

Elastik zemin üzerindeki çubuk uygulamalarının serbest ve nonlinear titreşim analizi

Ali BAHÇIVAN*, Vedat KARADAĞ

İTÜ Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Gümüşsuyu, 34437, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, değişik mesnet koşullarında iki parametrelili bütünüyle ve kısmi elastik zemin üzerinde üniform kalın çubuk elemanın serbest ve nonlinear titreşimlerinin analitik ve deneysel analizi yapılmıştır. Nonlinear analizde, sadece eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanı serbest titreşimleri incelenmiştir. Çubukların titreşim analizi, değişik mesnet koşullarında boyuna uzama da hesaplara dahil edilerek incelenmiştir. Elastik zemin; Winkler zemin modülü ve kayma zemin modülü ile isimlendirdiğimiz iki modülle karakterize edilen sabit iki-parametrelili model olarak temsil edilir. Kayma deformasyonu, zemin rijitlik parametreleri ve kısmi elastik zemin etkilerinin yanında, nonlinear eğilme, boyuna-eğilme girişimi ve büyük yer değişimlerinden kaynaklanan nonlinear etkiler incelenmiştir. Bu analizden elde edilen analitik ve deneysel sonuçlar arasında iyi bir uyumun olduğu da gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çubuk, doğal frekans, dönme ataleti, elastik zemin, kayma deformasyonu.

The analysis of free and nonlinear vibrations of beam applications on elastic foundation

Abstract

In the present work, the analytical and experimental analysis of free and nonlinear vibrations of uniform thick beam element on two-parameter full and partial elastic foundation is made. In the nonlinear analysis, free vibrations of 6 degrees of freedom thick beam element are only investigated. The vibration analysis is also made considering axial displacement of the beam in different end conditions. The elastic foundation is idealized as a constant two-parameter model characterized by two moduli, i.e. the Winkler foundation modulus k and the shear foundation modulus k_G . In the case $k_G=0$, this model reduces to the Winkler model, i.e. the elastic foundation is idealized as a constant one-parameter model. The effects of shear deformation; foundation stiffness parameters and partial elastic foundation are examined. Nonlinear vibrations of the beam are calculated by considering all nonlinear effects. In the nonlinear vibration analysis, nonlinear bending, longitudinal-bending and large bending displacement effect are included to nonlinearity. In addition to these effects, nonlinear bending, longitudinal and large bending displacement are examined as nonlinear effects. The results obtained from the analytical and experimental studies are presented by showing in tables and graphs and their importance in design is discussed. The numerical results obtained from this analysis are compared with the exact or available solutions in the literature, wherever possible. The analytical and experimental results and comparisons show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Beam, natural frequency, rotatory inertia, elastic foundation, shear deformation.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Ali BAHÇIVAN. abahcivan@petkim.com.tr; Tel: (232) 616 12 40-41 54.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makina Fakültesi'nde tamamlanmış olan "İki parametrelili elastik zemin üzerinde kalın çubukların serbest ve nonlinear titreşimlerinin analitik ve deneysel analizi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 24.06.2004 tarihinde dergiye ulaşılmış, 07.07.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.12.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Toprak-yapı etkileşimi ile ilgili birçok problem, elastik zemin üzerinde çubuk ile modellenilebilir. Elastik zemin üzerine oturan çubuklar uygulamada çok kullanılan yapı elemanlarıdır. Buna pratik örnekler; demiryolu üst yapıları, otoyol zemini ve bütünüyle desteklenen boru hatlarıdır. Geçmiş yıllarda, havaalanı yapılarında filamentlerin kullanımının artması, soğuk bölgelerde yapılan bina çalışmaları ile elastik veya visko-elastik zemine oturan çubuk problemlerinin çözümüne olan ihtiyacı arttırmış, uygulama alanının genişliği nedeniyle de bu konuda birçok araştırma yapılmıştır.

Elastik zemine oturan çubukların hesabı için, zemin özelliklerini ve davranışını dikkate alan birçok hipotez vardır. Elastik zemine oturan çubuklara ait çalışmalarda esas hipotez, genellikle zemin tepkileri konusunda yapılan hipotezdir. Bunlar arasında en çok kullanılanı, zemin reaksiyonunun çubuğun sehimleri ile orantılı olduğuna dayanan Winkler hipotezidir. Bu orantı, Winkler zemin modülü veya 1. zemin parametresi olarak adlandırılır. Winkler zemin modülünde, zemine etkileyen kuvvetler yalnız etkilediği noktada şekil değiştirme oluşturduğu yani bu durumda zemin birbirinden bağımsız ve birbirine sonsuz yakın yaylardan bileşikmiş gibi göz önüne alınmakta, bu yayların yalnız doğrudan doğruya yüklendiklerinde çekip tepki gösterdikleri, ancak her yayın komşu yayların yüklenme ve çekmesinden etkilenmediği kabul edilmektedir. Diğer bir ifadeyle, Winkler zemin; birbirine yakın yerleştirilmiş, çubuk boyunca üniform dağılılan, bağımsız, lineer elastik düşey bir grup yaydan oluşmaktadır. Fakat, gerçekte yalnız yüklenen bölge deplasman yapmakta, yüklenen bölgeye bitişik yerler ise yüklü bölgeye uzaklıklarıyla orantılı olarak deplasman yapmaktadır.

Elastik zemin, genelde matematiksel kolaylığı ve basitliği açısından Winkler zemin ile yani 1-parametrelili zemin ile modellenir. Fakat, Winkler zemin, pratikte birçok elastik zemin karakteristiklerini hassas ve kusursuz bir şekilde temsil edemez. Winkler zemin modelinin süreksiz doğasını elimine edebilmek için, Winkler modelden

daha kusursuz ve elastik sürekli ortam modelinden daha basit olan iki parametrelili zemin modeli geliştirilmiştir. 2. zemin parametresi, zemini temsil eden yaylar arasındaki ilişkilere veya zeminin elastik sabitlerine bağlı olarak, değişik zemin modellerinde değişik şekillerde tanımlanmıştır. Çalışmada, 2-parametrelili elastik zemin modelinde, yaylar arasında kayma etkileşimi vardır. Yayların üst uçlarına, sadece transverse kayma ile deforme olan sıkıştırılmaz bir tabaka (kayma tabakası) bağlanmıştır.

