerler: $\sigma_1=6616.05$ ve $\sigma_2=1.23524$, tekil vektörler:

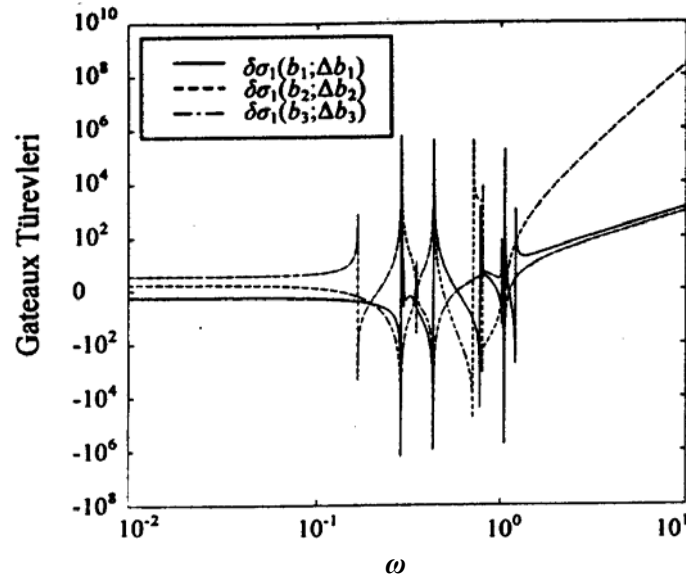
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= [-0.78479 \ 0.19711 \ 0.58758]^T \\ \mathbf{u}_2 &= [0.22541 \ -0.79237 \ 0.58758]^T \\ \mathbf{v}_1 &= [0.96985 \ -0.24369]^T \\ \mathbf{v}_2 &= [-0.24369 \ -0.96985]^T \end{aligned} \quad (58)$$

Sisteme ait tekil değerler σ_1 ve σ_2 'nin tahrik frekansı ω 'ya göre değişimi Şekil 2'de verilmiştir. Gateaux türevleri ise Şekil 3'dedir. Çıkışların Gateaux türevleri, $\delta z_k(b_i; \Delta b_i)$ Şekil 4'de $f_1 = f_2 = 1$ birim yük değerleri için gösterilmektedir. Buradaki Gateaux türevlerinin hesaplamalarında tasarım parametrelerinde %5'lik değişim $\Delta b_i = 0.05 b_i$ olarak alınmış ve sonlu farklar formülü kullanılmıştır. Gateaux türevleri $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$ ve $\delta z_k(b_i; \Delta b_i)$ 'nin frekans alanındaki davranışlarına baktığımızda, rezonans noktalarında sıçramaların meydana geldiği görülmektedir. $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$ özellikle sistemin enerji ve güç aktarım oranlarının duyarlılığıdır. Diğer taraftan $\delta z_k(b_i; \Delta b_i)$ yapısal sistemin k .ncı serbestlik derecesine ait titreşim genliğinin duyarlılığıdır. Bunun sonucu olarak, eğer biz ω frekansına sahip dış kuvvetlerin yapı üzerinde oluşturduğu titreşim genliklerini minimize etmek istiyorsak, yapmamız gereken ilgili ω frekansında σ_1 yani en büyük tekil değeri minimize etmektir. Bu ise en duyarlı tasarım parametresine yapılacak müdahale ile olacaktır.

