itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:4, Sayı:5, 43-54
Ekim 2005

Jeodezik dönüşümlerde sürekliliğin irdelenmesi

Murat Selim ÇEPNİ*, Rasim DENİZ

İTÜ İnşaat Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, jeodezik dönüşümlerde özellikle büyük alanları kapsayan uygulamalarda yetersiz kalan geometrik dönüşüm yöntemleri yerine sonlu elemanlar yaklaşımını temel alan modeller ve dönüşümlerdeki süreklilik problemi irdelenmektedir. İlk olarak, proje alanları çözüm bölgelerine ayrılmış ve her çözüm bölgesi için parça parça tanımlı deneme fonksiyonları belirlenmiştir. Bu fonksiyonlar tüm proje alanı boyunca süreklidirler ve tüm alanın tek bir fonksiyonla ifade edilmesine göre çok daha iyi sonuçlar verirler. Süreklilik, çözüm bölgeleri arasında tanımlanır ve C_0,, C_1,, C_2 süreklilikleri matematik modelin içinde değerlendirilerek çözüme yansıtılır. Ayrıca, süreklilik komşu alanlarda devam edecek çalışmalar içinde sağlanabilir. İkinci aşamada, çözüm bölgelerindeki dayanak noktaları üçgen elemanlar biçimine dönüştürülür. Üçgen elemanlar süreklilik ilkelerine göre oluşturulur ve her üçgen içinde ayrı bir üçgen koordinat sistemi tanımlanır. Üçgenin köşe noktalarındaki fonksiyon ve türev değerleri kullanılarak, dayanak noktalarına düzeltme getirilmeden bir noktanın dönüşüm değeri hesaplanır.
Anahtar Kelimeler: *Jeodezik dönüşümler, sonlu elemanlar, süreklilik, parça parça tanımlı deneme fonksiyonları, üçgen elemanlar.*

Examination of continuity on geodetic transformations

Abstract

In this study, the models based on the finite elements approach rather than the geometric transformation methods that are insufficient especially in the applications on larger areas and continuity problem are investigated. In the first step of the study, the project area is divided into solution regions and piecewise defined trial functions are determined for each region. These functions are continuous throughout the project area and yield much better solutions than defining the whole area with a single function. Continuity are defined between the solution regions and the continuities, C_0, C_1, and C_2, are evaluated in the model and reflected in the solution. Furthermore, the continuity can also be provided for the studies performed in the neighboring areas. In the second phase, the common points in the solution regions are transformed into triangular elements by triangulation. Triangular elements are formed up with respect to the principles of continuity, and a separate triangular coordinate system is defined for each triangle. A function to be used for an inner-triangle interpolation in the triangular coordinate system is obtained by using the values of functions and derivations of trial function on the edge points of the triangles. By this function, the transformation value of a point is calculated without any residuals for the common points.
Keywords: *Geodetic transformations, finite elements, continuity, piecewise defined trial functions, triangular elements.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Murat Selim ÇEPNİ. mscepni@yahoo.com; Tel: (216) 523 13 00.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ İnşaat Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Jeodezik dönüşümlerde sürekliliğin irdelenmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.05.2004 tarihinde dergiye ulaşmış, 07.06.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 28.02.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Mekansal verileri kullanan yönetim ve bilgi sistemlerinde, ana unsuru oluşturan konum bilgisinin kalitesi yani doğruluğu ve güvenilirliğinin ilk şartı jeodezik altyapıdır. Jeodezik ağlardan oluşan jeodezik altyapıda; ağın doğruluk ve güven ölçütlerine göre yüksek standartlı olmasının yanı sıra tek anlamlı, sürekli ve distorsiyonsuz (ölçek ve doğrultu sapmaları bulunmayan) olması da kalite kavramı ile birebir ilişkilidir. Uydu ve uzay sistemlerinin gelişimi ile bu tekniklerin kullanımı sonucu oluşturulan küresel, bölgesel ve ulusal GPS ağları üç boyutlu, doğru, güvenilir ve distorsiyonsuz ağlar olarak jeodezinin beklediği doğrulukları sağlayan, noktalarına ait hız vektörlerinin de belirlendiği dinamik ağlardır. Ancak, yukarıdaki olgulara karşılık, geleneksel olarak yapılandırılan yatay ve düşey faklı datumlara dayalı ülke jeodezik ağları da varlığını sürdürmektedir ve var olan coğrafik bilginin büyük bir bölümü bu ağlara dayalı olarak üretilmiştir. Bu ise, mevcut veriden bir süre daha yararlanılmak durumunda olduğu ve altlık değiştirmenin henüz tam olarak mümkün olmadığı anlamını taşımaktadır. Böylece uzay ve uydu teknikleriyle oluşturulan üç boyutlu ağlar ile geleneksel yatay ve düşey ağlar arasındaki presizyonlu dönüşüm problemi güncelleşmiştir.

Bir koordinat dönüşümünden beklenen niteliklerin başında doğruluk gelir. İki farklı datumda hesaplanan koordinatlar arasındaki dönüşümün doğruluğu;

- Her iki datumdaki ağların doğruluklarına ve distorsiyonlarına,
- Dönüşümde kullanılacak ortak nokta yoğunluğuna ve bu noktaların dağılımına,
- Dönüşüm yapılan alanın büyüklüğüne,
- Kullanılan dönüşüm modeline

bağlıdır. Bir başka önemli beklenti ise dönüşümün sürekliliğidir ve bu çalışmanın ana araştırma konusunu süreklilik problemi oluşturmaktadır. Dönüşüm yönteminden, ayrıca dayanak noktalarına düzeltme getirmemesi de beklenir. Geleneksel ağlar yatay ve düşey iki ayrı datuma sahiptir ve üç boyutlu dönüşüm yerine yatay (iki boyutlu) ve düşey (tek boyutlu) dönüşümler uygulanmaktadır. Genel olarak dönüşüm yöntemleri,

1. Geometrik dönüşüm yöntemleri (iki veya üç boyutlu)
   - Afin dönüşümü
   - Konform (Benzerlik) dönüşümü (Helmert,Bursa-Wolf,Molodensky Badekas,Weiss vb. modeller)
2. İki parametreli polinomlarla dönüşüm
3. Enterpolasyon yöntemleriyle dönüşüm
4. Sonlu elemanlar yöntemiyle dönüşüm

şeklinde sınıflandırılabilir.

