

## Gerekirci diziler kullanarak doğrusal olmayan sistem tanılama

Ender Mete EKŞİOĞLU\*, Ahmet Hamdi KAYRAN

İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

### Özet

*Bu çalışmada sınırlı doğrusalsızlık derecesine sahip Volterra süzgeçleri için yeni bir gösterilim geliştirilmiştir. Bu gösterilim kullanılarak Volterra süzgeçleri için kesin bir tanılama yöntemi sunulmaktadır. Bu yeni yöntem, giriş işareti olarak farklı seviyelere sahip impulslardan oluşan gerekirci diziler kullanılmaktadır. Yeni tanılama yöntemi doğrusal, zamanla-değişmez sistemlerdeki birim impuls cevabının doğrusal olmayan sistemlere başarılı bir uyarlaması olarak düşünülebilir. Çalışmada sunulan tanılama yöntemi kesindir; böylece gözlem gürültüsü olmadığında Volterra çekirdeklerini hatasız kestirmektedir. Bilgisayar benzetimleriyle tanılama yönteminin literatürde yakın zamanda sunulmuş olan yöntemlerden daha iyi kestirim sonuçları verdiği gösterilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** Doğrusal olmayan sistem tanılama, Volterra süzgeçleri.

### Nonlinear system identification using deterministic multilevel sequences

#### Abstract

*In this paper we develop a new representation for the finite-order Volterra filters. This representation introduces a novel partitioning of the Volterra kernels. Using this representation, we formulate a novel exact identification method for Volterra filters, which uses deterministic sequences consisting of impulses with distinct levels. The identification method might be considered as a successful extension of the impulse response of the linear, time-invariant systems to the realm of nonlinear systems. The developed method indeed includes identification using the unit impulse response as a subcase when the system under consideration is a linear system. Our identification method is exact; hence, it calculates the exact Volterra kernels in the absence of noise for very short length input sequences. Our method calculates each Volterra kernel individually. The kernel estimates are not utilized in the calculation of further kernel estimates. This property hinders error propagation among kernel estimates. Our method calculates directly the Volterra kernels, instead of calculating first some intermediary representation such as the Wiener kernels, which do not have any directly interpretable results. Our method does not introduce and identify any kernels which are redundant for the regular Volterra filter. We demonstrate with simulations that the identification algorithm can produce better parameter estimates than some most recent algorithms in the literature.*

**Keywords:** Nonlinear system identification, Volterra filters.

---

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Ender M. EKŞİOĞLU. ender@ehb.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 35 63.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Novel methods for Volterra filter representation, identification and realization" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.03.2005 tarihinde dergiye ulaşmış, 29.03.2005 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Doğrusal olmayan sistem tanılama, doğrusal modellemenin yetersiz kaldığı problemlerde önemli başarımların iyileşmesi sağlamaktadır (Schetzen, 1989; Billings, 1980). İçkin olarak doğrusalsızlığın karşımıza çıktığı uygulamalara örnek olarak iletişim kanallarının modellenmesi (Benedetto ve Biglieri, 1983; Biglieri vd., 1988; Özden vd., 1996) verilebilir. Çıkışın sistem değişkenlerine doğrusal olarak bağlı olduğu kırılmış Volterra serisi gösterilimi bu çeşit problemlerde kullanılabilir bir doğrusal olmayan sistem modelidir (Wiener, 1958; Sandberg, 1992).

Bu çalışmada kırılmış ayrık Volterra serisi gösterilimi ile modellenmiş doğrusal olmayan sistemlerin tanılanması için gerekirci (deterministic) giriş dizileri kullanımı önerilmiştir. Sürekli-zaman için benzer bir yöntem Schetzen (1965) tarafından önerilmiş ve sistemin girişine farklı değerlerde  $p$  tane impuls uygulanarak  $p$ . dereceden bir Volterra çekirdeğinin belirlenebileceği gösterilmiştir. Ancak bu yaklaşım ikiden daha yüksek dereceden doğrusalsızlıklı sistemlerde, karmaşıklığının çok artmasından dolayı uygulama bulmamıştır (Mathews ve Sicuranza, 2000). Bu çalışmada Volterra çekirdekleri için gerekirci çok-seviyeli giriş dizileri kullanıldığında basit kapalı biçim çözümler getiren yeni bir ayrıştırma önerilmektedir ve Schetzen (1965) tarafından önerilen algoritmanın yüksek dereceden sistemlerde uygulanmasını engelleyen yüksek karmaşıklık sorunu ortadan kalkmaktadır.

## Volterra süzgeci için yeni gösterilim

Bu bölümde  $M$ . dereceden ayrık-zaman, nedensel, zamanla değişmez Volterra süzgeçleri için yeni bir gösterilim geliştirilmektedir. Bu yeni gösterilim Volterra çekirdeklerini literatürde var olan gösterimlerden farklı bir şekilde gruplamaktadır. Bu gösterilim Volterra süzgeci tanılama için yeni bir yöntem geliştirmemize temel oluşturacaktır.  $M$ . dereceden doğrusal olmayan Volterra süzgeci  $N[\cdot]$  için literatürde sıkça kullanılan bir gösterilim şu şekildedir:

$$y(n) = N[x(n)] = \sum_{i_1=0}^N b_1(i_1)x(n-i_1) + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N b_2(i_1, i_2)x(n-i_1)x(n-i_2) + \dots + \sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \dots \sum_{i_M=i_{M-1}}^N b_M(i_1, i_2, \dots, i_M)x(n-i_1)x(n-i_2) \dots x(n-i_M) \quad (1)$$

Bu gösterilimde  $b_k(i_1, i_2, \dots, i_k)$  değişkenleri sistem parametreleri olan  $k$ . dereceden Volterra çekirdeklerini belirtmektedir.  $N$  ise sistemin bellek uzunluğudur. (1)'de verilen sistem denklemi  $k$ . derece doğrusal olmayan alt-sistemlerin ( $B_k[\cdot]$ ) bir toplamı olarak yazılabilir.

$$y(n) = N[x(n)] = \sum_{k=1}^M y_k(n) = \sum_{k=1}^M B_k[x(n)] \quad (2)$$

$$= \sum_{k=1}^M \underbrace{\sum_{i_1=0}^N \sum_{i_2=i_1}^N \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^N b_k(i_1, i_2, \dots, i_k)x(n-i_1)x(n-i_2) \dots x(n-i_k)}_{B_k[x(n)]}$$

(1) ve (2)'de gördüğümüz üzere klasik Volterra süzgeci gösteriliminde Volterra çekirdekleri doğrusalsızlık derecelerine göre ayrıştırılmaktadırlar. Doğrusalsızlık derecesi, birbirleri ile çarpılan giriş değerlerinin ( $x(n-i_m)$ ) toplam sayısıdır. Bu makalede Volterra süzgeçleri için geliştireceğimiz yeni gösterilim ise, Volterra çekirdeklerinin çarpılan *farklı* gecikmelerdeki giriş değerlerinin sayısına göre ayrıştırılmasına dayanmaktadır. Çıkış  $y(n)$ ,  $M$  tane doğrusal olmayan çapraz-çarpım alt-sistemin ( $H^{(\ell)}[\cdot]$ ,  $\ell = 1, \dots, M$ ) çıkışlarının toplamı olarak gösterilebilir.