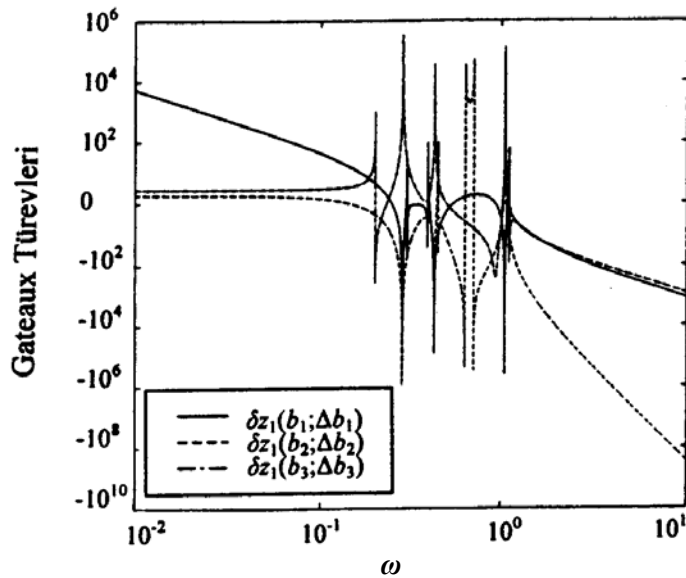
Üç çubuk kafes sistemine ait temel özdeğer Haug (1986)'da $\lambda_1 = \omega^2 = 0.08038$ olarak verilmiştir. Bu değer Şekil 2'deki σ_1 'in birinci tepe noktasına $\omega = \sqrt{0.08038} = 0.2835$ rad/sn. de karşılık gelmektedir. Böylece tekil değer analizi esnasında sistemin rezonansları hakkında da bilgi edinilmektedir. Özdeğer tasarım duyarlılığı sonuçlarına TDA duyarlılık analizi ile de ulaşılmış



Şekil 2. Yapısal sistemin tekil değerlerinin ω frekans alanındaki değişimi



Şekil 3. σ_1 'in b_1 , b_2 ve b_3 'e göre Gateaux türevlerinin ω frekans alanındaki değişimi

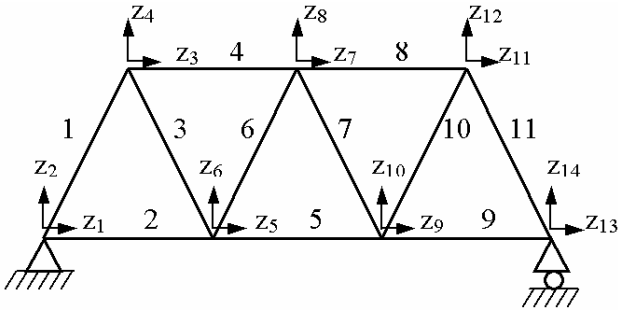


Şekil 4. z_1 'in b_1 , b_2 ve b_3 'e göre Gateaux türevlerinin ω frekans alanındaki değişimi

olunmaktadır. Görüldüğü üzere σ_k ve $\delta\sigma_k(b_i, \Delta b_i)$ 'nın grafik üzerindeki değişimi bize yapısal sistem frekans cevabını tüm frekans alanını kapsayacak şekilde vermektedir. Buna rezonans frekansları ve bu frekanslardaki duyarlılıklar da dahildir. Halbuki klasik yöntem olan özdeğer tasarım duyarlılığı, sadece rezonans frekanslarında geçerlidir. Tekil değer tasarım duyarlılığı ise tüm frekans alanında kullanılabilir. σ_1 'in çizimindeki üç tepe noktası sistemin serbestlik derecesini ve rezonans frekanslarını işaret etmektedir. Bu arada σ_1 ve σ_2 'nin değişimleri $\omega=0.7997$ rad/sn değerinde temas edip ayrılma davranışı göstermektedir (Ersoy ve Muğan, 2002).

Çoklu yükleme hali ve yapısal sistem gürbüzlüğü

Bu bölümde tekil değer tasarım duyarlılık analizi Şekil 5'de görülen 11 elemanlı köprü kafes sistemine uygulanmıştır. Kuvvet uygulama noktaları düğüm noktalarına gelecek şekilde, yapının çoklu yükleme şartları altındaki davranışı incelenmiştir. Dış kuvvetlerin, köprü üzerindeki araç hareketlerini temsil edecek tarzda z_5, z_6, z_9 ve z_{10} doğrultularında etkidiğini varsayalım. Sayısal hesaplamalarda elastisite modülü $E_i = 1$, yoğunluk $\rho_i = 1$, eleman boyu $\ell_i = \ell = 2$, kesit alanı $h_i = h = 1$ (i kafes eleman numarasını temsil etmektedir).