Geleneksel ağlardaki ölçek ve doğrultu sapmalarından kaynaklı bozunmalar, büyük alanlar söz konusu olduğunda geometrik tabanlı dönüşüm yöntemlerinin doğruluğunu azaltmaktadır. Küçük alanlarda yeterli doğruluğu sağlayan geometrik dönüşümlerin büyük alanlarda da kullanılabilmesi için alanın daha küçük parçalara ayrılması ise, süreksizliklere yol açacağından kullanışlı değildir. Aynı biçimde çalışma alanlarının büyük olması durumunda iki değişkenli polinomlarında dönüşüm için gerekli modellemeyi tam olarak yapabilmesi çok zordur. Kullanılan eğrinin tüm alanı ifade etmesi doğruluğu azaltır, ayrıca eğrinin derecesinin yüksek seçilmesi gerçek olmayan eğilme ve bükülmeler meydana getirerek gerçek modelden sapmaya yol açar. Burada, alanı birden fazla polinomla modellemek ise yine süreklilik probleminden ötürü tercih edilmez. Dayanak noktalarına gelen düzeltmeler ise yöntemlerin bir başka olumsuzluğudur.

Jeodezik bir dönüşümden istenen, ortak nokta koordinatlarının sabit kalırken ağın yapısının tüm alan boyunca sürekli ve duyarlıklı bir şekilde dönüştürülmesidir.

Sonlu elemanlar yöntemi, bir çok mühendislik probleminin çözümünde uzun yıllardır kullanılmaktadır. Yöntemin temel yaklaşımı, birim parçalara ayrılmış ağların birbirine bağlanması yoluyla sürekliliğin sağlanmasıdır. Bu yaklaşım jeodezik ağ yaklaşımı ile de birebir örtüşmektedir. Bu nedenle son yıllarda sonlu elemanlar yaklaşımının dönüşümlerde kullanılması için çalışmalar yoğunlaşmıştır.

Bu çalışmada; jeodezik ağlarda dönüşümlerle ilgili uygulamada yaşanan sıkıntılara sonlu elemanlar yöntemini kullanarak farklı çözümler amaçlanmaktadır. Bölge bölge nokta sıklaştırmalarının yapıldığı yerlerde, yatay (iki boyutlu) ve düşey (tek boyutlu) ağlarda, bindirme bölgeleri olmaksızın sonlu elemanların fermuar fonksiyonlarıyla dikişsiz sürekliliği sağlayan dönüşümün matematik ve stokastik modeli incelenerek yöntemin uygulamaya aktarılmasının esasları araştırılmaktadır. Bu doğrultuda, sonlu elemanlar yöntemi üzerine kurulmuş iki yaklaşım denenmekte ve bu iki yaklaşımın birbirini izleyecek şekilde kullanılması ile aranan çözüme ulaşılacağı düşüncesi test edilmektedir. Yaklaşımlardan ilkinde, çalışma alanını çözüm bölgelerine ayırmak ve her bir çözüm bölgesinde parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonları belirlemek, ikincisinde ise belirlenen deneme fonksiyonunu kullanarak üçgen elemanlar yardımıyla bir noktanın dönüşüm değerini mümkün olacak en doğru biçimde hesaplamak düşüncesi çalışmanın ana fikrini oluşturur.

Sonlu elemanlar yöntemine genel bakış

Sonlu elemanlar yöntemi, sürekli ortamların çok küçük bölgelere ayrılarak temsil edilmesi düşüncesine dayanır. Böyle küçük bölgelere de "sonlu elemanlar" denir. Yöntemin temel yaklaşımı; sıcaklık, basınç, gerilme veya deplasman vs. gibi herhangi bir sürekli büyüklüğün küçük ve sürekli parçaların birleşmesi ile oluşan bir modele dönüştürülmesidir (Zienkiewicz ve Morgan, 1983).

Sonlu elemanlar yöntemi ile bir problemin çözümünde problemin tanımlanıp ortaya konulmasının ardından yapılacak ilk iş, büyüklüğü sonlu elemanlara ayırmaktır. Bu çözümün yaklaşılırlığı açısından oldukça önemlidir. Elemanlar uygun şekilde seçilmeli ve problemin yapısına uygun olarak yerleştirilmelidir. Eleman seçiminde, elemanların boyutları ve sayıları sistemi en iyi temsil edecek, hesapları da en aza indirgeyecek biçimde olmalıdır. Genel olarak değişkenin ani değişim gösterdiği yerlerde elemanlar küçük seçilir. Analizi yapılacak alanın elemanlara bölünmesinde uygun elemanlar seçmek kadar bu elemanları ve onların düğüm noktalarını yani elemanların köşe noktalarını uygun numaralamakta çok önemlidir.

Sonlu elemanlara ayırmanın ardından çözümü yapılacak değişkenin bölge içerisinde değişimini gösteren bir enterpolasyon fonksiyonu belirlenir. Fonksiyon, değişkenin yaklaşık değişimini verir ve gerçeğe ne kadar yakın seçilirse çözümdeki yaklaşıklık da o kadar fazla olur. Bu fonksiyona "şekil", "deneme" veya "baz fonksiyonu" da denilir. Değişkenlerin yapısına ve çözüm bölgesine göre derecesi ve katsayıları belirlenecek iki değişkenli (bivaryant) polinomlar, sıkça deneme fonksiyonu olarak kullanılır.

Jeodezik ağlar ve sonlu elemanlar

Bir jeodezik ağ, noktalarının oluşturduğu küçük ve genellikle üçgen şekilli parçalardan (elemanlardan) oluşur. Bir elemanı ilgilendiren geometri, deplasman, gerilme gibi büyüklükler elemanı çevreleyen noktalardaki büyüklüklerle karakterize edilir. Jeodezik ağa ilişkin bu yaklaşımla sonlu elemanlar yönteminin yaklaşımı birebir örtüşür. Jeodezik ağ noktaları, sonlu elemanlar yöntemindeki düğüm noktaları ile özdeşleştirilebilir.

Bir jeodezik ağ içindeki tüm dayanak noktalarını kapsayan alan, bir "çözüm bölgesi" olarak alınabileceği gibi birden fazla çözüm bölgesine de ayrılabilir. Her çözüm bölgesi için "deneme", "şekil" veya "baz" fonksiyonu olarak ifade edilen bir fonksiyon belirlenmelidir. Dönüşüm için fonksiyon değerleri olarak; dayanak noktalarının koordinatları, koordinat farkları, yükseklikleri veya geoit yükseklikleri kullanılabilir. Bu çalışmada, yatay dönüşümler için dayanak noktalarının enlemleri ve boylamları arasındaki farklar ve düşey dönüşüm için geoit yükseklikleri alınacaktır. Deneme fonksiyonu olarak ise, sonlu elemanlar için en uygun seçim olan iki değişkenli polinomlar kullanılmıştır.

Tez çalışması, sonlu elemanlar yöntemine dayanan iki yaklaşım üzerine kurgulanmıştır. Bu iki yaklaşımın ilkinde, çözüm bölgelerine ayrılmış alan üzerinde bölgelerden her birisi için ayrı ama sürekli deneme fonksiyonlarının belirlenmesi, ikincisinde ise bu deneme fonksiyonu üzerinden, üçgen içi ve üçgenler arası sürekliliği esas alan bir enterpolasyon ile dönüşüm değerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Her iki yaklaşım birlikte düşünülebileceği gibi ayrı ayrı da kullanılabilir.