$$y(n) = N[x(n)] = \sum_{\ell=1}^M y^{(\ell)}(n) \quad (3)$$

$$y^{(\ell)}(n) = H^{(\ell)}[x(n)] \quad (4)$$

$H^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, M$  alt-sistemlerinin giriş-çıkış ilişkileri şu şekilde verilmektedir.

$$\mathbf{H}^{(1)}[x(n)] = \sum_{i=0}^N \mathbf{h}^{(1)T}(i) \mathbf{x}^{(1)}(n-i)$$

$$\mathbf{H}^{(\ell)}[x(n)] = \quad (5)$$

$$\sum_{q_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{q_{\ell-1}=1}^{Q_{\ell-1}} \sum_{i=0}^{N-\bar{q}_{\ell-1}} \mathbf{h}^{(\ell)T}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) \mathbf{x}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n-i)$$

$2 \leq \ell \leq M$  için

Bu yeni gösterilimde  $Q_j = N+1+j-\ell-\bar{q}_{j-1}$ ,  $j=1, \dots, \ell-1$ , ve  $\bar{q}_m = q_1 + \dots + q_m$ ,  $\bar{q}_0 = 0$  tanımları kullanılmaktadır.  $\ell$  tane toplama işlemini gösteren  $\mathbf{H}^{(\ell)}[\cdot]$  sembolü  $\ell$ -boyutlu ( $\ell$ -B) bir çapraz-çarpım Volterra alt-sistemi olarak adlandırılmaktadır. 1-B çekirdek vektörü  $\mathbf{h}^{(1)}(i)$  ve karşılık gelen giriş vektörü  $\mathbf{x}^{(1)}(n)$  sırasıyla Volterra çekirdekleri ve giriş işareti  $x(n)$  kullanılarak tanımlanabilir.

$$\mathbf{h}^{(1)}(i) = [b_1(i) \quad b_2(i, i) \quad \cdots \quad b_M(i, \dots, i)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(n) = [x(n) \quad x^2(n) \quad \cdots \quad x^M(n)]^T \quad (7)$$

(5)'de kullanılan  $\ell$ -B giriş vektörü şu şekilde ayrıştırılabilir:

$$\mathbf{x}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) = \begin{bmatrix} x_\ell^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \\ \mathbf{x}_{\ell+1}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$x_\ell^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) = x(n) x(n-q_1) \cdots x(n-q_1 - \dots - q_{\ell-1}) \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_k^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \equiv [x_k^{(p_1, \dots, p_\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n)]_{\sigma(p_1, \dots, p_\ell)} \quad (10)$$

(8)'de  $k = \ell, \ell+1, \dots, M$  için tanımlanan alt giriş vektörleri  $\mathbf{x}_k^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n)$ ,  $k$ . dereceden tüm giriş çarpımlarını içermektedir.  $\sigma(p_1, p_2, \dots, p_\ell)$  sembolü  $p_i$ ,  $i=1, 2, \dots, \ell$  için  $\sum_{i=1}^{\ell} p_i = k$  ve  $p_i > 0$  koşullarını sağlayan tüm kombinasyonları belirtmektedir. Bu koşulları sağlayan

$\binom{k-1}{\ell-1} = \binom{k-1}{k-\ell}$  tane kombinasyon mümkün olmaktadır. Örnek olarak  $\ell=3$  ve  $k=5$  alırsak,

$\binom{4}{2} = 6$  tane olası kombinasyon  $\sigma(p_1, p_2, p_3) =$

$\{(3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 3, 1), (1, 2, 2), (1, 1, 3)\}$

olarak yazılabilir. Böylece  $\ell=3$  ve  $k=5$  için:

$$\mathbf{x}_5^{(3)}(q_1, q_2; n) = \begin{bmatrix} x^3(n) x(n-q_1) x(n-q_1-q_2) \\ x^2(n) x^2(n-q_1) x(n-q_1-q_2) \\ x^2(n) x(n-q_1) x^2(n-q_1-q_2) \\ x(n) x^3(n-q_1) x(n-q_1-q_2) \\ x(n) x^2(n-q_1) x^2(n-q_1-q_2) \\ x(n) x(n-q_1) x^3(n-q_1-q_2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

(5)'de kullanılan  $\ell$ -B çekirdek vektörü şu şekilde ayrıştırılabilir:

$$\mathbf{h}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) = \begin{bmatrix} h_\ell^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) \\ \mathbf{h}_{\ell+1}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{h}_k^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) \equiv [h_k^{(p_1, p_2, \dots, p_\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i)]_{\sigma(p_1, p_2, \dots, p_\ell)} \quad (13)$$

Alt-çekirdek vektörü  $\mathbf{h}_k^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i)$ , (8)'de tanımlanan alt-giriş vektörü  $\mathbf{x}_k^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n-i)$ 'ye karşı düşmektedir. Örnek olarak  $\ell=3$  ve  $k=5$  için

$$\mathbf{h}_5^{(3)}(q_1, q_2; n) = \begin{bmatrix} h_5^{(3,1,1)}(q_1, q_2; i) \\ h_5^{(2,2,1)}(q_1, q_2; i) \\ h_5^{(2,1,2)}(q_1, q_2; i) \\ h_5^{(1,3,1)}(q_1, q_2; i) \\ h_5^{(1,2,2)}(q_1, q_2; i) \\ h_5^{(1,1,3)}(q_1, q_2; i) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Alt-çekirdek vektörü  $\mathbf{h}_k^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i)$ 'nin her bir elemanı bir  $b_k(i_1, i_2, \dots, i_k)$  Volterra çekirdeğine karşı düşmektedir.  $h_k^{(p_1, p_2, \dots, p_\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i)$

elemanlarıyla Volterra çekirdekleri arasındaki ilişki şu şekilde olur.

$$h_k^{(p_1, p_2, \dots, p_\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) = b_k \left( \underbrace{i, \dots, i}_{p_1}, \underbrace{i + \bar{q}_1, \dots, i + \bar{q}_1}_{p_2}, \dots, \underbrace{i + \bar{q}_{\ell-1}, \dots, i + \bar{q}_{\ell-1}}_{p_\ell} \right)$$

Böylece,  $\ell = 3$  ve  $k = 5$  için,

$$\mathbf{h}_5^{(3)}(q_1, q_2; n) = \begin{bmatrix} b_5(i, i + q_1, i + q_2, i + q_2, i + q_2) \\ b_5(i, i + q_1, i + q_1, i + q_2, i + q_2) \\ b_5(i, i + q_1, i + q_1, i + q_1, i + q_2) \\ b_5(i, i, i + q_1, i + q_1, i + q_2) \\ b_5(i, i, i + q_1, i + q_2, i + q_2) \\ b_5(i, i, i, i + q_1, i + q_2) \end{bmatrix}$$

Burada geliştirilen yeni gösterilime benzer bir Volterra süzgeci gösterilimi Raz ve Van Veen (1998)'de önerilmiştir. Ancak burada verilen gösterimde, çekirdekler yeni bir yaklaşımla, çarpılan farklı gecikmelerdeki giriş değerlerinin sayısına göre ayrıştırılmaktadır.