Temelde kalın çubukların titreşimlerine yönelik çalışmalar; literatürde görüldüğü gibi büyük ilgi konusu olmuştur (Huang, 1961; Przemieniecki, 1968; İpek, 1979; Bahçivan ve Karadağ, 1999). Kısmi ve bütünüyle elastik zemin üzerinde kalın çubukların serbest titreşimleri üzerinde yine literatürde sayısız araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde çalışma yapılmıştır (Doyle ve Pavlovic, 1982; Eisenberger vd., 1985; Valsangkar, 1987). İki parametrelili zemin modeli yine literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Eisenberger ve Clastornik, 1987; Valsangkar ve Pradhanang, 1988; Shirima ve Giger, 1992; De Rosa, 1993; Franciosi ve Masi, 1993; De Rosa, 1995; Yokoyama, 1996; Mously, 1999). Titreşim analizi üzerine sonlu elemanlar modelinin uygulamasına dönük çalışmalar ise, literatürde güçlü bir prosedür olmuştur (Przemieniecki, 1968; Severn, 1970; Petyt, 1991; Fagan, 1992; Knight, 1993).

Son birkaç yıl içinde, klasik Bernoulli-Euler çubukların nonlinear titreşimleri birçok yazar tarafından yoğun bir şekilde araştırılmıştır (Mei, 1985, 1986; Lewandowski, 1987; Yucheng ve Raymond, 1997). Yüksek kayma modülüne sahip kompozit malzemelerin yoğun bir şekilde kullanımı ve uzay, inşaat ve makine mühendisliği uygulamalarında yüksek doğal frekansa sahip çubuk elemanlarını kullanma gereği, klasik çubuk teorisini yetersiz kılmıştır. Sonuçta, dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkilerini içine alan kalın çubuk teorisinin, çubukların dinamik cevaplarının, serbest titreşim ve stabilite problemlerinin araştırılmasında kullanımı zaruri olmuştur. Buradan hareketle, literatürde de görüldüğü üzere, kalın çubukların nonlinear titreşimleri üzerine kapsamlı bir çalışma yapılmıştır (Rao ve

Raju, 1976; Singh vd., 1990; Rao, 1992; Lewandowski, 1994; Srirangarajan, 1994; Lin ve Tsuai, 1996; Foda, 1995, 1999).

Çalışmada, lineer serbest titreşim analizi eğilme hareketi 4 ve 6 serbestlik dereceli iki farklı kalın çubuk elemanı Bahçivan ve Karadağ (1999) kullanılarak yapılmıştır. Bunun yanında, non-linear analiz, sadece eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanı kullanılarak yapılmıştır. Mevcut çalışmada, çubuk doğal frekansları üzerinde dönme ataleti ve kayma deformasyonu ile zemin rijitlik parametreleri ve kısmi zeminin etkileri incelenmiştir. Bu etkilerin yanında, nonlinear analizde, çubuk doğal frekansları üzerinde nonlinear eğilme, boyuna-eğilme girişimi ve büyük yer değişimlerinden kaynaklanan nonlinear etkiler araştırılmıştır. Kısmi ve bütünüyle elastik zemin üzerinde eğilme hareketi 4 ve 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanlarının değişik sınır şartlarında sonlu elemanlar modeliyle analitik ve deneysel olarak serbest ve nonlinear titreşim analizi yapılmıştır.

Analitik hesaplamalarda, çubuk malzemesi olarak C67 çelik çubuk ve sert plastik kullanılırken; deneysel analizde çubuk malzemesi olarak, çelik, sert plastik, pirinç ve alüminyum çubuk ve elastik zemin malzemesi olarak da, gri sünger, beyaz sünger, polietilen köpük ve cam yünü kullanılmıştır. Çubuk malzemelerine ait mekanik özellikler, çubuk malzemelerinin temini esnasında satış kataloglarından elde edilmiştir. Bunun yanında, beyaz sünger ve gri sünger gibi elastik zemin malzemelerinin elastiklik modülleri TSE'nce deneysel olarak elde edilmiştir. Diğer elastik malzemelerinin mekanik özellikleri ise üretim kataloglarından temin edilmiştir.

Deneysel analizde, elastik zemin modülleri hesaplanırken çökmelerin hassas olarak bulunmasında komparatör ölçümlerinden faydalanılmıştır.

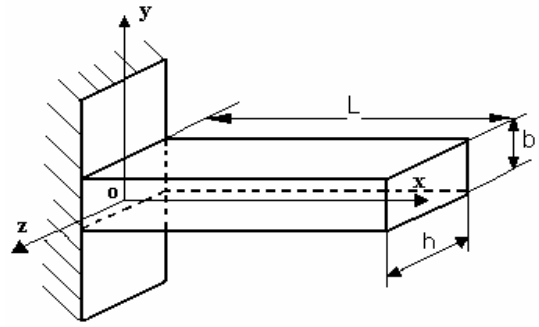
Deneyde kullanılan çubuk ve elastik zemin malzemelerinin küçük sönüm miktarlarını tespit etmek amacıyla, deneysel olarak malzemelerin boyutsuz sönüm faktörleri elde edilmiştir.

Analitik hesaplamalarda, Winkler zemin rijitlik parametresi λ ve kayma zemin rijitlik paramet-

resi λ_G değerleri De Rosa (1993)'dan alınmıştır. Nonlinear analizde kullanılan s/r değeri ise, Srirangarajan (1994)'dan alınmıştır.

Hareket denklemleri

Kesit alanı A , elastiklik modülü E , kayma modülü G , kütleli atalet momenti I ve yoğunluğu ρ olan dikdörtgen kesitli L uzunluğunda elastik kalın bir çubuk için, aşağıda Şekil 1'de görüldüğü gibi, koordinat sistemi; çubuğun asal eksenini x eksenine, kalınlığını z eksenine ve yüksekliğini de y eksenine gösterecek şekilde $oxyz$ eksen takımı seçilmiştir.

