

Newtoniyen olmayan bir akışkanın iki paralel levha arasındaki akışına viskoz ısınmanın etkisi

Muharrem İMAL*, Ahmet PINARBAŞI

Çukurova Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 01330, Balcalı, Adana

Özet

Bu çalışma, bir kanal içerisinde basınç gradyeni altındaki newtoniyen olmayan bir akışkanın kararlı, izotermal olmayan basınç etkisi altındaki akışının basınç gradyeni - debi ilişkisini viskoz ısınma etkisini de hesaba katarak incelemektedir. Akışkanın viskozitesi hem sıcaklığa hem de kayma oranına bağlıdır. Akışkanın newtoniyen olmayan davranışı Carreau reoloji bağıntıları ile modellenmiştir. Akış modelinin birbirine bağımlı hareket ve enerji denge denklemleri, lineer olmayan sınır değer problemi olarak elde edilmiş ve problem Chebyshev polinomlarını esas alan pseudospectral metot kullanılarak ardışık noktalar metodu ile çözülmüştür. Aktivasyon enerji parametresi, Brinkman sayısı ve diğer parametrelerin akış üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Brinkman sayısı, izotermal olmayan akış, newtoniyen olmayan akışkan.

Nonisothermal flow of a non-newtonian fluid with viscous heating between two parallel plates

Abstract

In this study the pressure gradient-flow rate relationship for steady-state nonisothermal pressure-driven flow of a non-Newtonian fluid in a channel is investigated including the effect of viscous heating is taken into account. The viscosity of the fluid depends on both temperature and shear-rate. Exponential dependence of viscosity on temperature is modelled through Arrhenius law. Non-Newtonian behaviour of the fluid is modelled according to the Carreau rheological equation, which reflects the characteristics of most polymers adequately with an exponential temperature dependence of viscosity. Flow governing motion and energy balance equations are coupled and the solution of this non-linear boundary value problem is found iteratively using a pseudospectral method based on Chebyshev polynomials. The effect of activation energy parameter and Brinkman number, as well as the power-law index and material time constant on the flow is studied. It is found that while the pressure gradient-flow rate graph is monotonic for certain ranges of flow controlling parameters, there is a large jump in the graph under certain values of these parameters.

Keywords: Brinkman number, non-newtonian fluid, nonisothermal channel flow.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Muharrem İMAL. muharrem_imal@hotmail.com; Tel: (344) 235 09 78.

Makale metni 20.02.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 20.01.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2004 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Boru ve kanallardaki akışa pek çok mühendislik ve endüstriyel uygulamalarda sıkça rastlanmaktadır. Pek çok çalışmanın konusu olan düzlem poiseuille akış, sabit iki sonsuz paralel levha arasındaki kayma akışıdır. Önceki çalışmalar izotermal akış üzerinde yoğunlaşmış, izotermal olmayan viskoz akış problemine dikkat çeken çalışmalar da literatürde yer almıştır. Pearson ve diğerleri (1973) ve Pearson (1976), Newtoniyen akışkanın düz kanal içerisindeki ısı iletimi problemini sayısal yöntemler kullanarak çalışmışlar ve kararsız akış rejimlerinde parametrelerin aldıkları değerleri belirlemişlerdir. Daha sonraki çalışmada izotermal olmayan akışın karakteristikleri üzerinde ısı iletimi ve dissipatif ısıtmanın etkisini araştırmışlardır (Pearson, 1978).

Davis ve Kriegsmann (1983), sıcaklığa bağlı viskoziteye ve viskoz ısı üretimine sahip olan sıvı maddelerin sürekli paralel akış modeli konusunda çalışmışlar ve kayma gerilmesi-kayma oranı karakteristiklerini göstererek aktivasyon enerji parametresinin sonuçları etkilediğini belirlemişlerdir. Ayrıca kayma gerilmesi-kayma oranı eğrilerinin her ikisinin de ya monoton olduğunu yada kayma oranı ve cidar üzerindeki ısı iletimi değerlerinde büyük sıçramalar olduğunu gözlemlemişlerdir.

Skuls'kiy ve diğerleri (1999), teorik ve deneysel çalışmalarından newtoniyen olmayan bir akışkanın silindirik bir kanal içerisinde izotermal olmayan sürekli akış modeli için basınç düşümü - debi ilişkisini araştırmışlardır. Akışkan özelliklerini viskozitenin eksponansiyel bağımlılığını gösteren üstel bağıntı (power-law) ile tanımlamışlar. Basınç düşümü - debi grafiğinin küçük basınç dalgalanmalarında keskin değişimler gösterdiğini ve bunun polimer işlemede ortaya çıkan kararsız rejimleri oluşturan temel etmen olduğunu belirlemişlerdir.