### Gerekirci giriş işaretleri kullanarak Volterra süzgeci tanılama

Bu bölümde farklı genliklerdeki  $\ell$  adet impulstan oluşan gerekirci giriş dizileri kullanarak  $\mathbf{h}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i)$  çekirdek vektörlerini belirlemek için bir yöntem geliştirilecektir. Tek çapraz-çarpım ( $\ell = 1$ ) çekirdek vektörleri (1-B çekirdek vektörleri olarak da adlandırılmıştı (5)) tek bir impulsa sahip giriş dizileri ile belirlenecektir. Artan çapraz-çarpım değerlerine sahip diğer çekirdek vektörleri sadece o anki çıkış ve daha düşük boyutlu alt-sistemlerin uygun geçmiş çıkışları kullanılarak tanılanacaktır. Bu tanılama yöntemini tam olarak geliştirmek için ilk önce 1-, 2-, ve 3-B alt-sistemlerin tanılanması açıklanacaktır. Daha sonra tanılama algoritması  $\ell$ -B için genelleştirilecektir.

### 1-B çekirdek vektörlerinin tanılanması

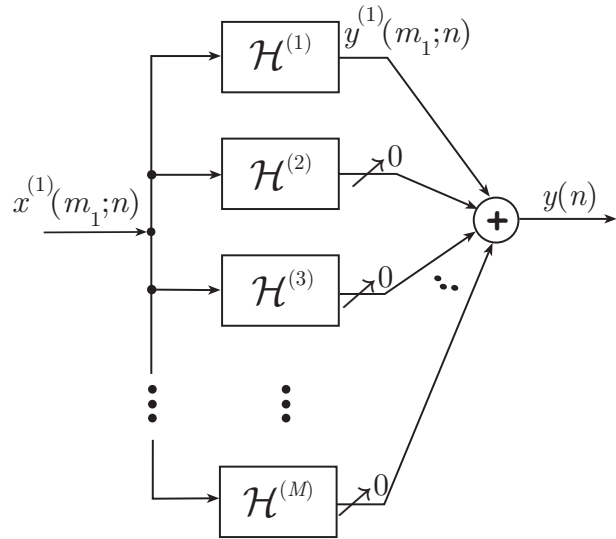
$x^{(1)}(m_1; n) = a_{m_1} \delta(n)$ ,  $m_1 = 1, 2, \dots, \binom{M}{1}$  şeklinde tanımlanan ve farklı genliklere sahip tek bir

impulstan oluşan diziler kümesi, 1-B çekirdek vektörlerini tanılama için yeterlidir. (5)'de verilen çapraz-çarpım gösterilimini kullanarak, bu tek impulstan oluşan diziler için 1-B'den yüksek boyutta çıkışların sıfır olduğu gösterilebilir.

$$N [a_{m_1} \delta(n)] = H^{(1)}[a_{m_1} \delta(n)] \quad (15)$$

$$H^{(\ell)}[a_{m_1} \delta(n)] = 0, \ell = 2, \dots, M \text{ için}$$

(15) özelliği grafiksel olarak Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. (15) için grafiksel gösterilim (Doğrusal olmayan  $N$  sisteminin  $x(n) = a_{m_1} \delta(n)$  girişi için çıkışı  $H^{(1)}$  alt-sisteminin çıkışına eşit olmaktadır)

Giriş dizisi  $x(n) = x^{(1)}(m_1; n)$  olarak seçildiğinde doğrusal olmayan sistem çıkışı aşağıda verildiği üzere yazılır.

$$\begin{aligned} y(n) &= N [x^{(1)}(m_1; n)] = y(m_1; n) \\ &= H^{(1)} [x^{(1)}(m_1; n)] = y^{(1)}(m_1; n) \\ &= \sum_{i=0}^N \mathbf{h}^{(1)T}(i) \mathbf{u}^{(1)}(m_1; n-i) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^{(1)}(m_1; n) =$$

$$\begin{aligned} & \left[ x^{(1)}(m_1; n) \quad x^{(1)2}(m_1; n) \quad \dots \quad x^{(1)M}(m_1; n) \right]^T \\ &= \left[ a_{m_1} \quad a_{m_1}^2 \quad \dots \quad a_{m_1}^M \right]^T \delta(n) \end{aligned}$$

$m_1 = 1, 2, \dots, \binom{M}{1}$  için tüm giriş çıkış denklemlerini bir araya getirmek mümkündür:

$$\mathbf{x}_e^{(1)}(n) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1;n) & x^{(1)}(2;n) & \dots & x^{(1)}(M;n) \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_M \end{bmatrix}^T \delta(n)$$

$$\mathbf{y}_e^{(1)}(n) = \begin{bmatrix} N \begin{bmatrix} x^{(1)}(1;n) \end{bmatrix} & N \begin{bmatrix} x^{(1)}(2;n) \end{bmatrix} & \dots & N \begin{bmatrix} x^{(1)}(M;n) \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} y^{(1)}(1;n) & y^{(1)}(2;n) & \dots & y^{(1)}(M;n) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{U}_e^{(1)}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)T}(1;n) \\ \mathbf{u}^{(1)T}(2;n) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(1)T}(M;n) \end{bmatrix}$$

Çıkış işareti (5) kullanılarak şu şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{y}_e^{(1)}(n) = N \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e^{(1)}(n) \end{bmatrix} \\ = \mathbf{H}^{(1)} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e^{(1)}(n) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N \mathbf{U}_e^{(1)}(n-i) \mathbf{h}^{(1)}(i) \quad (17)$$

$\mathbf{U}_e^{(1)}(n-i)$ ,  $\mathbf{U}_e^{(1)}(n-i) = \mathbf{U}_e^{(1)} \delta(n-i)$  şeklinde ayrıştırılabilir.  $\mathbf{U}_e^{(1)}$  aşağıda tanımlanan matristir.

$$\mathbf{U}_e^{(1)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^M \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_M & a_M^2 & \dots & a_M^M \end{bmatrix} \quad (18)$$

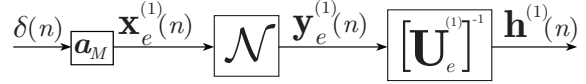
Bu bilgiler kullanılarak (17) yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{y}_e^{(1)}(n) = \sum_{i=0}^N \mathbf{U}_e^{(1)} \mathbf{h}^{(1)}(i) \delta(n-i) = \mathbf{U}_e^{(1)} \mathbf{h}^{(1)}(n) \quad (19)$$

$\mathbf{U}_e^{(1)}$  matrisinin tersinir olduğu varsayımı altında, 1-B çekirdek vektörü bir matris çarpımı ile hesaplanabilir.

$$\mathbf{h}^{(1)}(n) = \left[ \mathbf{U}_e^{(1)} \right]^{-1} \mathbf{y}_e^{(1)}(n), \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, N \quad (20)$$

Şekil 2, 1-B çekirdek vektörleri için geliştirilen tanılama yöntemini grafiksel olarak göstermektedir.