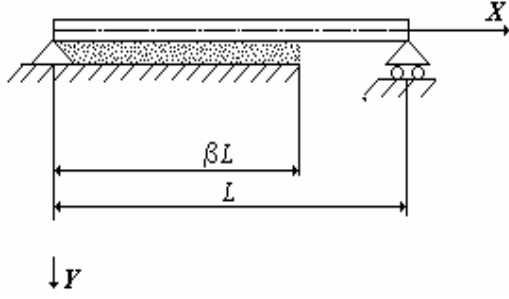


Şekil 1. Koordinat eksenleri

Şekil 2'de gösterildiği gibi, kısmi elastik bir zemin üzerinde kalın çubuk elemanını alalım. Burada, elastik zemin; k Winkler zemin modülü ve k_G kayma zemin modülü ismini verdiğimiz iki modülle karakterize edilebilen sabit iki parametrelili bir modelle temsil edilir. Eğer $k_G=0$ olursa, modelimiz bilinen 1-parametrelili (Winkler zemin modeli) modele dönüşür. Mevcut modelimizde, (i) çubuk malzemesinin izotropik, homojen ve lineer elastik olduğunu, (ii) çubuk titreşim genliklerinin yeterince küçük olduğunu, (iii) çubuk kesit düzleminin başlangıçta çubuk nötr eksenine normal olduğunu fakat, eğilme sonrasında bunun değiştiğini, (iv) zemin sönüm ve eylemsizliğinin ihmal edilebilir olduğunu, (v) çubuk ve zemin arasındaki bağı kusursuz olduğunu kabul ediyoruz.

İki parametrelili elastik zemin üzerinde kalın çubuğun hareketine ait diferansiyel denklemleri, potansiyel ve kinetik enerji denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. 2-parametrelili elastik zemin üzerinde çubuğa ait toplam potansiyel enerji denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$V = V_L + V_{NL} \quad (1)$$



Şekil 2. Kısmi elastik zemin üzerinde üniform kalın çubuk

2-parametrelili elastik zemin üzerinde çubuğun lineer potansiyel enerjisi açık bir ifadeyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V_L = \frac{1}{2} EI \int_0^l (w'')^2 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^l (u')^2 dx + \frac{1}{2} k'GA \int_0^l \psi^2 dx + \frac{1}{2} k \int_0^l w^2 dx + \frac{1}{2} k_G \int_0^l (w')^2 dx + \frac{1}{2} k_{bz} \int_0^l u^2 dx \quad (2)$$

Bu denklemde, terimler sırasıyla, eğilmeden dolayı çubukta depolanan potansiyel enerjisi; çubuğun toplam boyuna yer değişimi potansiyel enerjisini; çubuğun eğilmesi esnasında dönmeden dolayı oluşan kayma şekil değiştirmesi sebebiyle çubukta depolanan potansiyel enerjisi; Winkler zemin etkisiyle oluşan potansiyel enerjisi; Kayma zemin etkisiyle oluşan potansiyel enerjisi ve son ifade ise; boyuna yönde zemin etkisi yay etkisi gibi düşünülürse, bu durumda oluşan potansiyel enerjisi ifade eder.

2-parametrelili elastik zemin üzerinde çubuğun nonlineer potansiyel enerjisi açık bir ifadeyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V_{NL} = \frac{1}{2} EA \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

Çubuğun tanımından $\varphi_{\max_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i-1}$

olarak alınır, potansiyel enerji denklemi tekrar aşağıdaki şekliyle yazılabilir.

$$V_{NL} = \frac{1}{2} EA \varphi_{\max}^2 \int_0^l \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EA \varphi_{\max} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \quad (4)$$

Bu denklemde, terimler sırasıyla, nonlineer eğilme yer değişimi nedeniyle çubuktaki potansiyel enerjisi; boyuna-eğilme girişimi halinde çubuktaki potansiyel enerjisi ifade eder.

2-parametrelili elastik zemin üzerinde çubuğa ait toplam kinetik enerji denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T = T_1 + T_{BYD} \quad (5)$$

2-parametrelili elastik zemin üzerinde çubuğun kinetik enerji denklemi açık olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m_{ek} \left(\frac{dx(L)}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

Bu denklemde, terimler sırasıyla, boyuna yer değişimi kinetik enerjisini; çubuğun eğilme yer değişimi halinde kinetik enerjisini; büyük yer değişimleri halinde kinetik enerjisi ve ankastre-serbest halde çubuk serbest ucunda nokta kütle olması halinde kinetik enerjisi ifade eder.

2-parametrelili elastik zemin üzerinde büyük eğilme yer değişimlerine maruz çubuğun kinetik enerjisi ise aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$T_{BYD} = \frac{1}{2} \rho A l^2 \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)^2 dx \quad (7)$$

Çubuğun tanımından $\varphi_{\max_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i-1}$

olarak alınır, kinetik enerji denklemi tekrar aşağıda gösterildiği gibi verilebilir.

$$T_{BYD} = \frac{1}{2} \rho A l^2 \varphi_{\max}^2 \int_0^l \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)^2 dx \quad (8)$$

Sonlu elemanlar formülasyonu

Sistemin hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 \quad (9)$$

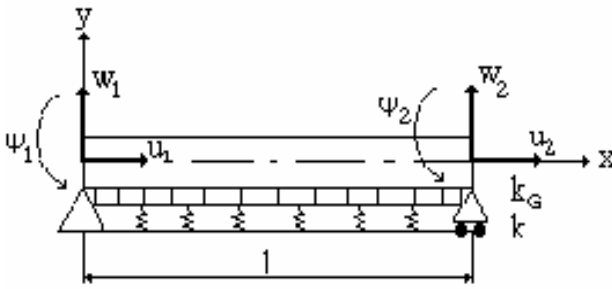
Bu denklemde T kinetik enerjiyi, V potansiyel enerjiyi, δA ise virtüel işi ifade etmektedir. Hamilton prensibinden hareketle kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinin yazılması ile, serbest titreşimler için;

