itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:4, Sayı:2, 93-104
Nisan 2005

Birinci mertebe genel denklik denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümleri

Saadet Seher ÖZER*, **Erdoğan ŞUHUBİ**

İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Verilmiş bir diferansiyel denklemler grubu keyfi fonksiyonlar, parametreler içeriyorsa, elimizde aynı yapıda denklemler grubunun ailesi var demektir. Eşdeğerlik grupları, verilen denklem ailesini değişmez bırakan dönüşümlerin grubu olarak tanımlanır. Simetri dönüşümleri diferansiyel denklemlerin bir çözümünü başka çözümlere götürürken, eşdeğerlik dönüşümleri ailenin bir üyesini diğer üyesine götürür ve denklemler grubunun bir çözümünü aynı ailenin başka grubunun çözümüne dönüştürür. Çalışmada birinci mertebe genel denklik denklemleri sisteminin eşdeğerlik dönüşümleri izovektör yöntemi ile incelenmiştir. Klasik sürekli fiziğin bir çok denklemi bu grupta ifade edilebildiğinden, sonuçları geniş uygulama alanına sahiptir. Eşdeğerlik dönüşümlerinin belirleyici denklemleri elde edildikten sonra açık çözümleri belirlenmiş, genel şema elektromagnetizmanın Maxwell denklemlerine uygulanmıştır.
Anahtar Kelimeler: *Eşdeğerlik dönüşümleri, denklik denklemleri, izovektör yöntemi.*

Equivalence transformations of the general first order balance equations

Abstract

If a given set of equations contains some arbitrary functions or parameters we have in fact a family of sets of equations of the same structure. Almost all field equations of classical continuum physics possess this property since they describe certain common or similar behaviors of diverse materials. Equivalence groups are defined as groups of continuous transformations which leave a given family of equations invariant. In other words, they map an arbitrary member of the family onto another member of the same family and they transform a solution of a set of equations onto a solution of another set in the same family whereas the symmetry transformations map a solution of a system to another solution of the same system. In this work equivalence transformations of first order general balance equations involving arbitrary number of dependent and independent variables are investigated by using isovector method. To study system of balance equations occupies a privileged position since many equations in classical physics are of this form. The method consists of determining isovector fields of a closed ideal of certain exterior forms defined on a properly extended manifold. Isovector fields are defined as such vector fields whose orbits generate transformations under which the ideal remains invariant.. After obtaining determining equations of equivalence transformations, their explicit solutions are found. The general results are applied to Maxwell equations.
Keywords: *Equivalence transformations, balance equations, isovector method.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Saadet Seher ÖZER. ozers@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 69 91.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Eşdeğerlik dönüşümleri ve sürekli ortamlar mekaniğinde bazı uygulamaları" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 17.03.2004 tarihinde dergiye ulaşmış, 07.04.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.08.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

1870'lerde Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından ortaya atılan "Sürekli Gruplar" fikri geçtiğimiz yüzyılda matematiğin tüm alanlarında, fizikte, mühendislikte ve diğer matematik temelli tüm bilimlerde derin etki yaratmıştır. Lie'nin sürekli simetri gruplarının uygulamaları, cebrik topoloji, diferansiyel geometri, invaryant teori, özel fonksiyonlar, sayısal analiz, klasik mekanik, kuantum mekaniği, görecelik teorisi, sürekli ortamlar mekaniği ve diğer alanları içerir. Teori ve uygulama alanlarının modern uygulamalı bilim ve matematiğe katkıları, her geçen gün artan uygulamalar ile sınırlarını genişletmektedir.

Bir kez diferansiyel denklemin simetri grubu belirlenince, bir çok uygulama ardından gelebilir. Grubun tanım özellikleri kullanılarak, bilinen bir taneden yeni çözümler sistemi yapılandırılabilir. Simetri grubu, bu nedenle, eğer biri diğerine bir grup elemanı aracılığıyla dönüştürülebiliyorsa, çözümlerin değişik simetri sınıflarını sağlar.

Alternatif olarak, grup yaklaşımı, keyfi bir parametre ya da bir fonksiyona bağlı diferansiyel denklemler ailesinin sınıflandırılmasında da kullanılabilir. Böyle denklemler, fizik veya matematik olarak geniş yelpazedeki denklemleri ifade edebilmektedir. Klasik sürekli fiziğin hemen hemen tüm alan denklemleri, ayrı malzemelerin genel ya da benzer davranışlarını tanımladıkları için bu özeliğe sahiptir. Eğer, verilmiş bir denklem kümesi bazı keyfi fonksiyon ya da parametreler içeriyorsa elimizde aynı yapıda denklemler kümesinin bir ailesinin var olduğu anlamına gelir. *Eşdeğerlik Grupları* ya da *Denklik grupları* olarak adlandırılan grup yapıları, denklemin verilmiş bir ailesini değişmez bırakan sürekli dönüşümlerin bir grubu olarak tanımlanır. Başka bir deyişle, dönüşümler ailenin keyfi bir üyesini, aynı ailenin bir başka üyesine götürür ve denklemlerin bir kümesinin çözümünü, aynı ailedeki başka bir kümenin çözümüne dönüştürür denilebilir. Bu anlamda simetri dönüşümleri ile benzerlik taşımasına karşın, amaçları ve sonuçları çerçevesinde farklıdır.

Çalışmada birinci mertebe genel denklik denklemleri sisteminin eşdeğerlik dönüşümleri incelenmiştir. Keyfi sayıda bağımlı ve bağımsız değişken içeren genel denklik denklemleri sistemi:

$$\frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n, \ \alpha = 1,2,\ldots,N \qquad (1)$$

şeklinde ifade edilir. $\Sigma^{\alpha i}$ ve Σ^{α}, n tane bağımsız x^i ve N tane bağımlı u^{α} değişkeninin düzgün fonksiyonlarıdır. Tekrarlanan endisler bu endislerin değer bölgesi üzerinde toplamları göstermektedir [Einstein uylaşımı]. Klasik fizikteki bir çok alan denklemi, n=4 için (1) ile verilen yapıya uyar. Birinci mertebe denklik denklemleri (1)'in bir özel hali olarak

$$\frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial u^{\beta}} u^{\beta}_{,i} + \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha} = 0 \qquad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tür denklemler için $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ şeklindeki simetri dönüşümü

$$\frac{\partial \Sigma^{\alpha i}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}{\partial \bar{x}^i} + \Sigma^{\alpha}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

anlamına gelip, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ çözümünü, denklemin $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}})$ çözümüne götürmekte iken $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{u})$, $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{u})$ şeklindeki eşdeğerlik dönüşümleri ise

$$\frac{\partial \Sigma^{\alpha i}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{\Sigma}^{\alpha i}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}{\partial \bar{x}^i} + \bar{\Sigma}^{\alpha}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