Şekil 2. 1-B Volterra çekirdeklerinin ( $\mathbf{h}^{(1)}(n)$ ) tanılanması için önerilen yöntem (20)

(20) kullanılarak tüm 1-B çekirdek vektörleri için çözüm tek bir matris çarpımına indirgenebilir.

$$\mathbf{H}^{(1)} = \left[ \mathbf{U}_e^{(1)} \right]^{-1} \mathbf{Y}_e^{(1)} \quad (21)$$

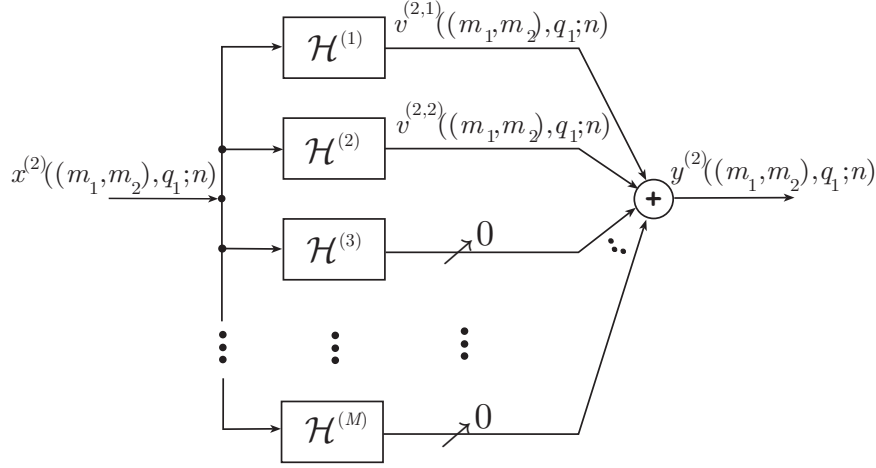
$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(1)}(0) & \mathbf{h}^{(1)}(1) & \dots & \mathbf{h}^{(1)}(N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_e^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_e^{(1)}(0) & \mathbf{y}_e^{(1)}(1) & \dots & \mathbf{y}_e^{(1)}(N) \end{bmatrix}$$

Bu sonuç, tüm  $(M(N+1))$  tane 1-B  $h_j^{(j)}(i)$  çekirdeklerinin,  $M \times M$  boyutlarında bir giriş matrisinin tersiyle çıkış dizilerinden oluşturulan bir matrisin çarpımıyla elde edilebileceğini göstermektedir. Birim impuls cevabıyla doğrusal FIR süzgeç tanılama,  $M=1$  için özel bir durum olmaktadır.  $\mathbf{U}_e^{(1)}$  giriş dizisi değerlerinden oluşturulan bir matristir ve biçim olarak bir Vandormende matrisini andırmaktadır. Bu  $\mathbf{U}_e^{(1)}$  matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul giriş dizilerinde kullanılan impuls genliklerinin sıfırdan ve birbirlerinden farklı olmalarıdır. Yani  $a_i \neq 0$  ve  $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$  için  $\mathbf{U}_e^{(1)}$  matrisinin tersi alınabilmektedir.

## 2-B çekirdek vektörlerinin tanılanması ve giriş kümesi oluşturma matrisleri

Bu bölümde 2-B çekirdek vektörleri ( $\mathbf{h}^{(2)}(q_1; i)$ ,  $q_1 = 1, \dots, N$  ve  $i = 0, 1, \dots, N - q_1$ ) farklı genlikli iki impulstan oluşan gerekirci



Şekil 3. (23) için grafiksel gösterilim. Doğrusal olmayan N sisteminin  $x(n) = a_{m_1} \delta(n) + a_{m_2} \delta(n - q_1)$  girişi için çıkışı,  $H^{(1)}$  ve  $H^{(2)}$  alt-sistemlerinin çıkışları toplamına eşit olmaktadır.

diziler kullanılarak tanılanacaktır. İki impulstan oluşan diziler şu şekilde tanımlanabilir:

$$x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n) = x^{(1)}(m_1; n) + x^{(1)}(m_2; n - q_1)$$

$$m_1 = 1, \dots, M-1; \quad m_2 = m_1 + 1, \dots, M \quad \text{için} \quad (22)$$

Burada,  $x^{(1)}(m_i; n) = a_{m_i} \delta(n)$ ,  $i = 1, 2$  olarak tanımlanmaktadır. İmpuls genlikleri, 1-B çekirdeklerin tanılanmasında kullanılan impulsların genliklerinden seçilmektedir ( $a_{m_1}, a_{m_2} \in \{a_1, \dots, a_M\}$ ). (5)'de verilen çapraz çarpım gösterilimi kullanılarak, iki impulstan oluşan diziler için 2-B'den yüksek boyutta çıkışların sıfır olduğu gösterilebilir.

$$H^{(\ell)}[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] = 0 \quad \ell \geq 3 \quad \text{için.} \quad (23)$$

(23) grafiksel olarak Şekil 3'de betimlenmektedir.

(22)'de verilen giriş işareti için çıkış şu şekilde yazılabilir.

$$N[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] = y^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)$$

$$= H^{(1)}[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] + H^{(2)}[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] \quad (24)$$

(24)'de,

$$H^{(2)}[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] = v^{(2,2)}((m_1, m_2), q_1; n)$$

$$H^{(1)}[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] = v^{(2,1)}((m_1, m_2), q_1; n)$$

$$= v^{(1,1)}(m_1; n) + v^{(1,1)}(m_2; n - q_1)$$

$$v^{(1,1)}(m_i; n) = H^{(1)}[x^{(1)}(m_i; n)] \quad (25)$$

olmaktadır.