Sabit, paralel iki levha arasında Newtoniyen olmayan bir akışkanın hareketine viskoz ısınmanın etkisi daha önce hiç araştırılmadığından bu çalışma, viskoz ısınma etkisini dikkate alarak iki paralel levha arasındaki Newtoniyen olmayan akışkanın sabit basınç gradyeni etkisindeki

kararlı, izotermal olmayan akışında basınç gradyeni - debi ilişkisini araştırmaktadır. Akışkan, bir çok polimer esaslı malzemenin karakteristiklerini ve viskozitenin sıcaklık ile eksponansiyel ilişkisini gösteren Carreau akışkanı olarak modellenmiştir (Bird vd., 1987). Akış modelini veren birbirine bağımlı momentum ve enerji denge denklemleri lineer olmayan sınır değer problemi olarak Chebyshev polinomlarının kullanıldığı pseudospectral metot ile sayısal olarak çözülmüştür. Aktivasyon enerji parametresi β , Brinkman sayısı Br , Üstel bağıntı indeksi n , ve malzeme zaman sabiti λ gibi çeşitli akış kontrol parametrelerinin basınç gradyeni - debi eğrisi üzerindeki etkileri analiz edilmiştir.

Materyal ve metod

Temel denklemler

Bu çalışmada iki sonsuz paralel levha arasındaki sıkıştırılmaz ve Newtoniyen olmayan akışkanın iki boyutlu, izotermal olmayan, poiseuille akış modeli ele alınmaktadır. Kanalın üst ve alt cidarları arasındaki mesafe \bar{l} 'dir ve koordinat eksenleri alt cidar üzerine yerleştirilmiştir. Kanal cidarlarının her ikisi de sabit \bar{T}_0 sıcaklığında bulunmaktadır. Akış kanalın merkez eksenine boyunca etki eden sabit basınç gradyeni tarafından oluşturulmaktadır. Akışkanın viskozitesi yerel sıcaklığa ve kayma oranına bağlıdır. Elastik olmayan akışkan iki parametrelili Carreau reoloji denklemi ile modellenmiştir. Arrhenius yasası ile de akışkanın sıcaklığa bağımlılığı modellenmiştir.

Momentum ve enerji denge denklemleri boyutsuzlaştırıldığında aşağıdaki şekli almaktadır.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dy} \left\{ e^{-\frac{\beta\theta}{\theta+1}} \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{du}{dy} \right\} \quad (1)$$

ve,

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + (Br) e^{-\frac{\beta\theta}{\theta+1}} \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0 \quad (2)$$

problemin sınır koşulları ise,

$$\begin{aligned} u(0) &= u(1) = 0 \\ \theta(0) &= \theta(1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

şeklini almaktadır. Yukarıdaki lineer olmayan temel denklemler,

$$u, v = \frac{\bar{u}, \bar{v}}{\bar{U}_o}, \quad x, y = \frac{\bar{x}, \bar{y}}{\bar{l}}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_o}, \quad (4a)$$

$$\theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_o}{\bar{T}_o}, \quad p = \frac{\bar{p} \bar{l}}{\bar{\mu}_o \bar{U}_o} \quad (4b)$$

eşitlikleri kullanılarak boyutsuz hale getirilmiştir. Parametreler üzerindeki çizgi boyutsuz büyüklükleri göstermektedir. Bu denklemlerde x akış yönünü, y düzlemin normalini, u cidarlara paralel hızı, P basıncı, β boyutsuz aktivasyon enerji parametresini, θ boyutsuz sıcaklığı, λ malzeme zaman sabitini, n power-law indeksini, \bar{U}_o ortalama hızı, $\bar{\mu}_o$ referans sıcaklığı \bar{T}_o 'daki viskoziteyi ve Br,

$$Br = \frac{\bar{\mu}_o \bar{U}_o^2}{k \bar{T}_o} \quad (5)$$

ifadesiyle verilen Brinkman sayısını vermektedir. Burada \bar{k} ısı iletkenliğini tanımlamakta olup bu çalışmada ısı iletkenliği sabit kabul edilmiştir.