anlamına gelmekte ve verilen bir diferansiyel denklemin $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$ çözümünü, aynı aileden başka bir denklemin $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}})$ çözümüne dönüştürmektedir. Eşdeğerlik dönüşümleri kavramının, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde bilinmesine karşın, ilk sistematik yaklaşım Ovsiannikov'a (1982) dayanır. Literatürde diferansiyel denklemlerin simetrilerini belirlemek için bir çok yöntem kullanılmaktadır. (İbragimov, 1994, Bluman ve Kumei, 1989). Simetri gruplarını belirlemekte bir çok bilgisayar programı da kullanılmaktadır. Bu konuda bilgi Edelen (1981) ve İbragimov'dan (1996) edinilebilir. Bu çalışma kapsamında birinci mertebe genel denklik denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümlerini belirlemek için ilk kez Harrison ve Estabrook (1971) tarafından ortaya konulan klasik yöntemlere alternatif geometrik bir yaklaşım kullanılmıştır. İzovektör yöntemi olarak adlandırılan bu yaklaşım, Cartan'ın (1945) kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemine eşdeğer dış formlar tanımlanması esasına dayanır. Yöntem, denklemin bağımlı ve bağımsız değişkenleri ile gerekli mertebeden türevlerinin oluşturduğu katmanın teğet uzayında seçilen bir vektör alanına göre, diferansiyel denklemi temsil eden dış formların oluşturduğu kapalı idealin Lie türevinin değişmez kalması esasına dayanır. Verilmiş bir kısmi türevli diferansiyel denklem ailesine bağlı eşdeğerlik grubunun sonsuz küçük üreteçleri, dış katman üzerinde tanımlanmış dış cebrin bir idealinin izovektör alanının bileşenleri olarak tanımlanır. İzovektör alanları, diferansiyel denklemler sisteminin izogrubu denilen, bir parametreli dönüşüm gruplarını üretir. Dönüşüm grubu uygun özelliklere sahipse lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlere dönüştürür. Yöntemin, klasik yöntemlere göre bir avantajı, birbirinin tekrarı şeklinde olan bir takım fazlalık belirleyici denklemleri otomatik olarak eleyip, daha az sayıda belirleyici denklemle çalışılmasını sağlamasıdır. Yöntem Harrison ve Estabrook'tan sonra bir çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Bunlar içerisinde Edelen (1980, 1985) ve Şuhubi'nin (1991) katkıları önemlidir.

Şuhubi (1999), keyfi sonlu sayıda bağımlı ve bağımsız değişken içeren ikinci mertebe denklik denklemlerinin genel bir ailesi için eşdeğerlik dönüşümlerinin gruplarını üretecek belirleyici denklemleri elde etmiş ve bu denklemlerin genel çözümlerini bulmuştur (Şuhubi, 2000). Genel şema tek boyutlu nonlineer dalga denklemine ve homojen hiperelastisiteye uygulanmış, ayrıca simetri dönüşümlerinin, eşdeğerlik dönüşümlerinden doğrudan belirlenebildiği gösterilmiştir.

Bu çalışmada birinci mertebe genel denklik denklemleri sisteminin eşdeğerlik grupları ele alınmış, elde edilen sonuçlar elektromagnetizmanın Maxwell denklemlerine uygulanmıştır. Birinci mertebe denklik denklemleri sistemini ifade eden dış cebir tanımlanmış, izovektör yöntemi kullanılarak eşdeğerlik gruplarının dönüşümlerini üretecek olan sonsuz küçük üreteçlere bağlı belirleyici denklemler, keyfi sayıda denklem barındıran sistem için elde edilmiştir. Ardından belirleyici denklemlerin açık çözümleri bulunmuştur. Birinci mertebe denklik denklemlerine bir uygulama olarak elektromagnetizmanın Maxwell denklemleri değişik elektromagnetik ortamları ifade eden bünye denklemleri ile desteklenmiş ve eşdeğerlik dönüşümlerini üretecek olan izovektör alanı bileşenleri belirlenmiştir.

İzovektör alanı bileşenlerinin belirleyici denklemleri

(1) ile verilen birinci mertebe genel denklik denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümlerini belirleyebilmek için $\Sigma^{\alpha i}$ ve Σ^{α} bağımsız değişkenler gibi ele alınmalıdır. Bunların fonksiyonel bağlılıklarını göz önüne alabilmek için

$$s_j^{\alpha i} = \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial x^j},\ \sigma_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial u^\beta}, t_i^\alpha = \frac{\partial \Sigma^\alpha}{\partial x^i}, \tau_\beta^\alpha = \frac{\partial \Sigma^\alpha}{\partial u^\beta} \quad (2)$$

şeklinde yeni değişkenler tanımlayalım. $M = \mathbf{R}^n$ $\{x^i\}$ koordinat örtülü bağımsız değişkenler uzayı olsun. $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ $\{x^i, u^\alpha\}$ koordinat örtülü graf uzayıdır. M katmanına $\Sigma^{\alpha i}, \Sigma^\alpha$ fonksiyonları ve bunların fonksiyonel bağlılıklarını ifade eden (2) yeni değişkenleri de eklenerek, genişletilmiş K katmanı oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan katmanın koordinat örtüsü

$$\left\{x^i, u^\alpha, \Sigma^{\alpha i}, \Sigma^\alpha, s_j^{\alpha i}, \sigma_\beta^{\alpha i}, t_i^\alpha, \tau_\beta^\alpha\right\} \qquad (3)$$

olacaktır. K katmanının teğet uzayında genel bir vektör alanı $V \in T(K)$

$$
\begin{aligned}
V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + U^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + S^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial \Sigma^{\alpha i}} + T^\alpha \frac{\partial}{\partial \Sigma^\alpha} \\
+ S_j^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial s_j^{\alpha i}} + \mathsf{S}_\beta^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^{\alpha i}} + T_i^\alpha \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha} + \mathsf{T}_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau_\beta^\alpha}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

şeklinde temsil edilir. Burada vektör alanının bileşenleri (3) değişkenlerinin fonksiyonlarıdır. $\Lambda(K)$, K katmanı üzerinde bir dış cebri göstersin. (1) denklem sistemine eşdeğer $\Lambda(K)$ cebri üzerinde tanımlanacak olan dış diferansiyel formlar, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\alpha i} &= d\Sigma^{\alpha i} - s_j^{\alpha i} dx^j - \sigma_\beta^{\alpha i} du^\beta, \\
\Omega^\alpha &= d\Sigma^\alpha - t_i^\alpha dx^i - \tau_\beta^\alpha du^\beta \\
\omega^\alpha &= d\Sigma^{\alpha i} \wedge \mu_i + \Sigma^\alpha \mu.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Burada $\Omega^{\alpha i}$ ve Ω^α formları değme 1-formları olarak adlandırılırken, ω^α denklik n-formları olarak adlandırılır. Formların tanımlarında bulunan μ, M uzayında hacim formudur, μ_i ise $\Lambda^{n-1}(M)$ form uzaylarının baz vektörleridir ve

$$
\mu = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n, \qquad \mu_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \rfloor \mu
$$

şeklinde tanımlanırlar. Burada $\wedge$ dış çarpım, $\rfloor$ iç çarpım operatörüdür. (5) formlarının dış türevleri

$$
\begin{aligned}
d\Omega^{\alpha i} &= -ds_j^{\alpha i} \wedge dx^j - d\sigma_\beta^{\alpha i} \wedge du^\beta, \\
d\Omega^\alpha &= -dt_i^\alpha \wedge dx^i - d\tau_\beta^\alpha \wedge du^\beta, \\
d\omega^\alpha &= d\Sigma^\alpha \wedge \mu
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. (5) formları ve bunların yukarıda verilen dış türevlerinden oluşturulan I ideali kapalıdır:

$$
I(\Omega^{\alpha i}, \Omega^\alpha, \omega^\alpha, d\Omega^{\alpha i}, d\Omega^\alpha, d\omega^\alpha). \tag{6}
$$