Şekil 5. Köprü kafes sistemi

Sistem mühendisliğinde araştırılan özelliklerden bir tanesi de sistemin (bu bir kontrol sistemi veya bir yapısal sistem olabilir), giriş parametrelerindeki değişime karşı verdiği cevaplar arasındaki farkın büyüklüğüdür. Bunu yapısal sistemler için biraz daha açacak olursak, bir yapı belli doğrultularda yapılan yüklemeye karşılık oldukça katı (veya esnek) davranırken

değişik yükleme doğrultularında tam ters bir davranış gösterebilir. Buradan hareketle ortaya şu soru atılabilir: biz yapısal sistemimizi öyle tasarlayalım ki değişik yükleme doğrultularına verdiği cevaplar arasındaki fark minimum olsun. İşte bu hal sistemin gürbüzlüğü (robustness) olarak adlandırılmaktadır.

Şekil 5'deki kafes köprü sisteminin tasarım parametrelerine müdahale ederek yapının gürbüzliğini arttırmak istediğimizi varsayalım. Köprü sisteminde dört giriş (düğüm noktalarına z_5, z_6, z_9 ve z_{10} doğrultularında etkiyen araç yükleri) ve onbir çıkış (düğüm noktalarının yerdeğişimi) vardır. Sistemin tekil değerleri ve karşılık gelen tekil vektörleri hesaplanarak Tablo 2'de verilmiştir. Yapısal sisteme ait genlik ilgili tekil değer tarafından temsil edildiğine göre, yapının gürbüzliğünün maksimum olması en büyük tekil değer σ_1 ile en küçük tekil değer olan σ_4 arasındaki farkın minimize edilmesiyle mümkün olacaktır ($\sigma_1/\sigma_4 = \text{minimum}$).

Tablo 2. Köprü sisteminin tekil değer ve tekil vektörleri

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
16.3838	6.4338	2.4508	0.8418
v_1	v_2	v_3	v_4
0.2037	-0.5092	0.0147	0.8360
-0.6317	-0.2550	-0.7320	0.0115
0.4335	-0.7114	-0.1347	-0.5366
-0.6096	-0.4118	0.6677	-0.1141
u_1	u_2	u_3	u_4
0.2666	-0.1937	0.0707	0.1987
-0.2555	-0.0156	-0.3296	-0.2109
0.1218	-0.3243	0.0272	0.7532
-0.4407	-0.2183	-0.6436	0.0130
0.1786	-0.3040	-0.1795	0.1154
-0.4723	-0.2517	-0.0166	0.2487
0.2622	-0.4257	-0.0524	-0.3809
-0.4229	-0.3437	0.5644	-0.1704
0.0916	-0.4330	0.0100	-0.0827
-0.2240	-0.1905	0.3096	-0.1138
0.3057	-0.3612	-0.1471	-0.2818

Tasarım parametresi olarak kabul ettiğimiz çubuk kesit alanlarındaki $\pm\%50$ 'lik değişimlerin tekil değerlerin Gateaux türevlerine olan etkisi Tablo 3'de gösterilmiştir. Buradan hareketle, mevcut yani orjinal durumdaki $\sigma_1/\sigma_4 = 16.3838 / 0.8418 = 19.4636$ oranını yeni kesit alanları aracılığıyla $\sigma_1/\sigma_4 = 18.7423 / 1.1944 = 15.6914$ değerine getirebiliriz. Bu esnada kesit değişimleri, $h_1=1.5h$, $h_2=0.5h$, $h_3=1.5h$, $h_4=1.5h$, $h_5=0.5h$, $h_6=1.5h$, $h_7=0.5h$, $h_8=1.5h$, $h_9=1.5h$, $h_{10}=1.5h$, $h_{11}=1.5h$, şeklinde olmaktadır. Böylelikle (ikinci durumda) yapı daha yüksek bir gürbüzlüğe ulaşmaktadır. Bunun dışında sistemin rijitliğini topyekün arttırmak isteyebiliriz. Yani herhangi bir yükleme karşısında yapının şekil değişiminin minimum olması istensin. Bu ise tasarım parametrelerine yapılacak müdahale ile düğüm noktalarının yer değişimlerinin en aza indirilmesi ile mümkün olacaktır. Problemin tekil değer analizine dayalı olarak çözülmesi halinde, en büyük tekil değer σ_1 'in düşürülmesi gerekir.