Çözüm metodu

Yukarıda adı geçen lineer olmayan sınır değer problemi, Chebyshev polinomlarını esas alan pseudospectral metot kullanılarak sayısal yöntemlerle çözülmüştür. Bu metot kullanılarak öncelikle $0 \leq y \leq 1$ fiziksel bölgesi $-1 \leq Y \leq 1$ Chebyshev sanal bölgesine dönüştürülür. Bağımlı parametreler u ve θ , $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ eşitliği ile tanımlanan birinci tip $T_n(Y)$ Chebyshev polinomları serisine açılarak Y cinsinden yazılır.

$$u(Y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(Y), \quad \theta(Y) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(Y) \quad (6)$$

Bu metodun detayları Pınarbaşı (2000) tarafından ayrıntılı olarak verilmiştir. Böylelikle birbirine bağımlı olan momentum ve enerji denklemlerinden elde edilen lineer olmayan denklemler iterasyon metodu kullanılarak IMSL Fortran Library (2003) yazılımı ile çözülmüştür.

Sonuçlar ve tartışma

Davis ve Kriegsmann (1983), aktivasyon enerji parametresinin akış davranışına etki ettiğini göstermiştir. Bu noktada akış davranışını etkileyen ve araştırılması gereken dört parametre vardır. Bunlar sıcaklıktaki değişmelere göre viskozitenin duyarlılığını ölçen boyutsuz aktivasyon enerji parametresi β , viskoz ısınmanın şiddetini ölçen Brinkman sayısı Br, kayma incelmesinin derecesini gösteren üstel bağıntı indeksi n ve kayma incelmesinin başlangıcını gösteren λ parametreleridir.

Davis ve Kriegsmann (1983), β nın yeterince küçük değerleri için basınç gradyeni - debi eğrisinin monotonlaştığını, β nın değeri artarken eğrinin büyük bir sıçrama yaptığını açıkladılar. Tablo 1'de Br = 10 için uygulanan basınç gradyeninin mutlak değeri ($|G| = |dP/dx|$) ile debi arasındaki değişim gösterilmiştir. Görüleceği gibi, $\beta = 1$ için basınç gradyeninin artışı ile debinin artışı monotondur. Ancak $\beta=5$ için $|G|=1.2$ den $|G|=1.3$ 'e yükselirken $Q=0.275$ den $Q=2.886$ 'ya ani bir sıçrama yapmaktadır. β değeri yükselirken debi değerindeki sıçrama dikkat çekicidir. $\beta=7$ olduğu zaman $|G|=0.7$ den $|G|=0.8$ 'e çıkarken $Q=0.665$ değerinden $Q=38.123$ değerine aniden bir sıçrama yapmaktadır. Bu sonuç Davis ve Kriegsmann (1983)'te verilen çalışmanın sonuçları ile tamamen uyumludur. Bu sonuçlardan viskozitesi sıcaklığın artışından etkilenmeyen akışkanlarda, uygulanan basınç gradyeni değerlerinin artmasıyla debi değerlerinde büyük sıçramalar oluşmayacağı anlaşılır. Yüksek β değerleri için debi değerlerinde görülen sıçramaların nedeni cidarlara geçen toplam ısı iletimindeki azalmanın akışkan viskozitesinin düşmesine yol açmasıdır.

Şekil 1'de Br=5 ve G=-1.2 sabit alınarak boyutsuz aktivasyon enerji parametresinin değişik