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (10)$$

bağıntısı elde edilir. Sistemin ω frekansı ile harmonik yer değişimi yaptığını kabul edersek denklem aşağıdaki şekle dönüşür;

$$[[K] - \omega^2 [M]]\{\delta\}_i = 0 \quad (11)$$

Sonlu elemanlar yöntemi, (10) denkleminin çözülebilmesi amacıyla $[K]$ ve $[M]$ matrislerini elde etmek için yeterli yaklaşımı sağlamaktadır. Çubukların eğilme titreşimleri incelenirken, eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı oluşan dönme ataleti ve kayma şekil değiştirmesi de hesaba katılmış ve incelenmiştir. Şekil 3'te 2-parametrelili elastik zemin üzerinde kalın çubuğa ait düğüm noktalarının boyuna, eğilme ve dönme koordinatları verilmiştir.



Şekil 3. 2-parametrelili elastik zemin üzerinde kalın çubuk elemanı düğüm noktalarına ait yer değiştirmeler

Analitik ve deneysel sonuçlar ve tartışılması

Lineer serbest titreşim analizinde kullanılan veriler Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir. Tablo 1,

kullanılan çubuk malzemelerinin geometrik ve mekanik özelliklerini verirken, Tablo 2'de, kullanılan elastik zemin malzemelerinin benzer özelliklerini vermektedir. Tablo 3 ise, nonlineer hesaplamalarda kullanılan çubuk malzemelerinin özelliklerini vermektedir. Sayısal değerler çift hassaslıklı olarak hassas, standart yöntemler kullanılarak çözülmüştür (İpek, 1979; Karadağ, 1996). Eğilme hareketi 4 ve 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanlarına ait kütle $[M_e]$ ve rijitlik $[K_e]$ matrisleri Bahçivan (1999)'dan, elastik zemine ait rijitlik $[K_{f1}]$ ve $[K_{f2}]$ matrisleri ise Bahçivan (2002)'den alınmıştır. Deneyde kullanılan cihazlar; 1 Adet iki kanallı CSI Model-2120 Machinery Analyzer, 1 Adet CSI İvme Transdüseri Type A0720GP, 1 Adet Darbe çekici ve 1 adet Sensor Tutucu.

Tablo 1. Çubuk malzemelerinin mekanik ve geometrik özellikleri (deneysel)

Özellik.	Plastik çubuk (Polipom)	Çelik çubuk (St-37)	Pirinç çubuk (%30 Zn)	Alumin. çubuk (6063)
E (N/m ²)	2.7 10 ⁹	215.0 10 ¹⁰	1.0 10 ¹¹	69.0 10 ⁹
G (N/m ²)	2.7 10 ⁹	215.0 10 ¹⁰	1.0 10 ¹¹	69.0 10 ⁹
ρ (kg/m ³)	1420	7850	8500	2710
b (mm)	30	30	30	30
h (mm)	10	10	10	10
L (mm)	500	500	500	500
k'	5/6	5/6	5/6	5/6

Tablo 2. Elastik zemin malzemelerinin mekanik ve geometrik özellikleri (deneysel)

Özellikler	Gri Sünger	Cam Yünü	Poliyeten Köpük	Beyaz Sünger
E (N/m ²)	28.66 10 ⁴	4.90 10 ⁴	24.1 10 ⁴	3.43 10 ⁴
b (mm)	60	60	60	60
h (mm)	12	12	12	12
L (mm)	500	500	500	500
k (N/m)	6.442 10 ³	3.447 10 ³	3.628 10 ³	2.418 10 ³
k _G (Nm)	8.792	2.288	4.008	1.878

Tablo 3. Çubuk malzemelerinin mekanik ve geometrik özellikleri (analitik)

Özellikler	Plastik çubuk	C67 çelik çubuk
E (N/m ²)	3.3 10 ⁹	2.0 10 ¹¹
G (N/m ²)	3.3 10 ⁹	2.0 10 ¹¹
ρ (kg/m ³)	1180	6790
b (m)	0.0656	0.0151
h (m)	0.00311	0.0006
L (m)	0.2	0.2
k'	5/6	5/6

Nümerik sonuçlar aşağıda verilen boyutsuz parametrelerle elde edilmiştir;

$C^4 = (\rho AL^4 / EI) \omega^2$:Frekans parametresi

$\lambda = kL^4 / EI$:Winkler zemin parametresi

$\lambda_G = k_G L^2 / \pi^2 EI$:Kayma zemin parametresi

$\beta = (L - L_1) / L$:Zeminle desteklenen boyun çubuk toplam boyuna oranı
(L_1 = desteklenmeyen boy)

2-parametrelili kısmi ve bütünüyle elastik zemin üzerinde eğilme hareketi 4 ve 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanlarının analitik ve deneysel olarak serbest ve nonlinear titreşim analizi yapılmıştır. Nonlinear analizde, sadece eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanı kullanılmıştır. Analizlerde, kayma deformasyonu ve dönme atalet etkileri hesaba katılmıştır. Lineer analiz, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre mesnet hallerinde plastik, çelik, pirinç ve alüminyum çubuk kullanılarak yapılmıştır. Elastik zemin malzemesi olarak da, gri sünger, cam yünü, polietilen köpük ve beyaz sünger kullanılmıştır. Nonlinear analiz, basit-basit mesnet halinde sert plastik ve C67 çelik çubuk kullanılarak yapılmıştır.

Kalın çubukların doğal frekansları üzerinde kayma deformasyonu ve dönme atalet etkileri ile zemin rijitlik parametrelerinin ve kısmi zeminin etkileri incelenmiştir. Bunun yanında, nonlinear analizde, çubuk doğal frekansları üzerinde nonlinear eğilme, boyuna-eğilme girişimi ve büyük yer değişimi halinde nonlinear etkiler incelenmiştir. Analitik hesaplamalarda, kısmi zemin parametresi β için, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0 değerleri alınmıştır. Deneysel analizde ise, kısmi zemini ifade eden β parametresi sadece 0.5 alınarak yapılmıştır. 1. ve 2. zemin modülleri komparatör ölçümüyle bulunarak zemine ait boyutsuz parametreler elde edilmiştir.