Tablo 3. Köprü sisteminde $\Delta h_i=0.5h$ tasarım parametre değişimi için $\delta\sigma_1(h_i; \Delta h_i)$ ve $\delta\sigma_4(h_i; \Delta h_i)$ tekil değerlerinin Gateaux türevleri

Değişim (-)	$\delta\sigma_1$	$\delta\sigma_4$
$\Delta h_1=0.5h$	1.2757	0.0042
$\Delta h_2=0.5h$	3.3298	0.2231
$\Delta h_3=0.5h$	0.8503	-0.0129
$\Delta h_4=0.5h$	1.4473	0.0096
$\Delta h_5=0.5h$	4.3298	0.5515
$\Delta h_6=0.5h$	-0.0014	-0.0163
$\Delta h_7=0.5h$	0.0079	0.0114
$\Delta h_8=0.5h$	1.4113	0.0378
$\Delta h_9=0.5h$	0.6493	-0.0147
$\Delta h_{10}=0.5h$	1.3576	0.0131
$\Delta h_{11}=0.5h$	1.7261	0.0350

Kesit alanlarında $h_1=1.5h$, $h_2=0.5h$, $h_3=1.5h$, $h_4=1.5h$, $h_5=0.5h$, $h_6=1.5h$, $h_7=0.5h$, $h_8=1.5h$, $h_9=1.5h$, $h_{10}=1.5h$, $h_{11}=1.5h$ şeklinde yapılacak değişikliklerle σ_1 , 16.3838'den 10.9213'e düşmektedir. Bunun anlamı en kötü yükleme halinde şekil değiştirme miktarlarının $\%33.34$ oranında düşmesi demektir. Tekil değerlere dayalı olarak

yapılan hesaplamaların süresi 1.26 işlemci (CPU) saniyedir. Öte yandan doğrudan metodla hesaplanması halinde -1 , 1 aralığının 0.01 artım değeri ile taranması durumunda işlem süresi 9.3078×10^5 işlemci (CPU) saniye olmaktadır (Ersoy ve Muğan, 2002).

Sonuçlar

Bu çalışmada yapısal sistemlerin (structure) tasarım duyarlılığı analizi matris cebirinin araçlarından olan tekil değerlere ayrıştırma TDA'ya dayalı olarak yapılmıştır. Bunun neticesinde mevcut klasik duyarlılık metodlarına ilave olarak TDA'ya dayalı tasarım duyarlılığı yöntemi geliştirilmiştir.

Geliştirilen bu yöntem klasik duyarlılık metodları ile çeşitli analiz tiplerinde karşılaştırılmış, konu açıklamalarının yanı sıra yöntemin performansı sayısal örnekler üzerinde de gösterilmiştir.

Bir yapısal sistemde, tekil değerlerin kareleri sistem giriş ve çıkış vektörleri arasındaki güç enerji ve enerji dağılım oranlarının sınırları ile bağıntılıdır. Frekans alanında ise tekil değerlerin konumları ile transfer fonksiyon matris elemanlarının şiddetleri arasında ilişki olduğu görülmektedir. TDA'ya dayalı olarak yapılan statik ve dinamik cevap duyarlılık analizlerinde, tekil değerler yapısal sistemin çıkış genliklerini temsil etmektedir. Buna bağlı olarak yapının statik veya dinamik cevap büyüklüğünün düşürülmesi, en büyük tekil değerinin minimize edilmesi ile mümkün olmaktadır. Diğer taraftan bir yapısal sistemde, giriş-çıkış doğrultuları arasındaki ilişkinin sistemin tekil vektörleri tarafından temsil edilebildiği görülmektedir.