Çalışma alanının çözüm bölgelerine ayrılması

Yaklaşım, bir proje alanının tek bir çözüm bölgesi olarak alınması yerine birden fazla sayıda çözüm bölgesine ayrılması ve her çözüm bölgesi için ayrı bir deneme fonksiyonu belirlenmesi düşüncesine dayanır. Bütün proje alanının tek bir çözüm bölgesi üzerinden ifade eden bir $F(p^{ij},x,y)$ deneme fonksiyonu yerine, alanın m adet çözüm bölgesine ayrılmasıyla her bir çözüm bölgesi için, $F_m(p_m{}^{ij},x,y)$ şeklinde deneme fonksiyonları elde edilecektir. Deneme fonksiyonu olarak iki değişkenli polinomlar kullanılır.

Parçalı tanımlı deneme fonksiyonlarının sonucu olarak bölgeler arası süreksizlikler ortaya çıkacaktır. Sonlu elemanlar yaklaşımı ile çözüm bölgeleri arasındaki süreklilikler "fermuar fonksiyonları" yardımıyla sağlanmaktadır. İki komşu çözüm bölgesini, fermuarlayan fonksiyon yardımıyla ortak sınırları boyunca bir hatla birbirine bağlamak ve bu yolla üst üste binen alanları ortadan kaldırarak, iki binmesiz çözüm bölgesi oluşturmak şeklinde geometrik bir tanım yapılabilir. Bu hat aynı zamanda birleştirici özelliğe sahiptir ve "fermuarlayan hat" veya "ortak hat" olarak tanımlanabilir. Her bir çözüm bölgesi için deneme fonksiyonu olarak ifade edilen, iki değişkenli polinom katsayıları $p_m{}^{ij}$ yalnızca m. çözüm bölgesi içindir ve komşu çözüm bölgelerindeki polinomun katsayı setleri ile uyumluluğu, ortak hat boyunca yazılan koşullar ile denetlenir.

Süreklilik ve süreklilik koşullarının tanımlanması

Sonlu elemanlar yönteminde süreklilik; herhangi bir S proje alanının m sayıda binmesiz S_m çözüm bölgesine ayrılması ve her bir çözüm bölgesindeki parça parça tanımlı deneme fonksiyonlarının birleştirilmesi işlemidir. Bölünmüş çözüm bölgelerinde süreklilik, bu bölgelerin sınırlarındaki ortak hatlar üzerinden yazılan koşullar yardımıyla sağlanır. Ortak hat, dayanak noktalarından bağımsız bir birleştirici doğru olabileceği gibi iki çözüm bölgesinin aralarında bulunan dayanak noktalarını birleştiren doğruda seçilebilir. Hattın uçlarındaki noktalar yardımıyla yazılan analitik bağıntılar çözüm bölgeleri arasında oluşan her sınır için yazılır. Bu analitik bağıntılar süreklilik koşulları olarak düzenlenir. Burada temel yaklaşım, çözüm bölgelerinde üst üste binen alanları sıfıra indirmek ve ortak hatla birbirine bağlamak üzerine kurgulanmıştır. Koşulları sağlanmış bir süreklilik ile, çözüm bölgeleri arasındaki binmeler ortadan kalkar ve geçişlerde deneme fonksiyonlarının değerleri için devamlılığa ulaşılır. Böylelikle, parçalı fonksiyonlar biçimindeki deneme fonksiyonları sürekli hale getirilir (Dinter vd., 1997)

Süreklilik tanımı içinde C_0, C_1 ve C_2 süreklilikleri biçiminde bir sınıflandırma yapılabilir.

C_0 sürekliliği, ortak hat boyunca $F_m(p_m)$ ve $F_n(p_n)$ eğrilerinin aynı fonksiyon değerlerini alması koşuludur.

C_1 sürekliliği, ortak hat boyunca $F_m(p_m)$ ve $F_n(p_n)$ eğrilerinin aynı teğet düzlemlere sahip olması koşuludur.

C_2 sürekliliği, ortak hat boyunca $F_m(p_m)$ ve $F_n(p_n)$ eğrilerinin aynı eğriliklere sahip olması koşuludur.

Herhangi iki komşu çözüm bölgesi için tanımlanan her bir süreklilik, o koşulu yerine getirecek kabullerden hareketle yazılan denklem takımlarından elde edilir.

C_0 sürekliliği eşitliklerinin elde edilmesi-Çözüm bölgelerinde, deneme fonksiyonu olarak kullanılan iki değişkenli polinomların bilinen genel ifadesi;

$$F(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} p_{jk} x^j y^k \qquad (1)$$

n: polinomun derecesi

şeklindedir. Deneme fonksiyonu olarak seçilen bu polinomun 3 boyutlu bir yüzeyin 3. boyutu yazılmış olduğunu varsayalım. Komşu çözüm bölgelerindeki birim vektörler;

$$X_m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ F_m(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} p^m{}_{jk}\, x^j y^k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$X_n = \begin{bmatrix} x \\ y \\ F_n(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} p^n{}_{jk}\, x^j y^k \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu iki vektör arasındaki fark vektörü ortak hat üzerindeki noktalar için fonksiyonel değerlerin fark vektörüdür.

C_0 sürekliliği, iki komşu çözüm bölgesine ait ortak hat üzerindeki her noktada komşu deneme fonksiyonlarının aynı fonksiyonel değerleri alması olarak betimlenir. Ortak hat bir t parametresi ile normlandırılırsa, her $t \in (0,1)$ değeri için, fonksiyonel değerleri farkının sıfıra denk olması C_0 süreklilik koşuludur.

$$\Delta_{m,n} = X_m - X_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} dp^{m,n}_{jk} (x_u + t\,dx)^j (y_u + t\,dy)^k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$dp^{m,n}{}_{j,k} = p^m{}_{j,k} - p^n{}_{j,k}$

$dx = x_u - x_v$, $dy = y_u - y_v$

Fark vektörü t'ye bağlı tek değişkenli bir polinom olarak ifade edilir ve polinomun derecesine göre açılımı yapılırsa,

$$A_1 t^n + A_2 t^{n-1} + \ldots\ldots\ldots . + A_{n-1} t^1 + A_n \equiv 0 \tag{4}$$

n:polinomun derecesi

ifade (3)'e göre sıfıra denklenir. (4) açılımı bir eşitlik değil bir denklik ifadesi olduğundan gerçeklenebilmesi mümkündür. C_0 eşitliğinin sağlanması için de bu denkliğin t'nin her $t \in$ (0,1) değeri için gerçekleşmesi gerekir. Denklem eşitliklerinin genel özelliklerinden bilindiği gibi (4) sisteminin sıfıra denk olması için t değişkenine bağlı tüm katsayılar sıfır olmalıdır. Yani (4) açılımı basitçe,