Analitik hesaplamalar yapılırken; deney esnasında kullanılan sensor(40gr)+sensor tutucu (10gr)+sensor kablosundan(10gr) oluşan 60 gr'lık ek kütle hesaba katılmıştır.

Analizde ilk olarak, Tablo 4'te, ankastre-serbest mesnet halinde bütünüyle elastik zemin üzerinde kalın plastik çubuğun lineer serbest titreşim frekansları üzerinde analitik ve deneysel olarak elastik zeminin etkisi incelenmiştir.

Tablo 4'te görülen şudur ki, elastik zemin etkisiyle lineer frekanslardan bir kısmı artmaktadır. Bunun yanında, elastik zemin etkisinin, çubuğun yüksek titreşim biçimlerine nazaran düşük titreşim biçimlerinde daha baskın olduğu görülmektedir. Deneysel sonuçlarla analitik hesaplamaların karşılaştırılmasında elastik zemin sadece 2-parametrelili modelle temsil edilmiştir. Yani karşılaştırmalar, iki parametrelili elastik zemin üzerinde kalın çubukların serbest titreşim frekanslarının analitik ve deneysel olarak karşılaştırılmasıdır. Analizler, analitik ve deneysel sonuçlar arasında iyi bir uyumun olduğunu göstermektedir.

Yine Tablo 5'te, ankastre-serbest halde kısmi elastik zemin üzerinde plastik kalın çubuğun lineer titreşim frekansları üzerinde kısmi elastik zeminin ($\beta=0.5$) etkisi analitik ve deneysel olarak incelenmiştir. Tablo 5'ten görülen yine şudur ki, çubuğun yüksek frekanslarına nazaran düşük frekansları üzerinde ve de özellikle 1. frekansın üzerinde kısmi elastik zeminin etkisi oldukça belirgindir

Tablo 6'da, basit-basit mesnet halinde eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın plastik çubuk elemanı nonlinear serbest titreşim frekansları üzerinde bütünüyle elastik zeminin etkisi analitik olarak incelenmiştir. Tablo 6'dan görülen şudur ki, kayma deformasyonu ve dönme ataletinin bazı frekanslarda nonlinearlik etkileri oranlarını arttırıcı yönde bir etkisi olmaktadır. Lineer analizin aksine, nonlinear halde elastik zemin etkisiyle aynı frekansların kullanılan örnek için azaldığı tespit edilmiştir.

Tablo 7 ve 8'de sırasıyla, basit-basit mesnet halinde eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çubuk elemanı nonlinear titreşim frekansları üzerinde bir parametrelili ve iki parametrelili kısmi elastik zeminin etkisi analitik olarak incelenmiştir.

Tablo 4. Ankastre-serbest halde bütünüyle elastik zemin üzerinde plastik çubuk serbest titreşim frekanslarının analitik ve deneysel karşılaştırılması

Zemin durumu		Bütünüyle Zemin ($\beta=1.0$)				
		Zemin yok	Gri sünger zemin	Cam yünü zemin	Polietilen köpük zemin	Beyaz sünger zemin
Analitik sonuçlar f [Hz]	Eğ. har. 4 serbestlik dereceli kalın çubuk	6.72	29.22	21.13	28.08	17.66
		40.85	62.56	53.23	59.12	51.98
	Eğ. har. 6 serbestlik dereceli kalın çubuk	177.11	196.23	187.14	191.23	185.08
		318.44	336.12	328.10	328.56	325.12
	Eğ. har. 4 serbestlik dereceli kalın çubuk	515.74	534.08	522.94	522.72	518.56
		7.64	33.05	22.71	30.23	18.03
	Eğ. har. 6 serbestlik dereceli kalın çubuk	46.31	68.40	57.41	62.35	53.04
		182.04	205.72	193.74	198.14	189.66
	Eğ. har. 4 serbestlik dereceli kalın çubuk	325.21	348.56	336.22	337.56	331.71
		524.97	545.94	534.55	537.45	529.62
Deneysel sonuçlar f [Hz]		6.9	30.9	21.5	28.9	17.8
		43.8	65.3	55.1	60.5	52.2
		179.2	200.8	190.3	194.6	187.3
		321.7	341.9	332.0	332.9	328.2
		519.8	539.1	528.5	529.9	523.9

Tablo 5. Ankastre-serbest halde kısmi elastik zemin üzerinde plastik çubuk serbest titreşim frekanslarının analitik ve deneysel karşılaştırılması

Zemin durumu		Kısmi zemin ($\beta=0.5$)				
		Zemin yok	Gri sünger zemin	Cam yünü zemin	Polietilen köpük zemin	Beyaz sünger zemin
Analitik sonuçlar f [Hz]	Eğ. hareketi 4 serbestlik dereceli kalın çubuk	6.72	14.99	10.88	14.95	10.33
		40.85	48.98	45.13	48.66	44.98
	Eğ. hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çubuk	177.11	179.62	178.99	179.12	178.77
		318.44	319.56	317.98	318.23	317.66
	Eğ. hareketi 4 serbestlik dereceli kalın çubuk	515.74	517.13	515.85	515.98	515.50
		7.64	14.34	11.06	14.04	11.21
	Eğ. hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çubuk	46.31	49.61	46.94	49.07	46.04
		182.04	183.52	182.24	182.96	181.53
	Eğ. hareketi 4 serbestlik dereceli kalın çubuk	325.21	326.21	324.64	325.65	324.56
		524.97	523.94	524.76	523.50	523.56
Deneysel sonuçlar f [Hz]		6.9	14.1	10.5	15.7	10.3
		43.8	48.5	46.0	49.3	45.0
		179.2	181.3	180.4	182.3	180.3
		321.7	322.7	322.2	322.9	322.1
		519.8	520.5	520.0	520.4	519.9