$T(K)$ teğet uzayının (4) ile verilen vektör alanı ancak ve ancak (6) kapalı idealinin üreteçlerinin V vektör alanına göre Lie türevleri idealin içerisinde kalıyor ise izovektör alanıdır:

$$
\forall \alpha \in I \Rightarrow \mathsf{L}_V \alpha \in I.
$$

Burada L_V operatörü V vektör alanına göre Lie türevini ifade etmektedir. Lie türevi formun derecesini değiştirmediğinden idealin üreteçlerinin Lie türevlerinin idealin içerisinde kalması için

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}_V \Omega^{\alpha i} &= L_{\beta j}^{\alpha i} \Omega^{\beta j} + L_\beta^{\alpha i} \Omega^\beta, \\
\mathsf{L}_V \Omega^\alpha &= M_{\beta i}^\alpha \Omega^{\beta i} + M_\beta^\alpha \Omega^\beta, \\
\mathsf{L}_V \omega^\alpha &= \nu_\beta^\alpha \omega^\beta + \Omega^{\beta i} \wedge C_{\beta i}^\alpha + d\Omega^{\beta i} \wedge D_{\beta i}^\alpha \\
&\quad + \Omega^\beta \wedge C_\beta^\alpha + d\Omega^\beta \wedge D_\beta^\alpha
\end{aligned}
\tag{7}
$$

olacak şekilde $L_{\beta j}^{\alpha i}, L_\beta^{\alpha i}, M_{\beta i}^\alpha, M_\beta^\alpha, \nu_\beta^\alpha \in \Lambda^0(K)$, $C_{\beta i}^\alpha, C_\beta^\alpha \in \Lambda^{n-1}(K)$, $D_{\beta i}^\alpha, D_\beta^\alpha \in \Lambda^{n-2}(K)$ formlarının bulunması gereklidir. (5) ile tanımlanan değme 1 ve denklik n-formları idealin içerisinde kalıyor ise, Lie türevi ve dış türev operatörleri

$$
\mathsf{L}_V d\alpha = d \mathsf{L}_V \alpha
$$

şeklinde komütatif olduklarından bunların türevleri olan $d\Omega^{\alpha i}, d\Omega^\alpha, d\omega^\alpha$ formları da idealin içerisinde kalacaktır. Bu nedenle eşdeğerlik gruplarının izovektör alanı bileşenlerini belirlemek için (7) eşitliklerinin sağlanması yeterlidir.

Burada hesaplamalarda Lie türevinin bilinen

$$
\mathsf{L}_V \alpha = d(V \rfloor \alpha) + V \rfloor d\alpha
$$

bağıntısı kullanılacaktır.

$\Omega^{\alpha i}$ formunun ve türevinin V vektör alanına göre iç çarpımları

$$
\begin{aligned}
V \rfloor \Omega^{\alpha i} &= S^{\alpha i} - X^j s_j^{\alpha i} - U^\beta \sigma_\beta^{\alpha i} \\
V \rfloor d\Omega^{\alpha i} &= -S_j^{\alpha i} dx^j + X^j ds_j^{\alpha i} - \mathsf{S}_\beta^{\alpha i} du^\beta + U^\beta d\sigma_\beta^{\alpha i}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Bunların Lie türevi eşitliğinde kullanılması ile $\Omega^{\alpha i}$ değme 1-formunun Lie türevi

$$\mathsf{L}_V\Omega^{\alpha i} = dF^{\alpha i} - S_j^{\alpha i} dx_j + X^j ds_j^{\alpha i} - \mathsf{S}_\beta^{\alpha i} du_\beta + U^\beta d\sigma_\beta^{\alpha i}$$

olarak belirlenir. Burada

$$F^{\alpha i} = S^{\alpha i} - X^j s_j^{\alpha i} - U^\beta \sigma_\beta^{\alpha i} \tag{8}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Lie türevi eşitliğinin sağ tarafı $(7)_1$ eşitliğinde değme formlarının yerlerine yazılması ile belirlenir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan bağımsız formların katsayılarının eşitlenmesi ile

$$L_{\beta j}^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}}, \qquad L_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta},$$

$$\frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial t_j^\beta} = 0, \qquad \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \tau_\gamma^\beta} = 0,$$

$$S_j^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial x^j} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma k}} s_j^{\gamma k} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} t_j^\beta, \tag{9}$$

$$\mathsf{S}_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}} \sigma_\beta^{\gamma j} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\gamma} \tau_\beta^\gamma, \tag{10}$$

$$X^j \delta_\beta^\alpha \delta_k^i + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial s_j^{\beta k}} = 0, \tag{11}$$

$$U^\beta \delta_\gamma^\alpha \delta_j^i + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \sigma_\beta^{\gamma j}} = 0 \tag{12}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde Ω^α formunun incelenmesi ile

$$M_{\beta i}^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^{\beta i}}, \qquad M_\beta^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^\beta},$$

$$\frac{\partial G^\alpha}{\partial s_j^{\beta i}} = 0, \qquad \frac{\partial G^\alpha}{\partial \sigma_\gamma^{\beta i}} = 0,$$

$$T_i^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^{\beta j}} s_i^{\beta j} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^\beta} t_i^\beta, \tag{13}$$

$$\mathsf{T}_\beta^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^{\gamma i}} \sigma_\beta^{\gamma i} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^\gamma} \tau_\beta^\gamma, \tag{14}$$

$$X^i \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial G^\alpha}{\partial t_i^\beta} = 0, \tag{15}$$

$$U^\beta \delta_\gamma^\alpha + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \tau_\beta^\gamma} = 0 \tag{16}$$

denklemleri elde edilir. Burada G^α fonksiyonu

$$G^\alpha = T^\alpha - X^i t_i^\alpha - U^\beta \tau_\beta^\alpha \tag{17}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklemlerden

$$F^{\alpha i} = -X^j s_j^{\alpha i} - U^\beta \sigma_\beta^{\alpha i} + \mathsf{F}^{\alpha i}(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta),$$
$$G^\alpha = -X^i t_i^\alpha - U^\beta \tau_\beta^\alpha + \mathsf{G}^\alpha(x^i, u^\beta, \Sigma^{\beta i}, \Sigma^\beta)$$

yazılabilir. (8) ve (17) tanımları dikkate alınırsa $S^{\alpha i} = \mathsf{F}^{\alpha i}, T^\alpha = \mathsf{G}^\alpha$ olduğu görülür. Bu halde izovektör alanının $S^{\alpha i}, T^\alpha$ bileşenlerinin fonksiyonel bağlılıkları

$$\begin{aligned} S^{\alpha i} &= S^{\alpha i}(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta) \\ T^\alpha &= T^\alpha(x^i, u^\beta, \Sigma^{\beta i}, \Sigma^\beta) \end{aligned} \tag{18}$$

şeklinde belirlenmiş olur. İzovektör alanının X^i ve U^α bileşenlerinin yapısı ise benzer şekilde (11,12) ve (15,16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} X^i &= X^i(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta), \\ U^\alpha &= U^\alpha(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta) \end{aligned} \tag{19}$$