$A_i = 0$, (5a)

$A_i(p_m, p_n, x_u, y_u, x_v, y_v) = 0$ (5b)

$i = 1, n$

formuna dönüşür. A_i katsayılarının tümünün sıfıra eşitlenmesi halinde (5) eşitliği tanımlı olduğu alandaki tüm t değerleri için sağlanmış olacaktır. Burada A_i katsayıları, komşu çözüm bölgelerindeki deneme fonksiyonlarına ait karşılıklı parametrelerin farkının alınması ile elde edilen $dp_{j,k}$ (3) parametrelerine bağlı çok değişkenli polinomlara karşılık gelirler. Polinomların yerine konulmasıyla (4) eşitlikleri (n+1) ranklı homojen denklem sistemi oluştururlar ve problemin çözümü bu denklem takımlarının çözümü haline gelir. Katsayılar (5b)'de görüleceği gibi, $dp^{m,n}{}_{j,k}$ parametre farkları ile ortak hattın uç noktalarının koordinatlarına bağımlıdır. Homojen denklem takımı çözülüp parametreler arası koşullar gerçeklendiğinde, (4) denkliği sağlanmış dolayısıyla C_0 sürekliliği garanti edilmiş olur.

C_1 sürekliliği eşitliklerinin elde edilmesi-C_1 sürekliliğinin geometrik tanımı, komşu alanlardaki uzay eğrilerinin ortak hat üzerinde paralel teğet düzlemlere sahip olması şeklinde yapılabilir. Bu tanımdan hareketle C_1 sürekliliğine sahip olmayan iki komşu çözüm bölgesinde teğet düzlemler paralel olmayacağı, dolayısıyla teğet düzlemlere dik normal vektörlerin de ıraksak veya yakınsak olacağı söylenebilir. Şayet normal vektörler paralel olsaydı veya normal vektörlere paralellik ile ilgili koşul getirilmiş olunsa idi doğal olarak teğet düzlemler de paralel olacaktı. Bilindiği gibi iki paralel vektör bir yüzey parçası ifade etmez ve birim vektörleri çarpımları sıfıra eşittir. Paralel iki vektörün vektörel çarpımlarının sıfıra eşit olması C_1 Süreklilik koşullarının çıkış noktasıdır. İki komşu çözüm bölgesindeki deneme fonksiyonu uzay eğrisine ait normal vektörlerin çarpımının sıfıra eşitlenmesi ile C_1 Sürekliliği için istenilen koşul denklemlerine ulaşılır.

(1) ifadesindeki birim vektörlerde birinci kısmi türevler alınır ve modellenmeye çalışılan bileşene ait deneme fonksiyonlarının kısmi türevleri $f_{m,x}$, $f_{m,y}$, $f_{n,x}$, $f_{n,y}$ ile gösterilirse, iki yüzeyin normal vektörleri,

$$n_m = [X_{m,x}, X_{m,y}] = \begin{bmatrix} -f_{m,x} \\ -f_{m,y} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$n_n = [X_{n,x}, X_{n,y}] = \begin{bmatrix} -f_{n,x} \\ -f_{n,y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

biçiminde yazılabilir. İki normal vektörün çarpımı sıfıra eşitlenir se,

$$\begin{aligned} & f_{n,y}-f_{m,y}=0 \\ & f_{n,x}-f_{m,x}=0 \quad (7) \\ & f_{m,x}.f_{n,y}-f_{m,y}.f_{n,x}=0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemlerin çözümü ortak hat üzerinde kısmi türevlerin identikliği sonucunu verir. Kısmi türev farkları açılır ve ortak hat t ile normlandırılırsa,

$$\begin{aligned} & A_1 t^2 + A_2 t + A_3 \equiv 0 \quad (8) \\ & B_1 t^2 + B_2 t + B_3 \equiv 0 \end{aligned}$$

denklikleri ile ifade edilir. (10) denkliklerinin gerçekleşmesi için,

$A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$, $B_1=0$, $B_2=0$, $B_3=0$

olmalıdır. A_i ve B_i ifadeleri açıldığında, altı polinom bulunur ve polinomların çözümünden C_1 süreklilik eşitliklerine ulaşılır.

C_2 sürekliliği eşitliklerinin elde edilmesi-C_2 sürekliliği, ortak hat üzerinde iki yüzey eğrisinin de hatta dikey oluşları, yani aynı normal eğriliklere sahip olmaları ile açıklanır. C_2 süreklilik koşullarını elde edebilmek için deneme fonksiyonlarının ikinci derece kısmi türevleri alınır, identik olmaları varsayımı ile C_0 ve C_1 sürekliliklerindekine benzer şekilde t parametresine göre düzenlenerek eşitlenirse,

$$\begin{aligned} & \Delta_{m,n}.f_{xx}=f_{m,xx}-f_{n,xx} \\ & \Delta_{m,n}.f_{xy}=f_{m,xy}-f_{n,xy} \quad (9) \\ & \Delta_{m,n}.f_{yy}=f_{m,yy}-f_{n,yy} \end{aligned}$$

temel C_2 koşul eşitliklerine ulaşılır. (n=3) için düşünüldüğünde bu eşitlikler 1. derece polinomlardır.

$$\begin{aligned} & A_1 t + A_2 \equiv 0 \\ & B_1 t + B_2 \equiv 0 \quad (10) \\ & C_1 t + C_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

t değişkenlerine bağlı bu polinomların t'nin her t $\in$ (0,1) değerinde sağlanması ile denklikler gerçekleşir. Denkliklerin sağlanması için, A_i ve B_i katsayılarını oluşturan denklem takımları sıfıra eşitlenir ve çözümünden C_2 süreklilik koşulları çıkarılır.

Süreklilik koşullarının matematik model içinde değerlendirilmesi

Süreklilik koşul eşitlikleri matematik model içerisinde birkaç farklı biçimde değerlendirilebilir. Birinci seçenekte eşitlikler, bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesi modeli içine koşul denklemi olarak yerleştirilerek çözüme gidilir. Modelin çözümünde koşullara düzeltme getirilmediğinden süreklilik koşulları tam olarak yerine getirilir.

Diğer çözümde, süreklilik eşitlikleri ölçü olarak kabul edilir ve matematik model içerisinde düzeltme denklemi şeklinde yazılır. Burada, düzeltme denklemlerinin ağırlıklandırılması ile kullanıcının modeli kontrol etmesi mümkün olur. Süreklilik eşitliklerine ait düzeltme denklemlerinin ağırlıkları çok yüksek tutularak koşulların gerçekleşmesi sağlanır.