Tablo 6. Basit-basit mesnette eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın plastik çubuk nonlinear serbest titreşim frekansları üzerinde bütünüyle elastik zeminin etkisi ($s/r=1$)

Elastik zemin yok ($\lambda=\lambda_G=0$)			
Linear	NL	GNL	GNL ve BYD
58.934	66.128	61.123	61.004
235.473	242.124	237.236	237.105
528.962	534.336	530.114	530.108
1-parametrel elastik zemin üzerinde ($\lambda=1, \lambda_G=0$)			
59.236	64.886	60.036	59.980
235.548	241.016	236.751	236.700
528.996	533.330	530.002	529.108
2-parametrel elastik zemin üzerinde ($\lambda=1, \lambda_G=0.5$)			
60.704	63.242	58.916	58.900
237.038	239.682	236.151	236.130
530.489	532.210	529.582	528.598

Tablo 7. Basit-basit mesnet halinde eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çelik çubuk nonlinear serbest titreşim frekansları üzerinde 1-parametrel elastik zeminin etkisi ($s/r=1.0$)

1-parametrel elastik zemin üzerinde ($\lambda=1, \lambda_G=0$)				
$\beta=0$	$\beta=0.25$	$\beta=0.5$	$\beta=0.75$	$\beta=1.0$
Linear				
36.914	36.914	36.926	36.976	37.103
147.666	147.666	147.669	147.684	147.713
332.365	332.365	332.366	332.372	332.386
NL				
42.339	42.335	42.074	41.776	41.404
152.008	152.006	151.890	151.720	151.217
335.486	335.485	335.402	335.208	334.597
GNL				
38.859	38.859	38.692	38.402	38.006
148.992	148.992	148.893	148.816	148.567
333.349	333.349	333.332	333.322	333.267
GNL ve BYD				
38.834	38.834	38.561	38.321	37.926
148.916	148.916	148.870	148.734	148.415
333.285	333.285	333.081	333.072	332.941

Tablo 7 ve 8'den görülen şudur ki, $\beta>0.5$ olmak üzere, çubuk düşük titreşim biçimlerine nazaran yüksek titreşim biçimlerine ait nonlinear serbest

titreşim frekansları kısmi elastik zeminden çok az etkilenirler. Yani, kısmi elastik zeminin etkisi, çubuğun düşük titreşim biçimlerinde, özellikle çubuk 1. özfrekansında daha baskındır.

Tablo 8. Basit-basit mesnette eğilme hareketi 6 serbestlik dereceli kalın çelik çubuk nonlinear serbest titreşim frekansları üzerinde 2-parametrel elastik zeminin etkisi ($s/r=1.0$)

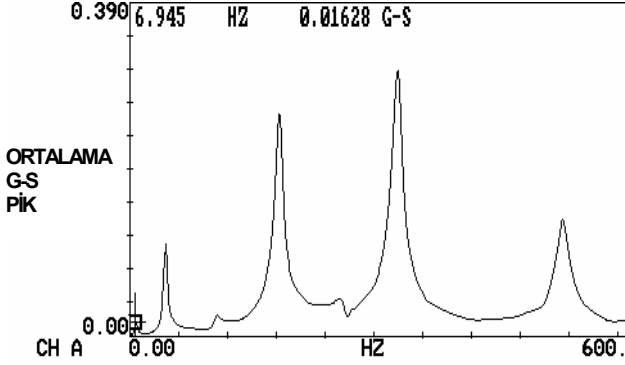
2-parametrel elastik zemin üzerinde ($\lambda=1, \lambda_G=0.5$)				
$\beta=0$	$\beta=0.25$	$\beta=0.5$	$\beta=0.75$	$\beta=1.0$
Linear				
36.914	36.999	37.224	37.620	38.022
147.666	147.736	147.916	148.115	148.645
332.365	332.415	332.565	332.895	333.319
NL				
42.339	41.124	41.075	40.970	40.672
152.008	150.962	150.928	150.874	150.816
335.486	334.494	334.474	334.444	334.409
GNL				
38.859	37.856	37.585	37.234	36.779
148.992	148.417	148.236	147.985	147.685
333.349	333.287	333.181	333.065	332.770
GNL ve BYD				
38.834	37.736	37.536	37.226	36.736
148.916	148.284	148.124	147.904	147.634
333.285	333.157	333.171	333.060	332.666

Grafikler

Deneysel analizde klasik çekiç testi uygulanmıştır. Çekiç ile en iyi yapılan tahrik, titreşim biçimine göre seçilen yerlerden yapılan tahriktir. Fakat birçok titreşim biçimi için en iyi uzaklık ise çubuğun bir kenarından 1/3'ü kadar mesafesi olan uzaklıktır. Bunun yanında, eğer tahrik yeri çubuğun titreşim biçimlerinin herhangi bir düğüm noktası ile çakışırsa, o titreşim biçiminin frekansı ölçülmez. Aynı zamanda tablolardaki virgül ha-nesine göre, düğüm noktaları dışında kalan her noktadan alınan ölçümler birbirini doğrulamaktadır. Ankastre-serbest mesnet halinde serbest uçtan, ankastre-ankastre mesnet halinde ise çubuk boyunun 1/3 ve 1/2'sinden veri alınmıştır. Bunun sonucunda farklı sınır şartlarında, farklı çubuk ve zemin malzemeleri için spektrum gra-

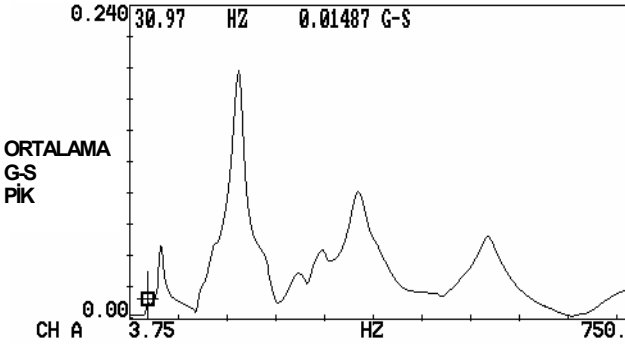
Elastik zemin üzerindeki çubuk uygulamaları

fikleri alınmıştır. Bu grafikler Şekil 4-6'da verilmiştir. Aşağıda verilen spektrum grafiklerinde yatay eksen linear alınmış ve frekanslar Hz cinsinden ölçülmüştür. Yine grafiklerde dikey eksen linear alınmış ve genlikler İvme (G-s) cinsinden ölçülmüştür.