**Tanım 1:**  $v^{(i,j)}((m_1, \dots, m_i), q_1, \dots, q_{i-1}; n)$  notasyonu  $j$ -B bir alt-sistemin,  $i$  tane impulstan oluşan bir giriş işareti için verdiği çıkış işaretini belirtmektedir.

$$v^{(i,j)}((m_1, \dots, m_i), q_1, \dots, q_{i-1}; n) =$$

$$H^{(j)}[x^{(i)}((m_1, \dots, m_i), q_1, \dots, q_{i-1}; n)]$$

(24) ve (25) kullanılarak tek başına 2-B alt-sistemin çıkışı hesaplanabilir:

$$v^{(2,2)}((m_1, m_2), q_1; n) = N[x^{(2)}((m_1, m_2), q_1; n)] - (v^{(1,1)}(m_1; n) + v^{(1,1)}(m_2; n - q_1)) \quad (26)$$

2-B çekirdek vektörleri  $\begin{pmatrix} M \\ 2 \end{pmatrix}$  çekirdek içermektedirler. 2-B çekirdek vektörünü tanılamak için

(22)'de verilene benzer şekilde  $\binom{M}{2}$  tane, iki impulstan oluşan, birbirinden farklı giriş dizisi oluşturmamız gerekmektedir. Bu giriş dizisi kümesini matrisel olarak şu şekilde oluşturabiliriz:

$$\mathbf{x}_e^{(2)}(q_1; n) = \mathbf{T}_{2,1}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n) + \mathbf{T}_{2,2}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n - q_1) \quad (27)$$

Burada  $\mathbf{x}_e^{(1)}(n) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]^T \delta(n)$  olacaktır. Sabit  $\mathbf{T}_{2,1}^{(M)}$  ve  $\mathbf{T}_{2,2}^{(M)}$  matrisleri  $\binom{M}{2} \times \binom{M}{1}$  boyutludur. Bu giriş kümesi oluşturma matrisleri yardımıyla  $\binom{M}{1} = M$  tane farklı genlik seviyesinden  $\binom{M}{2}$  tane ikili kombinasyon oluşturulmaktadır. (24)'de verilen tek giriş dizisi-tek çıkış dizisi gösterilime benzer şekilde, giriş kümeleri için giriş-çıkış ilişkisi şu şekilde gösterilebilir:

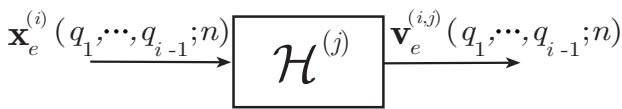
$$\mathbf{v}_e^{(2,1)}(q_1; n) = \mathbf{H}^{(1)} [\mathbf{x}_e^{(2)}(q_1; n)]$$

$$\mathbf{v}_e^{(2,2)}(q_1; n) = \mathbf{H}^{(2)} [\mathbf{x}_e^{(2)}(q_1; n)]$$

**Tanım 2:**  $\mathbf{v}_e^{(i,j)}(q_1, \dots, q_{i-1}; n)$  notasyonu  $j$ -B bir alt-sistemin,  $i$  tane impuls içeren giriş dizilerinden oluşan bir küme için verdiği çıkış dizisi kümesini belirtmektedir.

$$\mathbf{v}_e^{(i,j)}(q_1, \dots, q_{i-1}; n) = \mathbf{H}^{(j)} [\mathbf{x}_e^{(i)}(q_1, \dots, q_{i-1}; n)] \quad (28)$$

Şekil 4 bu notasyonu betimlemektedir.



Şekil 4. Tanım 2'de (28) verilen

$\mathbf{v}_e^{(i,j)}(q_1, \dots, q_{i-1}; n)$  için grafiksel gösterilim

(25) ve (28) kullanılarak 1-B sistemin iki impulstan oluşan giriş dizileri için çıkışı, bir impulstan oluşan diziler için olan çıkışları cinsinden yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_e^{(2,1)}(q_1; n) \\ &= \mathbf{H}^{(1)} [\mathbf{T}_{2,1}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n)] + \mathbf{H}^{(1)} [\mathbf{T}_{2,2}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n - q_1)] \quad (29) \\ &= \mathbf{T}_{2,1}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n) + \mathbf{T}_{2,2}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n - q_1) \end{aligned}$$

2-B alt-sistemin çıkışı toplam çıkış  $\mathbf{y}_e^{(2)}(q_1; n) = \mathbf{N} [\mathbf{x}_e^{(2)}(q_1; n)]$ 'den 1-B alt-sistemin çıkışı çıkarılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_e^{(2,2)}(q_1; n) = \mathbf{y}_e^{(2)}(q_1; n) - \mathbf{v}_e^{(2,1)}(q_1; n) \\ &= \mathbf{y}_e^{(2)}(q_1; n) - [\mathbf{T}_{2,1}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n) + \mathbf{T}_{2,2}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n - q_1)] \quad (30) \end{aligned}$$

Öte yandan 2-B alt-sistemin çıkışı çekirdek vektörleri ve giriş işaretleri kullanılarak hesaplanabilir.

$$\mathbf{v}_e^{(2,2)}(q_1; n) = \sum_{i=0}^{N-q_1} \mathbf{U}_e^{(2)}(q_1; n-i) \mathbf{h}^{(2)}(q_1; i) \quad (31)$$

Burada  $\mathbf{U}_e^{(2)}(q_1; n-i)$ ,  $\mathbf{U}_e^{(2)} \delta(n - q_1 - i)$  ile yer değiştirir.  $\mathbf{U}_e^{(2)}$ ,  $\binom{M}{2} \times \binom{M}{2}$  boyutlu bir matristir.

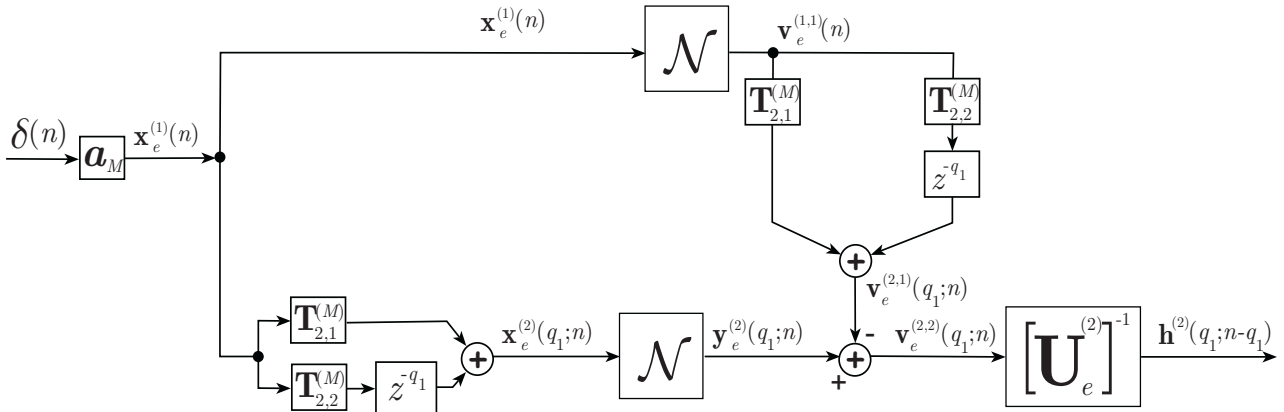
$\mathbf{U}_e^{(2)}$  giriş işareti genlik seviyeleri  $(a_1, a_2, \dots, a_M)$  cinsinden ifade edilebilir.