Bir başka çözüm ise, tez çalışmasında eklemeli çözüm olarak adlandırılan modelin uygulaması için tasarlanmış olan ve dengeleme hesabında geçici bilinmeyenlerin koşul denklemlerinde yerine konulması olarak bilinen şekilde gerçekleştirilir. Daha önce dönüşüm yapılmış bir bölgenin komşuluğundaki yeni bir bölgede çalışmalar yapıldığında, yeni dönüşüm parametrelerinin ya da diğer bir ifade ile deneme fonksiyonu katsayılarının süreklilik koşullarına uygun biçimde elde edilmesi bu çözümün amacıdır. Önceki deneme fonksiyonu katsayıları koşul denklemlerinde yerine konulur ve koşul denklemleri yeniden düzenlenerek yeni deneme fonksiyonu parametreleri, ilk çözümdekinin aynısı olarak elde edilir. Bu yöntem, pek çok kez çalışmaların aynı anda tüm bölge için yürütülmesi mümkün olmadığından, zaman içerisinde yapılacak tüm yeni çalışmaları sürekli biçimde sürdürmek açısından önemli ve kullanışlıdır.

Sürekliliğe sahip üçgen elemanlar ile dönüşümün kesin değerinin enterpolasyonu

Tez çalışmasında ikinci yaklaşım olarak, çalışma alanını üçgen elemanlara ayıran ve üçgen elemanlar üzerinden bir noktaya enterpolasyon yaparak dönüşüm değeri hesaplayan bir yöntem kullanılmıştır. Burada da, sonlu elemanlar ve süreklilik kavramları referans alınmıştır. Yöntemde ilk adım, proje alanı içindeki dayanak noktalarını üçgenlemek ve alanı köşe noktalarını dayanak noktalarının oluşturduğu üçgen elemanlar ile kaplamak şeklindedir. Daha sonra bir fonksiyon yardımıyla, üçgenin köşe noktalarında fonksiyon değeri ile türev değerleri bulunup, bu değerlerden üçgen içi enterpolasyonda kullanılmak üzere beşinci derece bir polinom elde edilir. Uygulamada, gerek doğruluk beklentisini karşılaması, gerekse dayanak noktalarına düzeltme getirmemesi açısından, oldukça kullanışlı ve yararlı bir çözüme ulaşılması amaçlanır. Üçgen köşelerindeki değerleri belirlemede kullanılan fonksiyon, bir önceki yaklaşımın uygulamasında üçgenin içinde yer aldığı çözüm bölgesi için hesaplanan deneme fonksiyonudur.

Bir büyük proje alanı çözüm bölgelerine ayrılmış ve deneme fonksiyonları sürekli parça fonksiyonlar biçiminde kullanılmış olsa dahi, bir noktaya, o noktayı içine alan dayanak noktalarının oluşturduğu üçgen elemanlarından taşınacak dönüşüm değeri ayrı bir önem taşımaktadır. Çalışmada C_2 sürekliliğine sahip komşu üçgen elemanları arasında sürekli ve ayrılabilir geçişleri garanti eden fonksiyon cümleleri önemli rol oynarlar.

Öncelikle, dayanak noktaları uygun şekilde üçgenlenerek üçgen elemanlar oluşturulur. Üçgenin köşelerindeki üç dayanak noktası üçgen elemanın uç noktalarıdır. Yöntem üç varsayıma dayanır.

1. Kesin değerinin enterpole edilmesi istenen herhangi bir boyut; (n: polinomun derecesi)

$$F(x_i, y_i) = \sum_{j=0}^{5} \sum_{k=0}^{5-j} p_{jk} x^j y^k \qquad (11)$$

   şeklinde x ve y değişkenlerine bağlı 5. dereceden iki değişkenli bir polinomla ifade edilir.

2. Fonksiyon değeri ve onun 1. ve 2. derece kısmi türevleri (f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}) üçgenin köşelerini oluşturan 3 veri noktasında 18 bağımsız koşul getirir.

3. Üçgenin her bir kenarına dik doğrultudaki ayrılmış fonksiyonun kısmi türevi, kenar doğrultusunda ölçülen değişkende, en fazla 3. derece bir polinomdur. Bu kabul de 3 kenar için 3 ek koşul getirir.

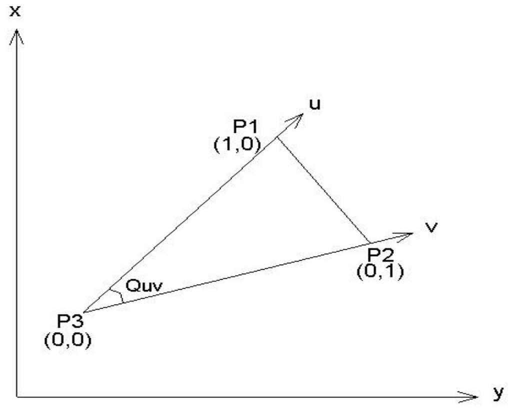
Böylece 2. ve 3. kabullerden elde edilen 21 koşulla, 21 katsayıya sahip 1. kabuldeki enterpolasyon fonksiyonu belirlenebilir (Akima, 1978).

Enterpolasyon formüllerinin elde edilmesi

Enterpolasyon formüllerinin çıkarılması için öncelikle bir üçgen koordinat sistemi Şekil 1'deki biçimde tanımlanmalıdır. Sistemin orijini P3 noktasının üçgen koordinatları (0,0) diğer noktalarınki ise (1,0) ve (0,1) değerlerini alır. Bu üçgen koordinat sistemini u-v koordinat sistemi olarak adlandırılır. u-v ve x-y koordinat sistemleri arasındaki transformasyonun ardından, (11) enterpolasyon fonksiyonu,

$$F(u, v) = \sum_{j=0}^{5} \sum_{k=0}^{5-j} q_{jk} u^j v^k \qquad (12)$$

biçimini alır. 2. ve 3. kabullere göre q katsayıları elde edilerek fonksiyon belirlenir (Preußer, 1984).



Şekil 1. Üçgen koordinat sistemi

Çalışmada, kısmi türevlerin hesabında, çözüm bölgelerinde belirlenen deneme fonksiyonu kullanılmıştır. Böylece sonlu elemanlar yaklaşımı devam ettirilerek sonlu elemanlar yöntemine genel bakış bölümü ile bütünleşen bir algoritma elde edilmiş olmaktadır.

Üçgen içi bu tip bir çalışmanın bazı önemli yararları şu şekilde sıralanabilir;

Üçgen elemanın köşe noktalarını oluşturan dayanak noktalarında eğim ve eğriliklerin tam olarak bilinmesi ile deneme fonksiyonunun hataları en aza indirilir.

Dayanak noktalarına düzeltme getirilmediğinden gerçek değerlerle bir çelişki doğurmaz. Ayrıca süreklilik sadece kenarlar boyunca değil bizzat dayanak noktalarında da sağlanmış olur. Ayrıca, komşu üçgen elemanlar arasında ayrılabilir ve sürekli geçişlere ulaşılır.