şeklinde belirlenir. Öte yandan ω^α formunun Lie türevi benzer şekilde

$$\mathsf{L}_V\omega^\alpha = T^\alpha \mu + (dS^{\alpha i} + \Sigma^\alpha dX^i) \wedge \mu_i - dX^j \wedge d\Sigma^{\alpha i} \wedge \mu_{ji}$$

şeklinde belirlenir. Burada izovektör alanının $S^{\alpha i}$ ve X^i bileşenlerinin $(18)_1$ ve $(19)_1$ eşitlikleri ile belirlenen fonksiyonel bağlılıkları dikkate alınarak türevleri yerlerine yazılır ve değme 1-formları tanımından elde edilen

$$d\Sigma^{\alpha i} = \Omega^{\alpha i} + s_j^{\alpha i} dx^j + \sigma_\beta^{\alpha i} du^\beta ,$$
$$d\Sigma^{\alpha} = \Omega^{\alpha} + t_i^{\alpha} dx^i + \tau_\beta^{\alpha} du^\beta$$

dış türevler kullanılır ise denklem

$$\Gamma^\alpha \mu + (G_\beta^{\alpha i} + \Gamma_\gamma^{\alpha i}\tau_\beta^\gamma) du^\beta \wedge \mu_i + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha ij} du^\beta \wedge du^\gamma \wedge \mu_{ji} + \Gamma_{\beta j}^{\alpha i}\Omega^{\beta j} \wedge \mu_i - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\beta k}}\Omega^{\beta k} \wedge \Omega^{\alpha i} \wedge \mu_{ji} + \Gamma_{\gamma\beta k}^{\alpha ij} du^\beta \wedge \Omega^{\gamma k} \wedge \mu_{ji} + \Gamma_\beta^{\alpha i}\Omega^\beta \wedge \mu_i - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta}\Omega^\beta \wedge \Omega^{\alpha i} \wedge \mu_{ji} + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta}\sigma_\gamma^{\alpha i} du^\gamma \wedge \Omega^\beta \wedge \mu_{ji} = 0$$

şeklinde yazılabilir. $\Gamma^\alpha, G_\beta^{\alpha i}, \Gamma_\beta^{\alpha i}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha ij}, \Gamma_{\beta j}^{\alpha i}, \Gamma_{\gamma\beta k}^{\alpha ij}$ fonksiyonları izovektör bileşenleri cinsinden

$$\Gamma^\alpha = T^\alpha + \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \frac{\partial X^k}{\partial x^k}\delta_\beta^\alpha \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\delta_\beta^\alpha \right) s_i^{\beta j} + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\beta} \right) t_i^\beta - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\beta k}}(s_i^{\beta k} s_j^{\alpha i} - s_j^{\beta k} s_i^{\alpha i}) - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta}(t_i^\beta s_j^{\alpha i} - t_j^\beta s_i^{\alpha i}), \tag{20}$$

$$\Gamma_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\beta} - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta}(s_j^{\alpha i} - s_k^{\alpha k}\delta_j^i), \tag{21}$$

$$G_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial u^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial u^\beta} + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma j}} + \frac{\partial X^k}{\partial x^k}\delta_\gamma^\alpha \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\delta_\gamma^\alpha \right)\sigma_\beta^{\gamma j} - \frac{\partial X^j}{\partial u^\beta}(s_j^{\alpha i} - s_k^{\alpha k}\delta_j^i) - \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma k}}(\sigma_\beta^{\alpha j} s_j^{\gamma k} - \sigma_\beta^{\gamma k} s_j^{\alpha j}) + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\gamma k}}(\sigma_\beta^{\alpha i} s_j^{\gamma k} - \sigma_\beta^{\gamma k} s_j^{\alpha i}) + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\gamma}(t_j^\gamma \sigma_\beta^{\alpha i} - t_k^\gamma \sigma_\beta^{\alpha k}\delta_j^i), \tag{22}$$

$$\Gamma_{\beta j}^{\alpha i} = \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\beta j}} - \frac{\partial X^k}{\partial x^l}(\delta_k^i \delta_j^l - \delta_j^i \delta_k^l)\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial X^k}{\partial \Sigma^{\beta j}}(s_k^{\alpha i} - s_m^{\alpha m}\delta_k^i) + \left(\frac{\partial X^l}{\partial \Sigma^{\gamma k}} s_l^{\gamma k}\delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma k}} s_j^{\gamma k} + \frac{\partial X^k}{\partial \Sigma^\gamma} t_k^\gamma \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\gamma} t_j^\gamma \right)\delta_\beta^\alpha ,$$
$$\Gamma_{\beta\gamma k}^{\alpha ij} = \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\gamma k}}\sigma_\beta^{\alpha i} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta m}}\sigma_\beta^{\eta m} + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\eta}\tau_\beta^\eta + \frac{\partial X^j}{\partial u^\beta} \right)\delta_\gamma^\alpha \delta_k^i ,$$
$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha ij} = -\frac{\partial X^j}{\partial u^\beta}\sigma_\gamma^{\alpha i} + \left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}}\sigma_\gamma^{\eta k} + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\eta}\tau_\gamma^\eta \right)\sigma_\beta^{\alpha i} \tag{23}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Öte yandan Lie türevi eşitliğinin sağ tarafı, $(7)_3$ denkleminde gerekli yerlere değme 1-formları, denklik n-formları ve türevlerinin yazılması ile

$$\mathcal{L}_V \omega^\alpha = v_\beta^\alpha [\Omega^{\beta i} \wedge \mu_i + s_i^{\beta i}\mu + \sigma_\gamma^{\beta i} du^\gamma \wedge \mu_i + \Sigma^\beta \mu] + \Omega^{\beta i} \wedge C_{\beta i}^\alpha + \Omega^\beta \wedge C_\beta^\alpha - (ds_j^{\beta i} \wedge dx^j + d\sigma_\gamma^{\beta i} \wedge du^\gamma) \wedge D_{\beta i}^\alpha - (dt_i^\beta \wedge dx^i + d\tau_\gamma^\beta \wedge du^\gamma) \wedge D_\beta^\alpha$$

şeklinde yazılabilir. Lie türevinin her iki tarafında bulunan bağımsız formların katsayılarının eşitlenmesi ile,

$$D_{\beta i}^\alpha = 0, \quad D_\beta^\alpha = 0$$
$$C_{\beta j}^\alpha = (\Gamma_{\beta j}^{\alpha i} - v_\beta^\alpha \delta_j^i)\mu_i - \left(\frac{\partial X^k}{\partial \Sigma^{\beta j}}\Omega^{\alpha i} + \Gamma_{\gamma\beta j}^{\alpha ik} du^\gamma \right) \wedge \mu_{ki}$$
$$C_\beta^\alpha = \Gamma_\beta^{\alpha i}\mu_i - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta}\left(\Omega^{\alpha i} + \sigma_\gamma^{\alpha i} du^\gamma \right) \wedge \mu_{ji}$$

belirlenir. Geriye kalan terimler ise izovektör alanı bileşenleri cinsinden

$$\Gamma^\alpha = v_\beta^\alpha (\Sigma^\beta + s_i^{\beta i}) \tag{24}$$

$$G^{\alpha i}_{\beta}+\Gamma^{\alpha i}_{\gamma}\tau^{\gamma}_{\beta}-v^{\alpha}_{\gamma}\sigma^{\gamma i}_{\beta}=0 \tag{25}$$

$$\Gamma^{\alpha[ij]}_{[\beta\gamma]}=0 \tag{26}$$

denklemlerini verir ve bu denklemler eşdeğerlik dönüşümlerinin *belirleyici denklemleri* olarak adlandırılır. Burada [ ] notasyonu söz konusu endisler üzerinde antisimetri olduğunu ifade etmektedir.