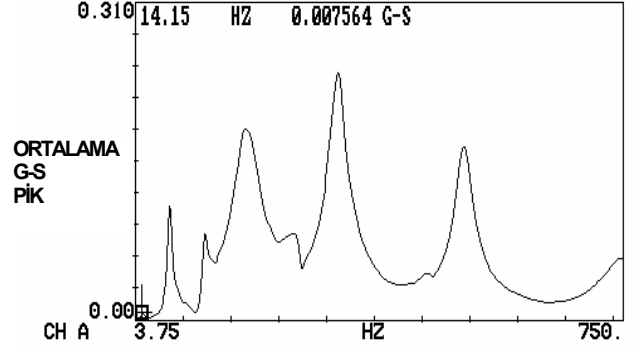
<u>Frekans</u>	<u>Genlik</u>
6.945	0.01628
43.86	0.11870
179.2	0.30540
321.7	0.36440
519.8	0.16010

Şekil 4. Ankastr-serbest halde zeminsiz plastik çubuk spektrum grafiği (sensor uçta)



<u>Frekans</u>	<u>Genlik</u>
30.97	0.01487
65.38	0.06560
200.8	0.22150
341.9	0.11460
539.1	0.07432

Şekil 5. Ankastr-serbest halde bütünüyle gri sünger zemin üzerinde plastik çubuk spektrum grafiği (sensor uçta)



<u>Frekans</u>	<u>Genlik</u>
14.15	0.0075
48.54	0.1284
181.3	0.2187
322.7	0.2838
520.5	0.1989

Şekil 6. Ankastr-serbest halde kısmi gri sünger zemin üzerinde plastik çubuk spektrum grafiği (sensor uçta)

Deney ölçüm cihazları ve sistemi ise, Şekil 7 ve Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 7. Ankastr-serbest halde bütünüyle gri sünger zemin üzerinde plastik çubuk



Şekil 8. Ankastr-serbest halde kısmi gri sünger zemin üzerinde plastik çubuk

Sonuçlar

2-parametrelili bütünüyle ve kısmi elastik zemin üzerinde kalın çubukların çeşitli sınır şartlarında analitik ve deneysel olarak serbest ve nonlinear titreşim analizi yapılmıştır. Kayma deformasyonu, zemin rijitlik parametreleri ve kısmi zeminin etkileri incelenmiştir. Bunun yanında nonlinear analizde, nonlinear eğilme, boyuna ve eğilme girişimi ve büyük yer değişimi halinde nonlinear etkiler incelenmiştir. Deneysel analizde, çubukların doğal frekansları üzerinde kısmi zemin etkisi $\beta=0.5$ için incelenmiştir. Analitik hesaplamalarda, kısmi zemin parametresi β için, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0 değerleri alınmıştır. Analitik ve deneysel sonuçlar arasında iki parametrelili elastik zemin modeli kabul edilerek karşılaştırma yapılmıştır. Verilen tablo ve grafiklerden görülüyor ki, elastik zeminin varlığı çubuk lineer frekanslarından bir kısmını arttırmaktadır. Aynı zamanda elastik zemin etkisinin, çubuğun yüksek titreşim biçimlerine nazaran düşük titreşim biçimlerinde daha baskın olduğu görülmektedir. Yine tablolardan, dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkisinin bazı frekanslarda nonlinearlik etkileri oranlarını arttırıcı yönde bir etkisi olmaktadır. Lineer analiz aksine, nonlinear halde elastik zemin etkisiyle aynı frekansların kullanılan örnek için azaldığı tespit edilmiştir. Buna ek olarak, kısmi elastik zeminin de çubuğun hem lineer hem de nonlinear yüksek frekanslarına nazaran düşük frekanslarında özellikle 1. frekansında etkili olduğu görülmektedir. Sonuçta, analitik ve deneysel olarak analiz edilen sonuçlar arasında iyi bir uyumun olduğu da gözlenmiştir.

Semboller

u	:Boyuna yer değişimi (m)
G_{NL}	:Boyuna-eğilme girişimi
BYD	:Büyük yer değişimleri
b	:Çubuk genişliği (mm)
h	:Çubuk kalınlığı (mm)
m	:Çubuk birim ağırlığı (kg/m)
I	:Çubuk kesidinin z-eksenine göre atalet momenti (m^4)
L	:Çubuk uzunluğu (mm)
f	:Çubuğun özfrekansı (rad/sn)
n	:Eleman sayısı
E	:Elastiklik modülü (N/m^2)
w	:Eğilme yer değişimi (m)

C	:Frekans parametresi
r	:Jirasyon yarıçapı (m)
k'	:Kayma katsayısı
ϕ_s	:Kayma deformasyon parametresi
G	:Kayma modülü (N/m^2)
λ_G	:Kayma zemin parametresi
k_G	:Kayma zemin modülü (N/m^2)
φ	:Kesit dönmesi şeklinde yer değişimi (rad)
ψ	:Kayma yer değişimi (rad)
φ_{max}	:Maksimum kesit dönmesi (rad)
NL	:Nonlinear eğilme
ν	:Poison oranı
s	:Titreşim genliği (m)
λ	:Winkler zemin parametresi
k	:Winkler zemin modülü (N/m^2)
ρ	:Yoğunluk (kg/m^3)
k_{bz}	:Zeminin boyuna yönde kayma yay katsayısı (N/m)
β	:Zeminle desteklenen boyun çubuk toplam boyuna oranı
m_{ek}	:Nokta kütle (kg)