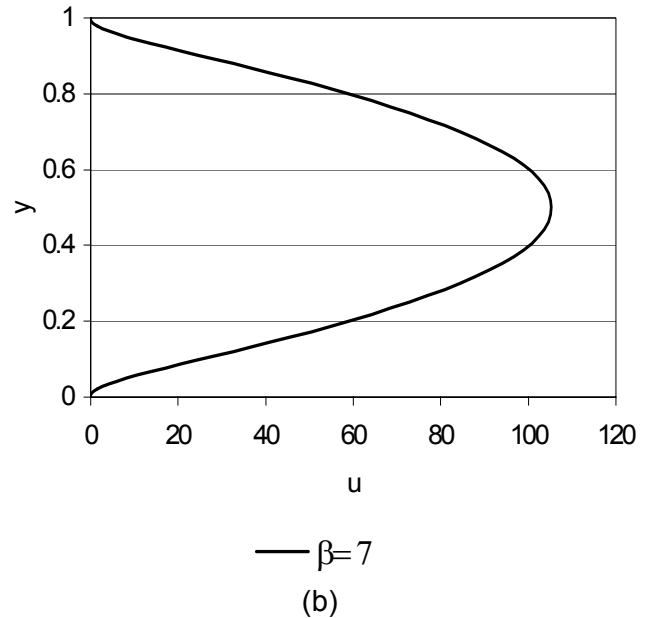
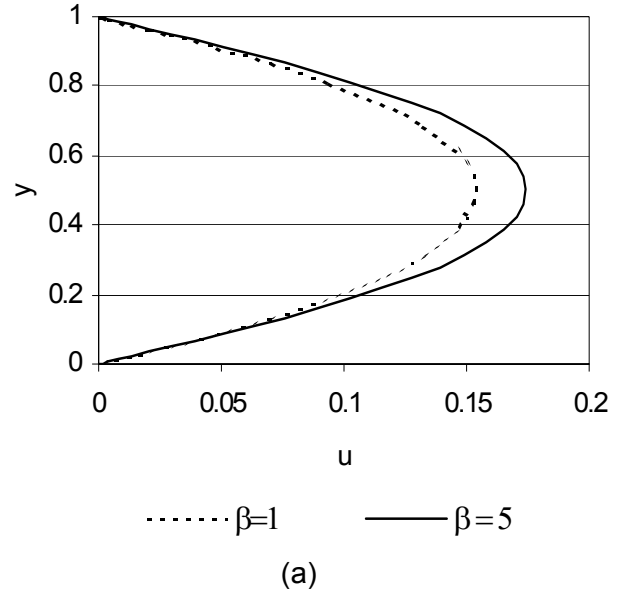
değerleri için boyutsuz hız eğrileri görülmektedir. Şekil 1a'da $\beta=1$ ve $\beta=5$ değerleri için debi değerlerinde henüz bir sıçrama olmamıştır (Tablo 1'e bakınız.) ve bu nedenle hız değerleri hala çok küçüktür. Ancak $\beta=7$ için debi değerlerindeki sıçrama nedeniyle hız değerleri çok yükselir. Sıvıların viskozitesi sıcaklık ile ters orantılıdır, sıcaklık yükselirken viskozite azalır. Bu yüzden β sıvıların sıcaklığa karşı duyarlılığını gösterdiği için β değerlerindeki artış viskozitedeki azalmaya neden olur. β değerleri artarken sıvının viskozitesi azalacağı için boyutsuz hız profili de yüksek değerler alır. Hız profili eğrilerinin ortadan geçen eksene göre simetrik oldukları ve eğriler üzerinde bulunan karşılıklı iki noktanın simetrik konumda bulunduğu Şekil 1'de açıkça görülmektedir.

Tablo 1. Boyutsuz aktivasyon enerji parametresinin değişik değerlerinde uygulanan basınç gradyeninin mutlak değerinin debi değerleri ile değişimi, $Br = 10$

G	Q Debi		
	(=1	(=5	(=7
0.2	0.016	0.016	0.016
0.5	0.041	0.043	0.043
0.7	0.058	0.062	0.065
0.8	0.067	0.073	38.123
1.0	0.085	0.099	60.797
1.2	0.103	0.275	82.126
1.3	0.113	2.886	92.473
1.5	0.132	6.581	112.726
2.0	0.186	14.724	162.100

Şekil 2'de $Br = 10$ sabit alınarak değişik β değerlerinde boyutsuz debi ile boyutsuz basınç gradyeninin değişimi gösterilmektedir. Bu şekil Tablo 1'deki değerler kullanılarak çizilmiştir. $\beta=1$ iken karakteristik eğri monotondur ve debi değerlerinde sıçrama yoktur. Uygulanan basınç gradyeninin artmasıyla debi değerlerinin de monoton olarak arttığı gözlemlenmektedir. Ancak