İzovektör alanı bileşenlerinin açık çözümleri

Yukarıda (24-26) eşitlikleri ile elde edilen izovektör alanı bileşenlerinin açık çözümlerini belirleyebilmek için ilk olarak (26) denklemi ele alınsın. Denklemde bulunan $\Gamma^{\alpha ij}_{\beta\gamma}$ fonksiyonu izovektör alanı bileşenleri cinsinden tanımı (23) eşitliğinde verilmişti. $\Gamma^{\alpha ij}_{\beta\gamma}$ fonksiyonunun tanımı yerine yazılırsa, denklem açık olarak

$$\begin{aligned}&\left[-\left(\frac{\partial X^i}{\partial u^\beta}\delta^j_k-\frac{\partial X^j}{\partial u^\beta}\delta^i_k\right)\delta^\eta_\gamma+\left(\frac{\partial X^j}{\partial u^\gamma}\delta^i_k\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\partial X^i}{\partial u^\gamma}\delta^j_k\right)\delta^\eta_\beta\right]\sigma^{\alpha k}_\eta+\left[\left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^i_l-\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^j_l\right)\right.\\&\left.\delta^\theta_\gamma\delta^\xi_\beta-\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^j_l-\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^i_l\right)\delta^\theta_\beta\delta^\xi_\gamma\right]\sigma^{\eta k}_\theta\sigma^{\alpha l}_\xi\\&+\left[\left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^i_k-\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^j_k\right)\delta^\theta_\gamma\delta^\xi_\beta-\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^j_k\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^i_k\right)\delta^\theta_\beta\delta^\xi_\gamma\right]\sigma^{\alpha k}_\xi\tau^\eta_\theta=0\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada X^i izovektör bileşeninin $(19)_1$ ile belirlenen fonksiyonel bağlılığı dikkate alınarak $\sigma^{\alpha j}_{\beta}$ ve τ^{α}_{β} değişkenlerine bağlı olmadığından, yukarıdaki denklem bu değişkenler cinsinden bir polinom ifadesi yapısındadır. Bu halde denklemin sıfıra eşit olması ancak bu değişkenlerin katsayılarının sıfıra eşit olması ile mümkündür:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial X^i}{\partial u^\beta}\delta^j_k-\frac{\partial X^j}{\partial u^\beta}\delta^i_k\right)\delta^\eta_\gamma-\left(\frac{\partial X^j}{\partial u^\gamma}\delta^i_k\right.\\&\left.-\frac{\partial X^i}{\partial u^\gamma}\delta^j_k\right)\delta^\eta_\beta=0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^i_l-\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^j_l\right)\delta^\theta_\gamma\delta^\xi_\beta-\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^j_l\right.\\&\left.-\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}}\delta^i_l\right)\delta^\theta_\beta\delta^\xi_\gamma=0,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^i_k-\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^j_k\right)\delta^\theta_\gamma\delta^\xi_\beta-\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^j_k\right.\\&\left.-\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta}}\delta^i_k\right)\delta^\theta_\beta\delta^\xi_\gamma=0.\end{aligned} \tag{29}$$

(27) denkleminde (ik) ve $(\eta\gamma)$ endisleri üzerine büzülme ile

$$\frac{\partial X^j}{\partial u^\beta}=0$$

eşitliği, (28) ve (29) eşitliklerinde ise (il), $(\theta\gamma)$ ve $(\xi\beta)$ endisleri üzerine büzülme ile sırasıyla,

$$\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}}=0\,,\qquad \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta}}=0$$

denklemleri elde edilir. Bu halde izovektör alanının X^i bileşeninin $(19)_1$ ile belirlenmiş olan yapısı daha da daralarak

$$X^i=X^i(x^j) \tag{30}$$

şeklinde belirlenir.

Öte yandan (24) denkleminde (20) ile tanımlanan Γ^α fonksiyonun yerine yazılması ile denklemin sol tarafının sadece

$$(x^i,u^\alpha,\Sigma^{\alpha i},\Sigma^\alpha,s^{\alpha i}_j,t^\alpha_i,\tau^\alpha_\beta)$$

değişkenlerinin bir fonksiyonu olduğu görülür. Bu halde denklemin sağ tarafında bulunan ν_β^α fonksiyonu da bu değişkenlerin bir fonksiyonu olarak ele alınmalıdır, bir başka deyişle ν_β^α fonksiyonu $\sigma_j^{\alpha i}$ değişkenlerine bağlı olmamalıdır. Öte yandan (25) belirleyici denkleminde gerekli yerlere (21) ve (22) ile tanımlanmış fonksiyonların yazılması ile, denklem açık olarak

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\gamma}\tau_\beta^\gamma+\left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}}+\frac{\partial X^k}{\partial x^k}\delta_\gamma^\alpha\delta_j^i-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\delta_\gamma^\alpha-\nu_\gamma^\alpha\delta_j^i\right)\sigma_\beta^{\gamma j}=0$$

şeklinde yazılabilir. $S^{\alpha i}$ izovektör bileşeni ve ν_β^α fonksiyonunun $\sigma_\eta^{\gamma j}$'lara bağlı olmadığı bilindiğinden yukarıdaki denklem

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial u^\beta}=0,$$

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta}=0,$$

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}}+\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^k}\delta_j^i-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\delta_\gamma^\alpha=\nu_\gamma^\alpha\delta_j^i$$

denklemleri ile ifade edilebilir. İlk iki denklemden izovektör alanının $S^{\alpha i}$ bileşeni üzerinde

$$S^{\alpha i}=S^{\alpha i}(x^j,\Sigma^{\beta j}) \tag{31}$$

sonucu elde edilirken, son eşitlikden ν_β^α fonksiyonu

$$\nu_\gamma^\alpha=\frac{1}{n}\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma i}}+\frac{n-1}{n}\frac{\partial X^i}{\partial x^i}\delta_\gamma^\alpha$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan

$$f_\beta^\alpha=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta i}}-\frac{\partial X^i}{\partial x^i}\delta_\beta^\alpha\right)$$

yeni değişken tanımı ile

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}}=f_\beta^\alpha\delta_j^i+\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\delta_\beta^\alpha \tag{32}$$

denklemi yazılabilir. Denklem, $\Sigma^{\gamma k}$'ya göre türetilip sol tarafın simetrik olması nedeni ile sağ taraf için

$$\frac{\partial f_\beta^\alpha}{\partial \Sigma^{\gamma k}}\delta_j^i=\frac{\partial f_\gamma^\alpha}{\partial \Sigma^{\beta j}}\delta_k^i$$

eşitliği yazılabileceği açıktır. Buradan f_β^α fonksiyonunun yapısının

$$f_\beta^\alpha=f_\beta^\alpha(x^i)$$

şeklinde olması gerektiği görülür. (32) denkleminin integre edilmesi ile izovektör alanının $S^{\alpha i}$ bileşeni

$$S^{\alpha i}=f_\beta^\alpha(x^j)\Sigma^{\beta i}+\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\Sigma^{\alpha j}+g^{\alpha i}(x^j)$$

olarak belirlenir.