$$\mathbf{U}_e^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(2)T}(1,1) \\ \mathbf{u}^{(2)T}(1,2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(2)T}(M-1, M) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{u}^{(2)T}(i, j) = [u_2^{(2)}(i, j) : u_3^{(2)T}(i, j) : \dots : u_M^{(2)T}(i, j)]$$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)}(i, j) &= [a_i a_j]_{1 \times 1} \\ \mathbf{u}_3^{(2)T}(i, j) &= [a_i a_j^2 \quad a_i^2 a_j]_{1 \times 2} \\ \mathbf{u}_4^{(2)T}(i, j) &= [a_i a_j^3 \quad a_i^2 a_j^2 \quad a_i^3 a_j]_{1 \times 3} \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_M^{(2)T}(i, j) &= [a_i a_j^{M-1} \quad a_i^2 a_j^{M-2} \quad \dots \quad a_i^{M-1} a_j]_{1 \times M} \end{aligned} \quad (33)$$

Örnek olarak  $M = 4$  için  $\mathbf{U}_e^{(2)}$  aşağıdaki şekilde olacaktır.



Şekil 5. 2-B Volterra çekirdeklerinin  $(\mathbf{h}^{(2)}(q_1; n - q_1))$  tanınması için önerilen yöntem

$$\mathbf{U}_e^{(2)} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 a_2^2 & a_1^2 a_2 & a_1 a_2^3 & a_1^2 a_2^2 & a_1^3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_1 a_3^2 & a_1^2 a_3 & a_1 a_3^3 & a_1^2 a_3^2 & a_1^3 a_3 \\ a_1 a_4 & a_1 a_4^2 & a_1^2 a_4 & a_1 a_4^3 & a_1^2 a_4^2 & a_1^3 a_4 \\ a_2 a_3 & a_2 a_3^2 & a_2^2 a_3 & a_2 a_3^3 & a_2^2 a_3^2 & a_2^3 a_3 \\ a_2 a_4 & a_2 a_4^2 & a_2^2 a_4 & a_2 a_4^3 & a_2^2 a_4^2 & a_2^3 a_4 \\ a_3 a_4 & a_3 a_4^2 & a_3^2 a_4 & a_3 a_4^3 & a_3^2 a_4^2 & a_3^3 a_4 \end{bmatrix}$$

2-B Volterra çekirdek vektörleri (30) ve (31) kullanılarak hesaplanabilir.

$$\mathbf{h}^{(2)}(q_1; n - q_1) = [\mathbf{U}_e^{(2)}]^{-1} \mathbf{v}_e^{(2,2)}(q_1; n) \quad (34)$$

$$q_1 = 1, \dots, N \text{ ve } n = q_1, q_1 + 1, \dots, N$$

Şekil. 5, (34)'de tamamlanan algoritmayı grafiksel olarak göstermektedir.

### 3-B çekirdek vektörlerinin tanılanması ve çıkış kümesi oluşturma matrisleri

3-B çekirdek vektörleri  $\mathbf{h}^{(3)}(q_1, q_2; i)$ ,  $(q_1 = 1, \dots, N - 1, q_2 = 1, \dots, N - q_1 \text{ ve } i = 0, 1, \dots, N - q_1 - q_2)$  üç impulstan oluşan giriş dizileri ve daha önce kullanılan giriş dizilerinin çıkışları kullanılarak bulunabilir. Aşağıda tanımlanan ve üç impulstan oluşan giriş dizileri sadece 1-B, 2-B ve 3-B alt-sistemleri uyacaktır.

$$\mathbf{x}_e^{(3)}(q_1, q_2; n) = \mathbf{T}_{3,1}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n) + \mathbf{T}_{3,2}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n - q_2) + \mathbf{T}_{3,3}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n - q_1 - q_2) \quad (35)$$

$\mathbf{T}_{3,1}^{(M)}$ ,  $\mathbf{T}_{3,2}^{(M)}$  ve  $\mathbf{T}_{3,3}^{(M)}$  giriş dizisi kümesi oluşturma matrisleri olup  $\binom{M}{3} \times \binom{M}{1}$  boyutlarındadır. Üç impuls içeren giriş dizileri için doğrusal olmayan sistemin cevabı, ilk 3 alt-sistemin çıkışları toplamı olur.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_e^{(3)}(q_1, q_2; n) &= \mathbf{N} [\mathbf{x}_e^{(3)}(q_1, q_2; n)] \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}^{(i)} [\mathbf{x}_e^{(3)}(q_1, q_2; n)] \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_e^{(3,i)}(q_1, q_2; n) \end{aligned} \quad (36)$$

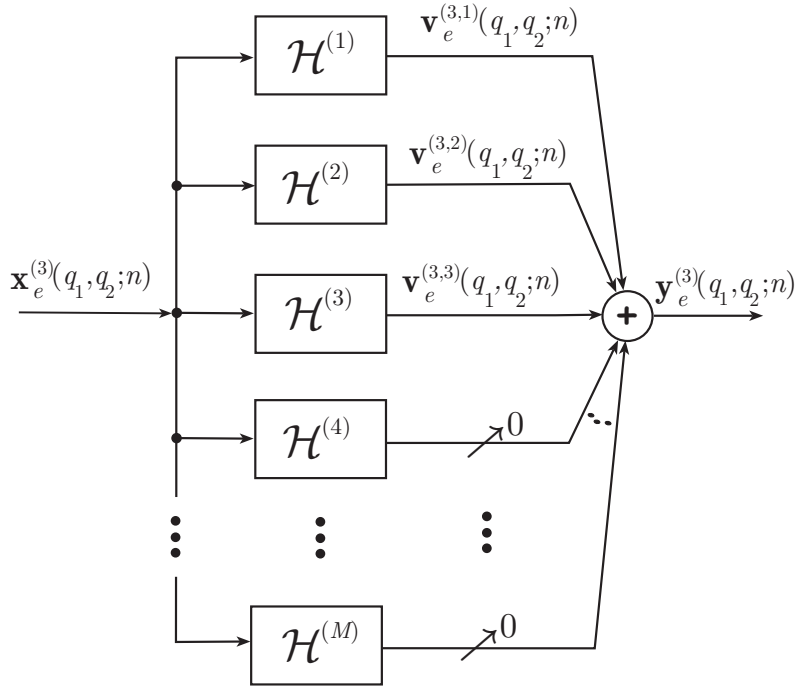
Bu giriş çıkış ilişkisi Şekil 6'da gösterilmektedir.