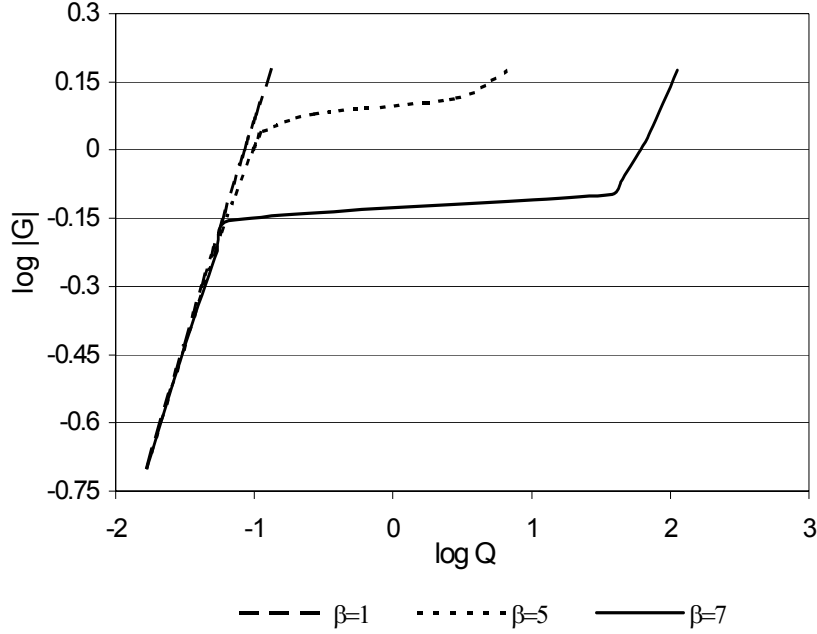
$\beta=5$ ve $\beta=7$ olduğu zaman debi değeri belirli bir kritik değer alınca kadar düzgün bir şekilde artmakta ve Tablo 1'de görüldüğü gibi basınç gradyeni daha da arttıkça debi değerlerinde büyük sıçramalar olmaktadır. Bundan sonra bu iki değer birlikte düzgün olarak artmakta ve bu durum Davis ve Kriegsmann (1983)'nin sonuçları ile kalitatif olarak tam bir uyum göstermektedir.



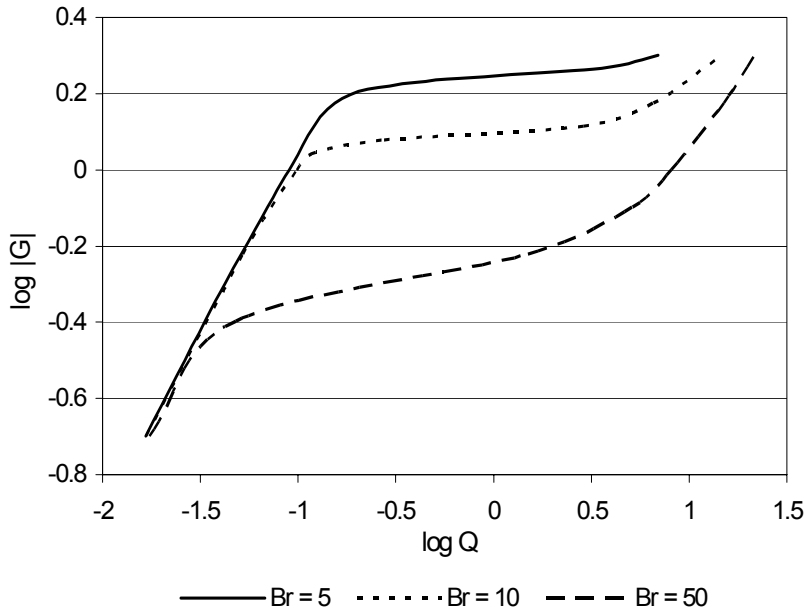
Şekil 1. Boyutsuz aktivasyon enerji parametresi β 'nın değişik değerlerinde boyutsuz hız profillerinin değişimi. Diğer parametreler $Br=5$, $G=-1.2$

Şekil 3'te $\beta=5$ sabit değeri için basınç gradyeni-debi grafiği üzerinde Brinkman sayısının etkisini göstermektedir. Bu grafikteki değişim Şekil 2'deki grafik ile benzerdir. Uygulanan basınç gradyeni değerlerinin artmasıyla debi değerleri kritik bir noktaya ulaşıncaya kadar

düzgün şekilde artmakta sonra bu debi değerinde büyük bir sıçrama olmaktadır. En sonunda bu iki değer birlikte düzgün olarak artmaya devam etmektedir. Ancak Br değeri artarken eğrinin monoton olarak yükselmeye devam ettiğini görmekteyiz.