Üçgen elemanlara ayrılmış alan boyunca tüm geçişlerde süreklilik sağlanabilir. Enterpolasyon değerleri arasında sıçrama veya kesikliklerin önüne geçilir.

İfade etmeye çalıştığımız uzay eğrisi ayrılabilir ancak sürekli şekilde elde edilmiş olur. Komşu çözüm bölgeleri üzerindeki komşuluk ilişkisi bulunan üçgen elemanlar yardımıyla ortak hat boyunca ikinci bir süreklilik sağlanabilir.

Ele alınan iki yaklaşım da, ayrı ayrı kullanım alanı bulabilir ve uygulamacılara bir alternatif sunabilir. Bu çalışmadaki biçimde birlikte kullanılmaları durumunda, jeodezik dönüşümlerde başarılı bir modelin oluşturulabileceği düşünülmektedir

Test çalışmaları

Test çalışmaları için test ağı olarak, İstanbul Büyükşehir Belediyesi Metropoliten Nirengi Ağı (İGNA) seçilmiştir. Yatay bileşenlerin ITRF-94 ve ED-50 datumları arası dönüşümü için her iki sistemde koordinatları bilinen 31 dayanak noktası, yüksekliklerin dönüşümün için ise ortometrik yüksekliği ile elipsoidal yüksekliği bilinen yaklaşık 400 dayanak noktası bu çalışmada test verisi olarak kullanılmıştır.

Test çalışmasının stratejisi

Sonlu elemanlar yönteminin amacına uygun olarak çalışma alanı olarak seçilen alan doğu-batı doğrultusunda üç çözüm bölgesine ayrılarak her bölge için süreklilikleri sağlanmış deneme fonksiyonları yardımıyla dönüşüm parametrelerinin kestirilmesi amaçlanmıştır. Üç çözüm bölgesine ayrılan proje alanında, bölgelerin komşuluklarında yazılan süreklilik koşullarının modele ilave edilip çözümün gerçekleştirilmesi ile her bir çözüm bölgesi için modellenmesi istenen ΔX, ΔY ve ΔH büyüklüklerine ait parça parça tanımlı deneme fonksiyonu olarak kullanılan iki değişkenli polinomların parametre setleri elde edilmiştir. Elde edilen parametre setleri sürekli fonksiyonlar tanımlamakta olup, süreklilik koşullarının yazıldığı ortak hat üzerinde komşu fonksiyonlar aynı değerlere karşılık gelmektedirler. Bu şekilde aynı zamanda seçilen hatların fermuarlayan hat olma özelliklerinin test edilebilmesine olanak sağlaması amaçlanmıştır.

Sonuçların karşılaştırmalı olarak irdelenebilmesi için, gerçekleştirilen uygulamalar şu şekilde gruplanabilir;

- Tüm proje alanı için tek bir fonksiyon kestirilmesi,
- Üç çözüm bölgesi için süreklilik koşulları kullanmadan fonksiyonlar kestirilmesi,
- Üç çözüm bölgesi için sürekliliği sağlanmış fonksiyonlar kestirilmesi,
- Bir çözüm bölgesi için kestirilen fonksiyonun devamı biçiminde fonksiyonlar kestirilmesi.

Ayrıca, sonlu elemanlar çözümüne dayanan ve üçgen elemanlar yardımıyla matematik modeli kurulan üçgen içi enterpolasyon yöntemi test ağı içersinde kullanılmıştır. Dayanak noktalarının oluşturduğu üçgensel bir alanda noktanın yeni sistemdeki kesin değerini daha presizyonlu bir şekilde saptamaya elveren üçgen elemanlarla dönüşüm uygulamaları yükseklik değerlerinin dönüşümü için gerçekleştirilmiştir.

ITRF-94 ile ED-50 arasında dönüşüm

İki sistem arasında dönüşüm değerlerinin hesaplanmasında, 31 dayanak noktasının bulunduğu bir veri kümesi kullanılmıştır. Üç çözüm bölgesinin her birinde en az 10 dayanak noktası bulunduğundan her biri için deneme fonksiyonu olarak üçüncü derece iki değişkenli polinom kullanılmış olup her bir üçüncü derece polinomdaki 10 parametre için katsayılar belirlenmiştir. Çözüm bölgelerinde parçalı sürekli deneme fonksiyonları belirlenmesinde, ortak hattın dayanak noktalarından oluşması ve X eksenine paralel olması gibi iki ayrı durumda denenmiştir.

Polinom üçüncü derece seçildiğinden süreklilik koşul denklemleri sayısı dokuz ve üç çözüm bölgesinde iki komşuluk ilişkisi olduğundan modele konan koşul denklemi sayısı toplamı 18'dir. Bir komşuluk ilişkisindeki 9 koşulun 4'ü C_0, 3'ü C_1 ve 2'si C_2 sürekliliklerine aittir. Koşul denklemlerinin hesabında ortak hatların X eksenine paralel olması durumunda elde edilen eşitlikler koşul_1, ortak hatların veri noktaları arasında olması durumunda elde edilen eşitlikler koşul_2 olarak adlandırılmışlardır.

Uygulamalarda kurulan matematik model ile dönüşüm sonuçlarının irdelenebilmesi amacıyla 3'lü gruplar halinde dayanak noktalarını dışarıda bırakan 4 ayrı dayanak noktası kümesi ve tüm noktaların kullanıldığı küme olmak üzere 5 ayrı veri noktası grubunda yatay bileşenlerin dönüşümü gerçekleştirilmiştir.

Sürekliliğin sağlanıp sağlanmadığının incelenmesi ve araştırılması amacıyla Tablo 1 düzenlenmiştir. Bu tablolarda, üç bölgede ayrı ancak süreklilik koşul denklemleri kullanılmadan yapılan çözümlerin sonuçları ve iki ayrı tür koşul denklemi hesabı seçeneğinde yapılan çözümlerin sonuçları, konumlarına göre özel seçimli noktalar üzerinde test edilmiştir. Test noktaları ortak hattın üzerinde seçilerek sürekliliğin irdelenmesi amaçlanmıştır. Tablonun ilk kısmında koşulsuz çözüm, ikinci kısımda ortak hattın X eksenine paralel alınmasına göre türetilen koşullarla çözüm (koşul_1) sonuçları Tablo 1'de sunulmuştur. Burada tablolar incelenirken ortak hatlar üzerinde seçilen noktaların komşu polinomlardan hesaplanan değerlerindeki özdeşliğe dikkat edilmelidir.