Sağ tekil vektör elemanları giriş veya yükleme koşullarını bünyesinde barındırırken, karşılık gelen sol tekil vektörler çıkış değerlerinin elemanlarını içermektedir. Özdeğer tasarım duyarlılığı ile yapılan karşılaştırmada, klasik metod sadece rezonans frekansında geçerli iken, tekil değerlere dayalı duyarlılık analizi tüm frekans alanında sonuç vermektedir. TDA'ya dayalı yöntemin klasik yöntemlere nazaran daha geniş bilgi içermesi yanı sıra özellikle çoklu yükleme durumu başta olmak üzere işlemci

hesaplama süresi ve hafıza kullanımı açısından avantajlara sahip olduğu görülmektedir. Metodun kullanılabilirlik açısından bir başka avantajı da sürekli ortamların modellenmesinde en etkin metod olan, hesaplamalı yöntemlerin başında gelen, sonlu elemanlar ifadelerine uyarlanabilen başarılıdır. Bu da gelecekte, yöntemin önde gelen (Ansys, Nastran, gibi) ticari analiz programlarının algoritmalarına dahil edilmesinin yolunu açmaktadır (Ersoy ve Muğan, 2002).

Semboller

A	: Matrisler
b	: Tasarım değişkeni
a_i	: Katsayı
C	: Sönüm matrisi
D(s)	: Çıkışın laplace dönüşümü
d	: Şekil değiştirme vektörü
δ	: Gateaux türevi
E	: Elastisite modülü
G	: Transfer fonksiyon matrisi
F(s)	: Girişin laplace dönüşümü
h	: Kesit alanı
I	: Birim matris
j	: Kompleks değişkeni
K, K_g	: Katılık ve global katılık matrisi
l	: Eleman boyu
M	: Kütle matrisi
λ	: Adjoint değişkeni
ψ	: Performans fonksiyonu
ζ	: Özdeğer
y	: Özvektör
σ	: Tekil değerler
u_i	: Sol tekil vektörler
v_i	: Sağ tekil vektörler
ρ	: Yoğunluk
ω	: Tahrik frekansı
$\ \cdot \ _2$: Vektör şiddeti
Σ	: Tekil değerleri içeren matris
U	: Sol tekil vektörleri içeren mat.
V	: Sağ tekil vektörleri içeren mat.
z, z_g	: Şekil değiştirme vektörü

\sim	: Kısmi türevde sabit kısım
-	: Üst çizgi, eşlenik

Kaynaklar

- Datta, B. N., (1995). *Numerical Linear Algebra and Applications*, Brooks/Cole Publishing Company.
- Ersoy, H. ve Muğan, A., (2002). Design Sensitivity Analysis of Structures Based Upon The Singular Value Decomposition, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 3459-3476.
- Freudenberg, J. S. ve Looze, D.P., (1988). *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback System*, Springer Verlag, Berlin.
- Freudenberg, J. S., Looze D. P. ve Cruz, J. B., (1982). Robustness Analysis Using Singular Value Sensitivities, *International Journal of Control*, 35, 95-116.
- Golub G. H. ve Van Loan, C. F., (1983). *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- Haug, E. J. Choi, K. K. ve Komkov, V., (1986). *Design Sensitivity Analysis of structural Systems*, Academic Press, Orlando, Florida.
- Kleiber, M., Hisada, T., (1992). *Design Sensitivity Analysis*, Atlanta Technology Publisher.
- MacFarlane, A. G. J. ve Scott-Jones, D. F. A., (1979). Vector Gain, *International Journal of Control*, 29, 65-91.
- MSC/NASTRAN V68, *User's Manual*, MacNeal-Schwendler Inc.
- Muğan, A., (2002). Effects of Mode Localization on Input-output Directional Properties of Structures, *Journal of Sound and Vibration*, 258, 1, 45-63.
- Postlethwaite, I., Edmunds J. M. ve MacFarlane A. G. J., (1981). Principal Gains and Principle Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-26 32-46.
- Strang, G, (1988). *Linear Algebra*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.