Şekil 2. Aktivasyon Enerjisi parametresi β 'nin değişik değerlerinde boyutsuz debi ile boyutsuz basınç gradyeninin değişimi, $Br = 10$

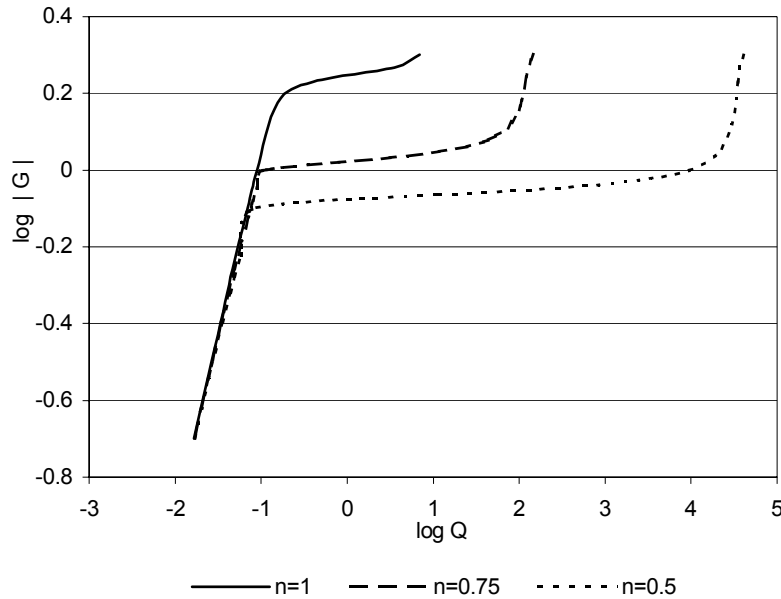


Şekil 3. $\beta = 5$ iken değişik Br değerlerinde boyutsuz debi ile boyutsuz basınç gradyeninin değişimi

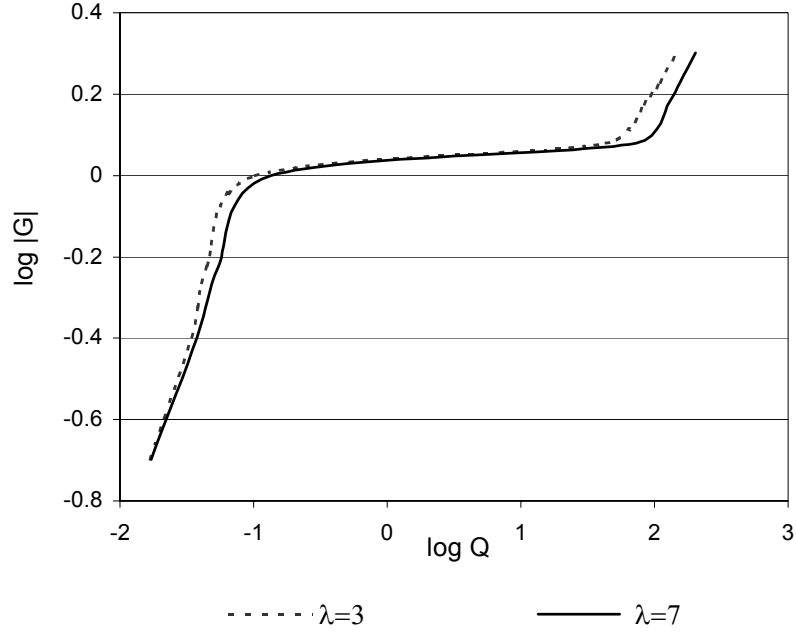
$Br=5$, $\beta=5$ ve $\lambda=3$ değerleri sabit alınarak üstel bağıntı indeksinin uygulanan basınç gradyeni-debi eğrisi üzerindeki etkisi Şekil 4'te gösterilmektedir. $n=1$ durumunun Newtoniyen akışkana karşılık geldiği vurgulanmalıdır. Üç eğri benzer karakteristik göstermektedir. Yani uygulanan basınç gradyeninin artmasıyla debi değerleri de düzgün bir şekilde artmaktadır. Bir noktadan sonra debi değerinde büyük bir sıçrama olmakta ve en sonunda bu iki değer yine düzgün bir şekilde artmaya devam etmektedir. Ancak n azalırken sıçrama daha küçük basınç gradyeni değerlerinde gerçekleşmekte ve sıçramanın şiddeti Şekil 4'te görüldüğü gibi artmaktadır. Şekil 2 ve Şekil 3, Şekil 4 ile karşılaştırıldığı zaman hem Newtoniyen akışkanlarda hem de Newtoniyen olmayan akışkanlarda basıncın artmasıyla debinin de arttığı görülmektedir. Ancak Newtoniyen olmayan akışkanlarda, basınç gradyeninin daha küçük değerlerinde (n azalırken) kayma incelmesinin derecesi artarken sıçrama meydana gelmektedir.