Tablo 1. Sürekliliklere ilişkin sonuçlar

Sağa değerler için sürekliliğe ilişkin sonuçlar

Üç bölge için koşulsuz çözüm			
10011	393995.3114	393994.7969	393991.1891
10012	393995.4357	393995.6287	393994.7601
10014	425339.8798	425341.3567	425340.9752
10015	425340.5502	425341.7073	425341.3712

Koşul_1 Tipi çözüm (dx=0)			
10011	393995.1330	393995.1330	393995.0085
10012	393995.3566	393995.3566	393995.2322
10014	425341.3966	425341.2367	425341.2367
10015	425341.5523	425341.3924	425341.3924

Yukarı değerler için sürekliliğe ilişkin sonuçlar

Üç bölge için koşulsuz çözüm			
10011	4570563.8063	4570564.0072	4570564.6785
10012	4540763.3427	4540763.3420	4540763.0986
10014	4559008.1238	4559006.6147	4559007.0022
10015	4541832.2789	4541831.1526	4541831.1388

Koşul_1 Tipi çözüm (dx=0)			
10011	4570563.9722	4570563.9722	4570563.9486
10012	4540763.2937	4540763.2937	4540763.2700
10014	4559006.5222	4559006.6132	4559006.6132
10015	4541831.0327	4541831.1237	4541831.1237

Eklemeli çözüm

Bu uygulamada, zaman içerisinde devam eden çalışmalarda her bir yeni çözüm bölgesinin bir önceki çözüm bölgesinin devamı niteliğinde sürekli bir biçimde devam ettirilebilmesi amacıyla, bir önceki alan için belirlenmiş fonksiyona bağlı olarak komşu alanda yapılacak yeni bir dönüşüm işlemi gerçekleştirilmiştir. Tüm seçenekler için yapılan eklemeli çözüm uygulamalardan birine ait sonuçlar Tablo 2'de verilmektedir.Tablo 2'de eklemeli çözüm ile elde edilen sonuçların üç bölgenin aynı modelde değerlendirildiği sonuçların aynı olduğu görülmektedir.

Tablo 2. Eklemeli çözüm sonuçları

N.N	Üç bölgeli koşullu çözüm (dx=0 hali)	Üçüncü bölge için eklemeli çözüm	Üçüncü bölge için bağımsız çözüm
	3. Bölge	3. Bölge	3. Bölge
10010	382979.5810	382979.5810	382978.4513
10011	393995.0085	393995.0085	393991.1891
10012	393995.2322	393995.2322	393994.7601
10013	410789.0542	410789.0542	410788.4537
10014	425341.2367	425341.2367	425340.9752
10015	425341.3924	425341.3924	425341.3712
10016	437002.7031	437002.7031	437002.7433
10020	402338.3873	402338.3873	402336.2565
10021	398173.4417	398173.4417	398172.0953
10022	421823.0288	421823.0288	421822.9228
10023	429903.9022	429903.9022	429903.8014

Yüksekliklerin dönüşümü

İstanbul Metropoliten Nivelman Ağı olarak seçilen proje alanında geoit yüksekliklerinin belirlenmesinde, her iki yükseklik sisteminde yükseklikleri bilinen toplam 340 dayanak noktası kullanılmış, yine geoit yükseklikleri bilinen 66 nokta ile de dönüşüm sonuçları test edilmiştir.

Geoit yüksekliklerinin belirlenmesi işleminde de sağa ve yukarı değerlerin dönüşüm işleminde olduğu gibi, proje alanı doğu-batı yönünde üç çözüm bölgesine ayrılmıştır. Toplam 340 dayanak noktasından 122'si birinci, 92'si ikinci ve 126'sı da üçüncü çözüm bölgesi içinde kalmaktadır. Yine karşılaştırma amacı ile kullanılan ve dayanak noktaları kümesine dahil edilmeyen 66 noktanın 18'i birinci, 10'u ikinci ve 38'ide üçüncü çözüm bölgesi içinde yer almaktadır.

Dönüşüm sonuçlarının gerçek değerlerden sapmalarına göre hazırlanan şema Tablo 3'te oluşturulmuştur.

Tablo 3. Farkların kareleri toplamları (m)

Test Noktaları	Nokta Sayısı	Üç Çözüm Bölgesi Süreklilik Koşullu	Üç Bölge Koşulsuz	Tek Bölge
1. Çözüm Bölgesi	18	0.0277	0.0099	
2. Çözüm Bölgesi	10	0.0325	0.0201	0.2199
3. Çözüm Bölgesi	38	0.0944	0.0625	
Toplam	66	0.1546	0.0925	0.2199

Burada, ilk çözüm bölgesinde 18, ikinci çözüm bölgesinde 10, üçüncü çözüm bölgesinde ise 38 noktanın farklarının kareleri toplamı verilmektedir.

Sürekliliğe sahip üçgen elemanlar ile dönüşüm

Dayanak noktalarının oluşturduğu ve dönüşüm değerinin bulunması istenen noktayı içine alan en küçük birim olan bir üçgen içerisinde, dayanak noktalarına düzeltme getirmeden ve süreklilik ilkesine uygun biçimde bir noktanın dönüşmüş değerinin belirlenmesi amacıyla; test için kullanılan noktalar ve bunların etrafındaki en yakın ilişkileri olan dayanak noktalarının köşelerini oluşturduğu üçgen alanlardan yararlanılmıştır. Üçgen enterpolasyonu eşitliklerinde gerekli değerlerin hesaplanması için bir önceki çalışma adımında proje alanının çözüm bölgelerine ayrılmasıyla elde edilen sürekli deneme fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

Uygulama için üç çözüm bölgesindeki dokuz üçgen eleman içinde toplam onyedi test noktasına dönüşüm değeri hesaplanarak, gerçek değer deneme fonksiyonundan bulunan değer ile karşılaştırılmıştır. Tablo 4'te iki üçgendeki enterpolasyon sonuçları karşılaştırmalı biçimde verilmektedir.

Sonuç ve öneriler

Yaklaşımlardan ilki olan, parça tanımlı sürekli fonksiyonların belirlenmesine ilişkin sonuçlar incelendiğinde, sonlu elemanlar yönteminin ve süreklilik koşulları kullanılmasının dönüşüm işlemi sonuçlar üzerinde hedeflenen etkileri gösterdiği söylenebilir. Proje alanının çözüm bölgelerine ayrılması sonrasında bu bölgeler için kestirilen parça tanımlı deneme fonksiyonları sürekli biçimde elde edilmişlerdir.