Kaynaklar

- Bahçivan, A. ve Karadağ, V., (1999). Vibration frequencies and dynamic stability of thick beams by finite element method, *Proceedings, The ASME ETCE'99 conference and exhibition, Houston, Texas, USA.*
- Bahçivan, A. ve Karadağ, V., (2002). Vibration analysis of thick beams on two parameter elastic foundation by finite element method, *Proceedings, ETCE2002 ASME Engineering Technology Conference on Energy, Houston, Texas, USA.*
- De Rosa, M. A., (1993). Stability and dynamics analysis of two-parameter foundation beams, *Computers and Structures*, **49**, 341-349.
- De Rosa, M. A., (1995). Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation, *Computers and structures*, **57**, 1, 151-156.
- Doyle, P.F. and Pavlovic, M. N., (1982). Vibration of beams on partial elastic foundations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **10**, 663-674.
- Eisenberger, M. ve Yankelevsky, D.Z. and Adin, M.A., (1985). Vibrations of beams fully or partially supported on elastic foundations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **13**, 651-660.
- Eisenberger, M. ve Clastornik, J., (1987). Beams on variable two-parameter elastic foundation, *ASCE*

- Journal of Engineering Mechanics*, **113**, 10, 1454-1466.
- Fagan, M. J., (1992). The finite element analysis: Theory and practise, Longman Scientific Technical, New York, USA.
- Foda, M.A., (1995). Analysis of large amplitude free vibrations of beams using KBM method, *Journal of Applied Engineering Science, Cairo University*, 125-128.
- Foda, M.A., (1995). On nonlinear vibrations of a beam with pinned ends, *Journal of Engineering Science, King Saud University*, **7**, 1, 93-107.
- Foda, M.A., (1999). Influence of shear deformation and rotatory inertia on nonlinear free vibration of a beam with pinned ends, *Computers and Structures*, **71**, 663-670.
- Franciosi, C. ve Masi, A., (1993). Free Vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil, *Computers and Structures*, **47**, 419-426.
- Hou, Y.C. ve Tseng, C.H., (1996). A new high order non-uniform Timoshenko beam finite element on variable two-parameter foundations for vibration analysis, *Journal of Sound and Vibration*, **191**, 1, 91-106.
- Huang, T.C., (1961). The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions, *Journal of Applied Mechanics*, **28**, 579-584.
- İpek, M., (1979). A mass matrix for beam element derived from dynamic considerations, Research Report 79-03, Dpt. Of Architecture Faculty of England, England.
- Karadağ, V., (1996). Dynamic stability analysis of Timoshenko beams with geometric nonlinearity for three dimensional motion, *Proceedings, The ASME ESDA '96 conference, Structural Dynamics, Vibration, and Buckling*, 1130-118, Montpellier, France.
- Knight, C. E., (1993). The finite element method in mechanical design, Pws-kent Publishing, Boston, USA.
- Lewandowski, R., (1987). Application of the Ritz method to the analysis of non-linear free vibrations of beams, *Journal of Sound and Vibration*, **114**, 1, 91-101.
- Lewandowski, R., (1994). Nonlinear free vibrations of beams by the finite element and continuation methods, *Journal of Sound and Vibration*, **170**, 5, 577-593.
- Lin, Y.H. and Tsuai, Y.K., (1996). Nonlinear free vibration analysis of Timoshenko beams using the finite element method, *Journal of the Chinese Soc. of Mechanical Engineering*, **17**, 6, 609-615.
- Mei, C., (1985). A finite element method for non-linear forced vibrations of beams, *Journal of Sound and Vibration*, **102**, 3, 369-380.
- Mei, C., (1986). Discussion of finite element formulations of nonlinear beam vibrations, *Computers and Structures*, **22**, 1, 83-85.
- Mously, M. E., (1999). Fundamental frequencies of Timoshenko beams mounted on Pasternak foundation, *Journal of Sound and Vibration*, **228**, 2, 452-457.
- Petyt, M., (1991). Introduction to finite element vibration analysis, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Przemieniecki, J.S., (1968). *Theory of structure analysis*, McGraw Hill, New York, USA.
- Rao, G.V. ve Raju, K.K., (1976). Nonlinear vibrations of beams considering shear deformation and rotatory inertia, *AIAA Journal*, **14**, 5, 685-687.
- Rao, B., (1992). Large-amplitude vibrations of simply-supported beams with immovable ends, *Journal of Sound and Vibration*, **155**, 523-527.
- Severn, R. T., (1970). Inclusion of shear deformation in the stiffness matrix for a beam element, *Journal Of Strain Analysis*, **5**, 239-241.
- Shirima, L. M. ve Giger, M. W., (1992). Timoshenko beam element resting on two-parameter elastic foundation, *ASCE J. of Engineering Mechanics*, **118**, 2.
- Singh, G., Rao, G.V. ve Iyengar, NGR., (1990). Re-investigation of large-amplitude free vibrations of beams using finite elements, *Journal of Sound and Vibration*, **143**, 351-355.
- Srirangarajan, H.R., (1994). Nonlinear free vibrations of uniform beams, *Journal of Sound and Vibration*, **175**, 3, 425-427.
- Valsangkar, A.J., (1987). Vibrations of beams on a two-parameter elastic foundation, *Proceedings, Eleventh Can. Congr. Applied Mechanics*, A112-A113, A. Edmanton.
- Valsangkar, A. J. ve Pradhanang, R. B., (1987). Free vibration of partially supported piles, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, **113**, 8, 1244-1247.
- Valsangkar, A.J. ve Pradhanang, R., (1988). Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundations, *Earthquake engineering & structural dynamics*, **16**, 217-225.
- Yokoyama, T., (1996). Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations, *Computers and Structures*, **61**, 6, 995-1007.
- Yucheng, S. ve Raymond, Y.Y. L., (1997). Finite element method for nonlinear free vibrations of composite beams and plates, *AIAA Journal*, **35**, 1, 150-157.