Son olarak (24) belirleyici denkleminde yukarıda elde edilen izovektör bileşenlerinin de kullanılması ile T^α bileşeni

$$T^\alpha=f_\beta^\alpha(x^j)\Sigma^\beta-\frac{\partial f_\beta^\alpha(x^j)}{\partial x^i}\Sigma^{\beta i}-\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^i\partial x^j}\Sigma^{\alpha j}-\frac{\partial g^{\alpha i}(x^j)}{\partial x^i}$$

şeklinde elde edilir. Böylelikle birinci mertebe genel denklik denklemleri sisteminin eşdeğerlik dönüşümlerini belirlemek için gerekli izovektör alanı bileşenleri

$$\begin{aligned}X^i&=X^i(x^j),\\U^\alpha&=U^\alpha(x^j,u^\beta,\Sigma^{\beta j},\Sigma^\beta),\\S^{\alpha i}&=f_\beta^\alpha\Sigma^{\beta i}+X^i_{,j}\Sigma^{\alpha j}+g^{\alpha i},\\T^\alpha&=f_\beta^\alpha\Sigma^\beta-f^\alpha_{\beta,i}\Sigma^{\beta i}-X^i_{,ij}\Sigma^{\alpha j}-g^{\alpha i}_{,i}\end{aligned} \tag{33}$$

eşitlikleri ile belirlenmiştir. Burada

$$f_\beta^\alpha = f_\beta^\alpha(x^i), \quad g^{\alpha i} = g^{\alpha i}(x^j)$$

yapısında keyfi fonksiyonlardır. Eşdeğerlik dönüşümleri

$$\frac{d\overline{x}^i}{d\varepsilon} = X^i(\overline{x}^j),$$

$$\frac{d\overline{u}^\alpha}{d\varepsilon} = U^\alpha(\overline{x}^j, \overline{u}^\beta, \overline{\Sigma}^{\beta j}, \overline{\Sigma}^\beta),$$

$$\frac{d\overline{\Sigma}^{\alpha i}}{d\varepsilon} = S^{\alpha i}(\overline{x}^j, \overline{\Sigma}^{\beta j}),$$

$$\frac{d\overline{\Sigma}^\alpha}{d\varepsilon} = T^\alpha(\overline{x}^j, \overline{\Sigma}^{\beta j}, \overline{\Sigma}^\beta)$$

adi türevli diferansiyel denklem sisteminin

$$\overline{x}^i(0) = x^i, \quad \overline{u}^\alpha(0) = u^\alpha,$$
$$\overline{\Sigma}^{\alpha i}(0) = \Sigma^{\alpha i}, \quad \overline{\Sigma}^\alpha(0) = \Sigma^\alpha$$

başlangıç koşulları altında integre edilmesi ile belirlenir.

Maxwell denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümleri

Elektromagnetizmanın Maxwell denklemlerinin simetri grupları bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Maxwell denklemlerinin simetrileri üzerine yapılan çalışmalar Lorentz, Poincaré ve Einstein'e dayanır. Bateman (1909) ve Cunningham (1909)'ın çalışmaları Maxwell denklemlerinin vakum halinin 15 parametreli konformal altgrubu içeren 16 parametreli grup altında değişmez olduğunu göstermiş ve ardı sıra gelen bir çok benzer çalışmaya ışık tutmuştur. Maxwell denklemlerinin vakum halinin simetri grubu üzerine yapılan en önemli çalışmalardan birisi Fushchich ve Nikitin'in, denklem sisteminin Poincaré grubu P(1,3) altında değişmez olduğunu gösterdikleri çalışmadır (Fushchich ve Nikitin, 1987). Maxwell denklemlerinin Poincaré grubu altında değişmez kalabilmesi için bünye denklemlerinin özel hallerinin kısıtları Fushchich ve Tsirfa (1985) tarafından incelenmiştir. Ayrıca Maxwell denklemlerinin vakum halinin korunum yasalarının sınıflandırılması Anco, Pohjanpelto (2001) ve Anco ve Bluman (1997) tarafından yapılmıştır.

Literatürde sıklıkla Maxwell denklemlerinin vakum halinin simetrileri incelenmiştir. Bu çalışmada birinci mertebe genel denklik denklemlerinin sürekli ortamlarda bir uygulaması olarak Maxwell denklemleri, en genel hali ile ele alınmış, eşdeğerlik dönüşümleri incelenmiştir. Rijid ortamlarda elektromagnetizmanın Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned} &e_{ijk}E_{k,j} + \dot{B}_i = 0, && B_{i,i} = 0, \\ &e_{ijk}H_{k,j} - \dot{D}_i - J_i = 0, && D_{i,i} = q_f \end{aligned} \qquad (34)$$

olarak bilinir. Burada, E_i elektrik alan vektörünü, H_i magnetik alan şiddeti vektörünü, D_i elektrik yerdeğiştirme vektörünü, B_i magnetik indüksiyon vektörünü, J_i toplam akım yoğunluğunu, q_f ise serbest yük yoğunluğunu temsil etmektedir. e_{ijk} bilinen permütasyon sembolüdür, $(\circ)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ şeklinde x^i'lere göre kısmi türevi belirtmektedir. $\dot{(\circ)} = \frac{\partial(\circ)}{\partial t}$ olup, zamana göre kısmi türevi ifade etmek için kullanılmıştır.

Maxwell denklemleri $(E_i, H_i, B_i, D_i, J_i)$ $i = 1,2,3$ şeklinde 15 bilinmeyen büyüklük barındırmasına karşın sadece 8 denklemden oluşmaktadır. Fizik anlamda, alanın uyarıcı kaynakları olarak da adlandırılan q_f ve J_i tamamen biliniyor olsa bile, sistemde bilinmeyen sayısı 12 olacaktır. Sistemin çözülebilir olması için bazı ek denklemler ile desteklenmesi gerekir. Öte yandan Maxwell denklemleri özel bir elektromagnetik alanı tüm özellikleri ile göstermeye yeterli değildir. Ortamın elektromagnetik özellikleri bu denklemlerde yer almaz. Sistemi belirli yapabilmek için eklenmesi gereken denklemler, ortamın makroskopik özelliklerini ifade eden bir takım denklemler olacaktır. Elektromagnetik ortamın özelliklerini temsil eden bu denklemler, genel adıyla *bünye denklemleri* adlandırılır. Bu çalışmada Maxwell denklemleri iki farklı bünye denklemi ele alınarak incelenmiş, eşdeğerlik dönüşümlerinin izovektör alanı bileşenlerinin yapısı belirlenmiştir.