Tablo 4. Üçgen elemanlarla enterpolasyon

Üçgen Elemanın Köşe Noktaları : 15786 , 15788 15789

N.N	Gerçek Değer	Süreklilik Koşullu Deneme Fonksiyonu	Fark (m.)	Üçgen Elemanlarla Enterpolasyon	Fark (m.)
15787	48.2951	48.4765	0.1814	48.3271	-0.0320

Üçgen Elemanın Köşe Noktaları : 16306 , 16324 , 16326

N.N	Gerçek Değer	Süreklilik Koşullu Deneme Fonksiyonu	Fark (m.)	Üçgen Elemanlarla Enterpolasyon	Fark (m.)
16307	229.8945	229.8408	0.0537	229.8914059	0.0031
16308	222.2149	222.1587	0.0562	222.2046419	0.0103
16315	256.0858	256.0277	0.0581	256.0828594	0.0029
16316	230.1974	230.1267	0.0707	230.1821281	0.0153
16325	221.0480	220.9623	0.0857	221.0194361	0.0286

Sağa ve yukarı değerler için deneme fonksiyonu belirlenmesi sonuçlarında dikkat edilecek bir başka önemli nokta da; koşul denklemlerinin toplam çözüm üzerinde denetleyici bir rol oynaması ve dönüşüm modelini iyileştirmesidir. koşul denklemlerinin yazıldığı çözümlerde, koşul denklemi yazılmamış duruma göre,daha iyi sonuçlar alındığı görülmektedir. Özellikle proje alanının uç bölgelerinde yer alan ve de etrafında fazla dayanak noktası bulunmayan test noktalarında koşul denklemleri tüm alanın genel trendini bu noktalara taşımakta ve fonksiyonun anlamsız değerler vermesini engellemektedir.

Çalışmada özellikle araştırması yapılan bir yöntemde, sürekliliklerin sağlanması için tüm çözüm bölgelerinin aynı modelde değerlendirilmesi yerine zaman içerisinde farklı modelden hesaplanan sonuçların da sürekliliğe uygun elde edilmesi çalışmasıdır. Eklemeli çözüm olarak sunulan yöntem ile, dönüşüm çalışmaları gerçekleştirilen alanların komşuluğundaki yeni alanlar için, kesiklikler ve tutarsızlıklara yol açmadan komşu alanlarla sürekliliği sağlanmış biçimde, yeni dönüşüm parametreleri hesaplamak mümkün olabilmektedir. Yeni çözüm bölgesi için bulunan deneme fonksiyonun tanımladığı uzay eğrisinin, bir önceki deneme fonksiyonunun tanımladığı uzay eğrisinin devamı niteliğinde elde edilmesi olanaklıdır. Yani, parça tanımlı deneme fonksiyonları için sürekliliğin zaman içinde devam ettirilmesi olanaklı hale gelmektedir.

Yüksekliklerin dönüşümünde, parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonlarından geoit yüksekliklerinin modellenmesiyle ortometrik yükseklikler elde edilmiştir. Proje alanını üç çözüm bölgesine ayırarak parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonları ile gerçekleştirilen çözümün tüm alan için tek bir fonksiyonla yapılan çözüme göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlenebilmektedir. Proje alanının daha büyük olduğu durumlarda bu farkın daha da büyüyeceği açıktır.

Bu uygulamada, üç bölge için süreklilik koşulları olmaksızın bulunan sonuçlar sonlu elemanlar çözümü sonuçlarına göre biraz daha iyi gözükmekle birlikte, bu çözümde süreksizlikler büyük oranda ortaya çıkmakta ve proje alanı boyunca tek anlamlı olmayan binmeli yada kesikli durumlar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, geoit modelinin proje alanı boyunca sürekliliği sağlanmamış farklı çözümlerden oluşturulması kabul edilebilir bir seçim olmamaktadır. Test ağı olarak seçilen alan çok büyük olmamasına karşın, alanın çözüm bölgelerine ayrılmasıyla parça tanımlı sürekli deneme fonksiyonları kullanılarak yapılan çözümün yararları açıkça görülmektedir. Proje alanının daha büyük seçildiği uygulamalar için yaklaşım daha yararlı ve kullanışlı hale gelecektir.

Üçgen elemanlar kullanılarak sürekliliği olan dönüşüme dönük uygulamalar incelendiğinde bir noktayı içine alan dayanak noktalarının oluşturduğu üçgen eleman içinde yapılan dönüşümün beklentiler doğrultusunda çok iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Deneme fonksiyonlarından bir noktaya hesaplanan dönüşüm değerine göre, bu deneme fonksiyonun kullanılmasıyla yapılan üçgen enterpolasyonu sonunda test noktalarının gerçek değerlerine çok daha yakın değerler elde edilmiştir. Yöntemin bu başarısında, sürekli biçimde belirlenen parça tanımlı deneme fonksiyonlarının da etkisi büyüktür. Üçgen elemanların dönüşüm yöntemi olarak kullanılması, gerek fonksiyonun sağlayamadığı doğruluğa ulaşması, gerek dayanak noktalarına düzeltme getirilmeden dönüşüm hesabının gerçekleştirilmesi ve gerekse sürekliliklerin sağlanmış olması açısından önemli yararlar sağlamaktadır. Ayrıca, yöntem anlaşılması ve uygulanması açısından rahat olup, işlem kolaylığı da sağlamaktadır.

Sonlu elemanlar yönteminin temel prensiplerinden yola çıkılarak gerçekleştirilen çalışmalar sonucunda, matematik modelleri oluşturulan iki farklı sonlu elemanlar yaklaşımının birlikte kullanılmasıyla elde edilen çözümün, dönüşümlerde yaşanan sıkıntıların aşılmasına katkı yapacağı inancı taşınılmaktadır. Bundan sonra bu konuda yapılacak yeni çalışmalarda daha iyi sonuçlar alınabileceği ümidi ile, araştırmacılara bir fikir verebilmek ve uygulamacılara seçenek sunmak yürütülen tez çalışmasının en önemli amaçlarından biridir.

Kaynaklar

Akima, H., (1975). A method of bivariate ınterpolation and smooth surface fitting for values given at ırregularly distrubuted points, *OT Peport*. U.S. Government Printing Office. Washington D.C, 75-70.

Akima, H., (1978). A method of bivariate ınterpolation and smooth surface fitting for ırregularly distributed data points, *Acm Trans. Math. Software*, **4**, 2, 148-159.

Deniz, R., Uydu Jeodezisi Ders Notları, İTÜ, İstanbul.

Dinter, G., İllner, M., Jager, R., (1996). A synergetic approach for the transformation of elipsoidal heights ınto a standart height reference system, *Reports of the EUREF Technical Working Group*, Publication No.5, München.

Dinter, G., İllner, M., Jager, R., Schmitt,G., (1997). Entwicklung und softwaremäßige realisierung eines allgemeinen modells zur überfuhrung von gps-höhen in Gebrauchshöhensystem, Geodatische Institut, Universtät Karlsruhe.

Preußer, U.A., 1984. Bivariate ınterpolation über dreickselementen durch polynome 5. Ordung mit C1- Kontinuität, *Zfv*, **6**, 292-301.

Zienkiewicz, O.C., Morgan, K., (1983). Finite elements and approximation, A Wiley Interscience Publication, New York.