1-B alt-sistemin üç impulstan oluşan girişler için çıkışı, tek impuls girişler için olan çıkışları cinsinden ifade edilebilir.

$$\mathbf{v}_e^{(3,1)}(q_1, q_2; n) = \sum_{j=1}^{\binom{3}{1}} \mathbf{S}_{31,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n - n_j^{(3,1)}) \quad (37)$$

Burada  $\mathbf{S}_{31,j}^{(M)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) matrisleri tek impuls girişler için oluşan çıkışlardan uygun olanlarını seçmek için kullanılmaktadır.





Şekil 6. (36) için grafiksel gösterilim. Doğrusal olmayan  $N$  sisteminin üç impulstan oluşan girişler için çıkışı,  $H^{(1)}$ ,  $H^{(2)}$  ve  $H^{(3)}$  alt-sistemlerinin çıkışları toplamına eşit olmaktadır

2-B alt-sistemin üç impulstan oluşan girişler için oluşturduğu çıkış işareti de, çift impuls girişler için verdiği çıkışlardan uygun olanları toplanarak hesaplanabilir.

$$\mathbf{v}_e^{(3,2)}(q_1, q_2; n) = \sum_{j=1}^{\binom{3}{2}} \mathbf{S}_{32,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(2,2)}(q_j^{(3,2)}; n - n_j^{(3,2)}) \quad (38)$$

Çıkış kümesi oluşturma matrisleri  $\mathbf{S}_{32,j}^{(M)}$ , çift impuls girişler için oluşan çıkışlardan uygun olanları seçip toplamak için kullanılmaktadırlar. 1-B ve 2-B durumlarına benzer şekilde, 3-B alt-sistem için çıkış bir matris denklemi olarak yazılabilir.

$$\mathbf{v}_e^{(3,3)}(q_1, q_2; n) = \mathbf{U}_e^{(3)} \mathbf{h}^{(3)}(q_1, q_2; n - q_1 - q_2) \quad (39)$$

$$q_1 = 1, \dots, N-1, \quad q_2 = 1, \dots, N - q_1,$$

$$n = q_1 + q_2, q_1 + q_2 + 1, \dots, N$$

$\mathbf{U}_e^{(3)}$  matrisi  $\binom{M}{3} \times \binom{M}{3}$  boyutlarındadır. (18) ve

(32)'ye benzer şekilde bu matris giriş genlik değerleri cinsinden yazılabilir.

$$\mathbf{U}_e^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(3)T}(1, 2, 3) \\ \mathbf{u}^{(3)T}(1, 2, 4) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(3)T}(M-2, M-1, M) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{u}^{(3)T}(i, j, k) = [\mathbf{u}_3^{(3)}(i, j, k) : \dots : \mathbf{u}_M^{(3)T}(i, j, k)] \quad (41)$$

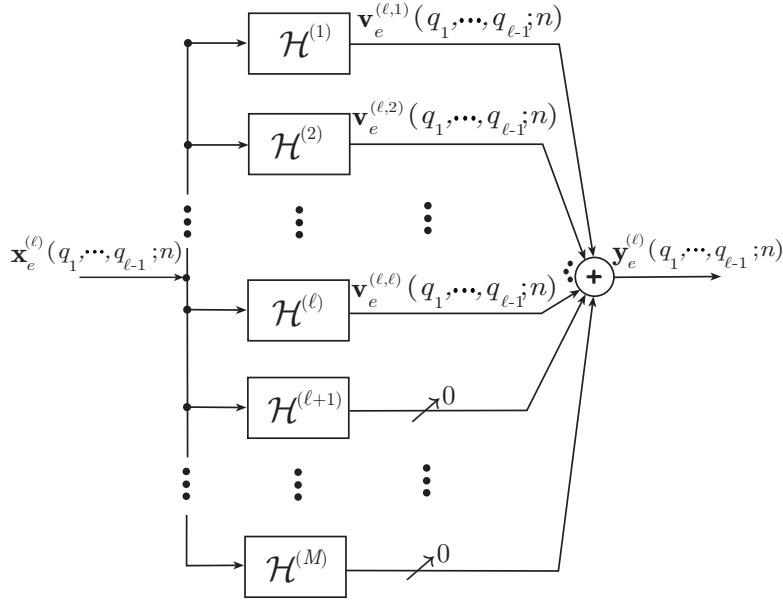
$$u_3^{(3)}(i, j, k) = [a_i a_j a_k]_{1 \times \binom{2}{2}} \quad (42)$$

$$\mathbf{u}_4^{(3)T}(i, j, k) = [a_i a_j a_k^2 \quad a_i a_j^2 a_k \quad a_i^2 a_j a_k]_{1 \times \binom{3}{2}} \quad (42)$$

$$\mathbf{u}_5^{(3)T}(i, j, k) = [a_i a_j a_k^3 \quad a_i a_j^2 a_k^2 \quad \dots \quad a_i^3 a_j a_k]_{1 \times \binom{4}{2}} \quad (42)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_M^{(3)T}(i, j, k) = [a_i a_j a_k^{M-2} \quad a_i a_j^2 a_k^{M-3} \quad \dots \quad a_i^{M-2} a_j a_k]_{1 \times \binom{M-1}{2}} \quad (42)$$



Şekil 7. (45) için grafiksel gösterilim (Doğrusal olmayan N sisteminin  $\ell$  impulstan oluşan giriş dizileri için çıkışı, ilk  $\ell$  tane alt-sistemin çıkışları toplamına eşit olmaktadır.)

Örnek olarak  $M = 4$  ve  $\ell = 3$  için  $\mathbf{U}_e^{(3)}$  matrisi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\mathbf{U}_e^{(3)} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_3^2 & a_1 a_2^2 a_3 & a_1^2 a_2 a_3 \\ a_1 a_2 a_4 & a_1 a_2 a_4^2 & a_1 a_2^2 a_4 & a_1^2 a_2 a_4 \\ a_1 a_3 a_4 & a_1 a_3 a_4^2 & a_1 a_3^2 a_4 & a_1^2 a_3 a_4 \\ a_2 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_4^2 & a_2 a_3^2 a_4 & a_2^2 a_3 a_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

(39) denklemlerinden 3-B çekirdek vektörlerinin tanılanması için kullanılacak olan ilişkiyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(3)}(q_1, q_2; n - q_1 - q_2) &= [\mathbf{U}_e^{(3)}]^{-1} \mathbf{v}_e^{(3,3)}(q_1, q_2; n) \\ &= [\mathbf{U}_e^{(3)}]^{-1} \left[ \mathbf{y}_e^{(3)}(q_1, q_2; n) - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{S}_{31,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n - n_j^{(3,1)}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \mathbf{S}_{32,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(2,2)}(q_j^{(3,2)}, n - n_j^{(3,2)}) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