Yukarıda (34) denklemleri ile verilen Maxwell denklemlerini, (1) denklik denklemleri sistemi şeklinde ifade edebilmek için bağımsız değişkenler x^i 'leri $\{x_i(i=1,2,3),t\}$ şeklinde, bağımlı değişkenler u^α 'ları ise $\{u_1=E_1,u_2=E_2,\ u_3=E_3,$ $u_4=H_1,u_5=H_2,u_6=H_3\}$ şeklinde seçmeliyiz. Öte yandan birinci mertebe denklik denklemleri sisteminin $\Sigma^{\alpha i}$ ve Σ^α fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{\alpha j}=e_{\alpha jk}E_k,\ \Sigma_{\alpha 4}=\delta_{\alpha j}B_j,\ \Sigma_\alpha=0\\
&\Sigma_{aj}=e_{(a-3)jk}H_k,\ \Sigma_{a4}=-\delta_{(a-3)j}D_j,\\
&\Sigma_a=-\delta_{(a-3)j}J_j \qquad (35)\\
&\Sigma_{7j}=B_j,\quad \Sigma_{74}=0,\quad \Sigma_7=0\\
&\Sigma_{8j}=D_j,\quad \Sigma_{84}=0,\quad \Sigma_8=-q_f
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $q_f=q_f(x,t)$, $j,k=1,2,3,\quad \alpha=1,2,3,\quad a=4,5,6$ olarak alınmalıdır.

Maxwell denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümlerinin izovektör alanı genel hali ile

$$
V=\phi_i\frac{\partial}{\partial x^i}+T\frac{\partial}{\partial t}+\mathsf{E}_i\frac{\partial}{\partial E_i}+\mathsf{H}_i\frac{\partial}{\partial H_i}+\mathsf{B}_i\frac{\partial}{\partial B_i}+\mathsf{D}_i\frac{\partial}{\partial D_i}+\mathsf{J}_i\frac{\partial}{\partial J_i}+Q\frac{\partial}{\partial q_f}
$$

olarak yazılabilir. Burada Maxwell denklemlerinin izovektör alanı bileşenleri ile genel denklik denklemleri sisteminin (4) ile verilen izovektör alanı bileşenleri arasında

$$
\mathsf{E}_k=\frac{1}{2}e_{\alpha jk}S_{\alpha j},\qquad \mathsf{H}_k=\frac{1}{2}e_{(a-3)jk}S_{aj} \qquad (36)
$$

$$
\mathsf{B}_i=S_{7i}=\delta_{\alpha i}S_{\alpha 4},\quad \mathsf{D}_i=S_{8i}=-\delta_{(a-3)i}S_{a4} \qquad (37)
$$

$$
\mathsf{J}_i=-\delta_{(a-3)i}T_a,\qquad \mathsf{Q}=-T_8 \qquad (38)
$$

ilişkileri olduğu (35) tanımlarından açıktır. Ayrıca bu tanımlardan denklik denklemleri sisteminin izovektör alanı bileşenleri üzerinde

$$
T_\alpha=T_7=S_{74}=S_{84}=0 \qquad (39)
$$

$$
S_{\alpha j}\delta_{\alpha j}=0,\qquad S_{aj}\delta_{(a-3)j=0} \qquad (40)
$$

kısıtları olması gerektiği kolaylıkla görülür.

Elektromagnetik ortamın, elektrik yerdeğiştirme, magnetik indüksiyon ve toplam akım yoğunluğu vektörlerinin, elektrik ve magnetik alan vektörlerine kesin nonlineer bağlılığı ile ifade edilebilen ve

$$
\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{E},\mathbf{H}),\ \mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{E},\mathbf{H}),\ \mathbf{J}=\mathbf{J}(\mathbf{E},\mathbf{H})
$$

şeklinde verilen edilen homojen bünye denklemleri altında, genel hali (2) ile tanımlanmış ek değişkenler

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha jm}=e_{\alpha jm},\quad \sigma_{ajn}=e_{(a-3)jn},\\
&\sigma_{7jm}=\delta_{\alpha j}\sigma_{\alpha 4m}=\frac{\partial B_j}{\partial E_m},\sigma_{7jn}=\delta_{\alpha j}\sigma_{\alpha 4n}=\frac{\partial B_j}{\partial H_n},\\
&\sigma_{8jm}=-\delta_{(a-3)j}\sigma_{a4m}=\frac{\partial D_j}{\partial E_m},\ t_{8i}=-\frac{\partial q_f}{\partial x_i},\\
&\sigma_{8jn}=-\delta_{(a-3)j}\sigma_{a4n}=\frac{\partial D_j}{\partial H_n},\ t_{84}=-\frac{\partial q_f}{\partial t},\\
&\tau_{am}=-\delta_{(a-3)j}\frac{\partial J_j}{\partial E_m},\quad \tau_{an}=-\delta_{(a-3)j}\frac{\partial J_j}{\partial H_n}
\end{aligned}
$$

olarak belirlenir iken bazıları özdeş olarak sıfır olacaktır:

$$
\begin{aligned}
&s_{\alpha ji}=s_{\alpha j4}=s_{\alpha 4i}=s_{\alpha 44}=s_{aji}=s_{aj4}=s_{a4i}\\
&=s_{a44}=s_{7ji}=s_{7j4}=s_{8ji}=s_{8j4}=0,\\
&\sigma_{\alpha jn}=\sigma_{ajm}=0,\\
&t_{\alpha i}=t_{\alpha 4}=t_{7i}=t_{74}=t_{ai}=t_{a4}=0,\\
&\tau_{\alpha m}=\tau_{\alpha n}=\tau_{7m}=\tau_{7n}=\tau_{8m}=\tau_{8n}=0.
\end{aligned}
$$

Bu halde bunlara bağlı izovektör alanı bileşenlerinin de özdeş olarak sıfıra eşit alınması gerekir:

$$S_{\alpha ji}=S_{\alpha j4}=S_{\alpha 4i}=S_{\alpha 44}=S_{aji}=S_{aj4}=S_{a4i}$$
$$=S_{a44}=S_{7ji}=S_{7j4}=S_{8ji}=S_{8j4}=0,$$
$$\mathsf{S}_{\alpha jm}=\mathsf{S}_{\alpha jn}=\mathsf{S}_{ajm}=\mathsf{S}_{ajn}=0,$$
$$T_{\alpha i}=T_{\alpha 4}=T_{7i}=T_{74}=T_{ai}=T_{a4}=0,$$
$$\mathsf{T}_{\alpha m}=\mathsf{T}_{\alpha n}=\mathsf{T}_{7m}=\mathsf{T}_{7n}=\mathsf{T}_{8m}=\mathsf{T}_{8n}=0.$$

Burada $\sigma_{\alpha jm}$ ve σ_{ajn} değişkenleri permütasyon sembolü şeklinde belirlendiğinden alacağı değerler {-1,0,1} olacaktır. Bu nedenle bunlara bağlı izovektör bileşenleri de özdeş olarak sıfır alınmıştır. Ek izovektör alanı bileşenleri (9, 10, 13, 14) eşitlikleri ile elde edilmişti. Yukarıdaki kısıtların ve (39,40) kısıtlarının (33) ile belirlenmiş olan izovektör alanı bileşenleri ifadelerinde (35) tanımları göz önüne alınarak gerekli düzenlemelerin yapılması ile sonuç olarak böyle bir elektromagnetik ortamın Maxwell denklemlerinin eşdeğerlik dönüşümlerinin izovektör alanı bileşenlerinin yapısı açık olarak

$$\begin{aligned}
&\phi_i=a_{ij}x_j+a_i,\\
&T=\alpha_1 t+\alpha_2,\\
&\mathsf{H}_i=\beta E_i+h_{ij}H_j+h_i,\\
&\mathsf{E}_i=\in_{ij}E_j+\in_i\\
&\mathsf{D}_i=-\beta B_i+d_{ij}D_j+d_i,\\
&\mathsf{B}_i=b_{ij}B_j+b_i\\
&\mathsf{J}_i=m_{ij}J_j,\\
&Q=\alpha q_f
\end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. Burada tansör ve vektör büyüklüğündeki katsayılar sabit değerlidir. Eşdeğerlik dönüşümleri ise