Şekil 5, $\beta = 5$, $Br = 5$ ve $n = 0.75$ iken malzeme zaman sabiti λ nın basınç gradyeni-debi eğrisi üzerindeki etkisini gösterir. Değişik λ değerlerinde eğrilerin davranışı Şekil 2, Şekil 3, ve Şekil 4 te görüldüğü gibi aynıdır. Ancak λ nın eğri üzerindeki etkisi diğer akış kontrol parametrelerine kıyasla daha az belirgindir.

Bu çalışmada, Newtoniyen olmayan bir akışkanın bir kanal içerisinde kararlı, izotermal olmayan, sabit basınç gradyeni etkisindeki sürekli akışı araştırılmıştır. Yapısal bağıntı olarak Carreau reolojik modeli ile sıcaklık profilinin etkisini içeren Arrhenius modeli kullanılmıştır. Chebyshev polinomlarını esas alan pseudospectral metot kullanılarak temel bağıntılar lineer olmayan denklemleri çözen yazılımlar ile ardışık noktalar metodu kullanılarak çözülmüştür. Malzeme zaman sabiti λ , ya kıyasla Aktivasyon enerji parametresi β , Brinkman sayısı Br ve Üstel bağıntı indeksi n gibi çeşitli akış kontrol parametrelerinin basınç gradyeni – debi eğrisi üzerinde daha etkili olduğu gösterilmiştir. Bu kontrol parametrelerinin belli değer aralıklarında basınç gradyeni – debi eğrisi monotondur. Diğer taraftan uygulanan basınç gradyeninin artmasıyla debi hızla yükselmekte ve belli bir değerden sonra sıçrama yapmaktadır. Daha sonra bu iki değer akış kontrol parametrelerinin belli değerlerinden sonra birlikte yükselmektedir. Bu sıçramalar, cidarlara geçen indirgenmiş toplam ısı iletimi nedeniyle akışkan viskozitesinin azalmasından kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar mühendislik uygulamalarında karşılaşılan viskoz ısınma etkisinin önemini değerlendirmek için bir kriter olarak kullanılabilir.



Şekil 4. $\beta = 5$, $Br = 5$, $\lambda = 3$ iken değişik Power law indeksi değerleri için boyutsuz debi ile boyutsuz basınç gradyeninin değişimi



Şekil 5. $\beta=5$, $Br=5$, $n = 0.75$ malzeme zaman sabiti λ 'nın değişik değerlerinde boyutsuz debi ile boyutsuz basınç gradyanının değişimi

Semboller

Br	:Brinkman Sayısı
k	:Isı iletim katsayısı
l	:Kanal genişliği
n	:Power law indeksi
P	:Basınç
Q	:Debi
T	:Sıcaklık
U_o	:Ortalama hız
u	:Akış yönündeki hız
T	:Sıcaklık
β	:Aktivasyon enerji parametresi
θ	:Boyutsuz sıcaklık
μ	:Akışkanın viskozitesi
λ	:Malzeme zaman sabiti

Kaynaklar

- Bird, R. B., Armstrong, R. C. ve Hassager, O., (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids: fluid mechanics*, **1**, Wiley, New York.
- Davis, S. H. ve Kriegsmann, G. A., (1983). *Physics of Fluids.*, **26**, 1177.
- Pearson, J. R. A., Shan, L. T. ve Viera, E. S. A., (1973). *Chemical Engineering Science.*, **11**, 2079.
- Pearson, J. R. A., (1976). *Annual Review of Fluid Mechanics.*, **8**, 163.
- Pearson, J. R. A., (1978). *Polymer Engineering Science.*, **18**, 222.
- Pınarbası, A., (2000). *Computational Fluids*, **29**, 935.
- Skul'skiy, O. I., Slavnov, Ye.V. ve Shakirov, N. V. J., (1999). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.*, **81**, 17.
- IMSL Fortran Library, (2003). Visual Numerics Inc. San Ramon, Ca, USA.
- İmal, M., Pınarbası, A., (2002). *International Communication of Heat and Mass Transfer*, **29**, 8, 1099-1107.