$$\frac{d\bar t}{d\varepsilon}=\alpha_1\bar t+\alpha_2,\quad \frac{d\bar x_i}{d\varepsilon}=a_{ij}\bar x_i+a_i,$$
$$\frac{d\bar B_i}{d\varepsilon}=b_{ij}\bar B_j+b_i,\quad \frac{d\bar D_i}{d\varepsilon}=-\beta\bar B_i+d_{ij}\bar D_j+d_i,$$
$$\frac{d\bar E_i}{d\varepsilon}=\in_{ij}\bar E_j+\in_i,\quad \frac{d\bar H_i}{d\varepsilon}=\beta\bar E_i+h_{ij}\bar H_j+h_i,$$
$$\frac{d\bar J_i}{d\varepsilon}=m_{ij}\bar J_j,\quad \frac{d\bar q_f}{d\varepsilon}=\alpha\bar q_f$$

adi türevli diferansiyel denklem takımının

$$\begin{aligned}
&\bar t(0)=t,\quad \bar x_i(0)=x_i,\quad \bar E_i(0)=E_i,\\
&\bar H_i(0)=H_i,\quad \bar B_i(0)=B_i,\quad \bar D_i(0)=D_i,\\
&\bar J_i(0)=J_i,\quad \bar q_f(0)=q_f
\end{aligned}$$

başlangıç koşulları altında integre edilmesi ile belirlenir. Burada ε grup parametresidir.

Bir başka örnek olarak elektromagnetik ortamın homojen olmadığı varsayımı altında bünye denklemleri

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{x},t,\mathbf{E},\mathbf{H}),\ \mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{x},t,\mathbf{E},\mathbf{H}),\\
&\mathbf{J}=\mathbf{J}(\mathbf{x},t,\mathbf{E},\mathbf{H})
\end{aligned}\tag{34}$$

şeklinde ele alınmıştır. Bu durumda bir önceki incelemeden farklı olarak bünye değişkenlerinin koordinatlara ve zamana göre fonksiyonel bağlılıklarını ifade eden ek değişkenler sıfır olmayacaktır. Bu halde ek değişkenlerden özdeş olarak sıfıra eşit olanlar aşağıda verildiği gibidir:

$$s_{\alpha ji}=s_{\alpha j4}=s_{aji}=s_{aj4}=0,$$
$$\sigma_{\alpha jn}=\sigma_{ajm}=0,$$
$$t_{\alpha i}=t_{\alpha 4}=t_{7i}=t_{74}=0,$$
$$\tau_{\alpha m}=\tau_{\alpha n}=\tau_{7m}=\tau_{7n}=\tau_{8m}=\tau_{8n}=0.$$

Bunlara bağlı ek izovektör bileşenleri

$$S_{\alpha ji}=S_{\alpha j4}=S_{aji}=S_{aj4}=0,$$
$$\mathcal{S}_{\alpha jm}=\mathcal{S}_{\alpha jn}=\mathcal{S}_{ajm}=\mathcal{S}_{ajn}=0,$$
$$T_{\alpha i}=T_{\alpha 4}=T_{7i}=T_{74}=0,$$
$$\mathcal{T}_{\alpha m}=\mathcal{T}_{\alpha n}=\mathcal{T}_{7m}=\mathcal{T}_{7n}=\mathcal{T}_{8m}=\mathcal{T}_{8n}=0$$

denklemlerini sağlamalıdır. (39,40) kısıtlarının yukarıdaki ek izovektör bileşenleri kısıtları ile birlikte incelenmesi ile Maxwell denklemlerinin izovektör alanı bileşenleri

$$\begin{aligned}
&\phi_i=\phi_i(x_j,t),\\
&T=T(t)\\
&\mathsf{H}_i=\beta E_i+h_{ij}H_j+e_{ikj}\dot\phi_k D_j+h_i
\end{aligned}$$

$$\mathsf{E}_i = \in_{ij} E_j - e_{ikj}\dot{\phi}_k B_j + \in_i$$
$$\mathsf{D}_i = -\beta B_i + d_{ij} D_j + d_i$$
$$\mathsf{B}_i = b_{ij} B_j + b_i$$
$$\mathsf{J}_i = m_{ij} J_j, \; +\dot{\phi}_i q_f + r_{ij} D_j + p_{ij} H_j + p_i$$
$$Q = \alpha q_f + d_{i,i}$$

yapısında belirlenir. Bu sonuçlar bir önceki yapı ile karşılaştırıldığında, elektromagnetik ortamın homojen varsayımının eşdeğerlik dönüşümlerinin yapısını oldukça daralttığı yorumu yapılabilir.

Kaynaklar

Anco S.C. ve Bluman G., (1997). Nonlocal symmetries and nonlocal conservation laws of Maxwell's equations, *Journal of Mathematical Phyiscs,* **38**, 7, 3508-3532.

Anco S.C. ve Pohjanpelto J., (2001). Classification of local conservation laws of Maxwell's equations, *Acta Applicandae. Mathematicae.*, **69**, 3, 285-327.

Bateman H., (1909). The transformations of electrodynamical equations, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **8**, 223-264.

Bluman G.W. ve Kumei S., (1989). *Symmetries and differential equations*, Springer Verlag, New York.

Cartan E., (1945). *Les Systèmes Diffèrentiels Extèrieurs et Leurs Applications Gèometriques,* Hermann, Paris.

Cunningham E., (1909). The principle of relativity in electrodynamics and extensions there of, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **8**, 77-98.

Edelen D.G.B., (1980). *Isovector methods for equations of balance,* Sijthoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn.

Edelen D.G.B., (1981). *Programs for calculation of isovector fields in Reduce 2 environment,* Center for application of mathematics, Lehigh University.

Edelen D.G.B., (1985). *Applied exterior calculus,* Wiley, New York.

Fushchich W.I. ve Nikitin A.G., (1987). *Symmetries of Maxwell's equations,* D. Reidel Publishing Company, Dortrecht, Holland

Fushchich W.I. ve Tsirfa I.M., (1985). On symmetry of nonlinear equations of electrodynamics, *Teoreticheskaya i Matematicheskaya. Fizika*, **64**, 1, 41-50.

Harrison B.K. ve Estabrook F.B., (1971). Geometric approach to invariance groups and solutions of partial differential equations, *Journal of Mathematical Phyics*, **12**, 4, 653-666.

İbragimov N.H., (1994). *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and conservation Laws*, CRC Press, Boca Raton.

İbragimov N.H., (1996). *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 3: New trend in theoretical developments and computational methods*, CRC Press, Boca Raton.

Ovsiannikov L.V., (1982). *Group analysis of differential equations*, Translation Edition by Ames W.F., Academic Press, New York.

Şuhubi E.S., (1991). Isovector fields and similarity solutions for general balance equations, *International Journal of Engineering Science*, **29**, 1, 133-150.

Şuhubi E.S., (1999). Equivalence groups for second order balance equations, *International Journal of Engineering Science*, **37**, 15, 1901-1925.

Şuhubi E.S., (2000). Explicit determination of isovector fields of equivalence groups for second order balance equations, *International Journal of Engineering Science*, **38**, 7, 715-736.