### $\ell$ -B çekirdek vektörlerinin tanılanması

Daha ufak boyutlu çekirdek vektörlerini tanılamak için kullandığımız çıkış işaretlerinin  $\mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_1, \dots, q_{k-1}; n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$  elimizde ol-

duğunu varsayıyoruz. Bu bölümde  $\ell$ -B çekirdek vektörlerini tanılamak için  $\ell$  tane impulstan oluşan giriş işaretleri ve geçmiş çıkış işaretlerini ( $\mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_1, \dots, q_{k-1}; n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$ ) kullanacağız.  $\ell$  tane impulstan oluşan giriş işaretlerinin kümesini aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.

$$\mathbf{x}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{T}_{\ell,i}^{(M)} \mathbf{x}_e^{(1)}(n - n_i^{(\ell)}) \quad (44)$$

$$n_1^{(\ell)} = 0, \quad n_i^{(\ell)} = \sum_{j=1}^{i-1} q_{\ell-j}, \quad i = 2, \dots, \ell$$

Bu giriş dizileri için doğrusal olmayan sistemin yanıtı alt-sistemlerin yanıtları toplamı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) &= N \left[ \mathbf{x}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} H^{(k)} \left[ \mathbf{x}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \right] \quad (45) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{v}_e^{(\ell,k)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \end{aligned}$$

Şekil 7,  $\ell$  tane impulstan oluşan giriş dizileri için  $\ell$ -B'den daha yüksek boyutlu alt-sistemlerin ( $H^{(k)}$ ,  $k > \ell$ ) çıkışlarının sıfır olduğunu göstermektedir.

(45)'de kullanılan  $\mathbf{v}_e^{(\ell,k)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n)$  ( $k = 1, \dots, \ell - 1$ ) çıkış işaretleri, geçmiş çıkış işaretlerinden elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e^{(\ell,1)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) &= \sum_{j=1}^{\binom{\ell}{1}} \mathbf{S}_{\ell,1,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n - n_j^{(\ell,1)}) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_e^{(\ell,k)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) &= \\ &\sum_{j=1}^{\binom{\ell}{k}} \mathbf{S}_{\ell,1,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_{j,1}^{(\ell,k)}, \dots, q_{j,k-1}^{(\ell,k)}; n - n_j^{(\ell,k)}) \end{aligned} \quad (46)$$

Burada kullanılan  $q_{j,i}^{(\ell,k)}$  ve  $n_j^{(\ell,k)}$  parametreleri için giriş kümesi oluşturma matrisleri kullanılarak kapalı form denklemler bulunabilmektedir.

$\ell$ -B alt-sistemin çıkışı şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e^{(\ell,\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) &= \mathbf{H}^{(\ell)}[\mathbf{x}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n)] \\ &= \sum_{i=0}^{N-\bar{q}_{\ell-1}} \mathbf{U}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n-i) \mathbf{h}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; i) \end{aligned} \quad (47)$$

1,2 ve 3-B alt-sistemlerin tanılanmasında olduğu gibi  $\mathbf{U}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n-i)$  terimi  $\mathbf{U}_e^{(\ell)} \delta(n - \bar{q}_{\ell-1} - i)$  terimiyle yer değiştirebilir.  $\mathbf{U}_e^{(\ell)}$  matrisi  $\binom{M}{\ell} \times \binom{M}{\ell}$  boyutlarındadır ve genlik değerleri  $(a_1, a_2, \dots, a_M)$  cinsinden yazılabilmektedir. Örnek olarak  $M = 5$  ve  $\ell = 4$  için  $\mathbf{U}_e^{(4)}$  matrisi şu şekilde olacaktır:

$$\mathbf{U}_e^{(4)} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 & a_1 a_2 a_3 a_4^2 & a_1 a_2 a_3^2 a_4 & a_1 a_2^2 a_3 a_4 & a_1^2 a_2 a_3 a_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_5 & a_1 a_2 a_3 a_5^2 & a_1 a_2 a_3^2 a_5 & a_1 a_2^2 a_3 a_5 & a_1^2 a_2 a_3 a_5 \\ a_1 a_2 a_4 a_5 & a_1 a_2 a_4 a_5^2 & a_1 a_2 a_4^2 a_5 & a_1 a_2^2 a_4 a_5 & a_1^2 a_2 a_4 a_5 \\ a_1 a_3 a_4 a_5 & a_1 a_3 a_4 a_5^2 & a_1 a_3 a_4^2 a_5 & a_1 a_3^2 a_4 a_5 & a_1^2 a_3 a_4 a_5 \\ a_2 a_3 a_4 a_5 & a_2 a_3 a_4 a_5^2 & a_2 a_3 a_4^2 a_5 & a_2 a_3^2 a_4 a_5 & a_2^2 a_3 a_4 a_5 \end{bmatrix}$$

$\ell$ -B Volterra vektörleri  $n = \bar{q}_{\ell-1}, \bar{q}_{\ell-1} + 1, \dots, N$  için şu şekilde hesaplanabilirler:

$$\mathbf{h}^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n - \bar{q}_{\ell-1}) = [\mathbf{U}_e^{(\ell)}]^{-1} \mathbf{v}_e^{(\ell,\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) \quad (48)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e^{(\ell,\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) &= \mathbf{y}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) - \\ &\sum_{j=1}^{\binom{\ell}{1}} \mathbf{S}_{\ell,1,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(1,1)}(n - n_j^{(\ell,1)}) \\ &- \sum_{k=2}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{\binom{\ell}{k}} \mathbf{S}_{\ell,k,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_{j,1}^{(\ell,k)}, \dots, q_{j,k-1}^{(\ell,k)}; n - n_j^{(\ell,k)}) \end{aligned} \quad (49)$$

olarak bulunur.  $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$  için bir dizi yeni operatör tanımlayarak bu ifadeyi basitleştirebiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\ell,k}^{(M)}[\mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_1, \dots, q_{k-1}; n)] &= \\ &\sum_{j=1}^{\binom{\ell}{k}} \mathbf{S}_{\ell,k,j}^{(M)} \mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_{j,1}^{(\ell,k)}, \dots, q_{j,k-1}^{(\ell,k)}; n - n_j^{(\ell,k)}) \end{aligned} \quad (50)$$

Bu operatörleri kullanarak (49) ifadesini yeniden yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e^{(\ell,\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) &= \mathbf{y}_e^{(\ell)}(q_1, \dots, q_{\ell-1}; n) - \\ &\sum_{k=1}^{\ell-1} \mathbf{S}_{\ell,k}^{(M)}[\mathbf{v}_e^{(k,k)}(q_1, \dots, q_{k-1}; n)] \end{aligned} \quad (51)$$

## Bilgisayar benzetimleri

Volterra süzgeci tanılama için literatürde farklı yöntemler önerilmiştir. Bunlar arasında rasgele işaretler ve giriş-çıkış karşı-ilişkileri kullanarak tanılama yöntemleri (Koukoulas ve Kalouptsidis 1995), sözde rasgele giriş işaretleri kullanımı (Nowak ve Van Veen 1994) ve PSK (phase shift keying-faz kaydırmalı anahtarlamalı) giriş işaretlerinin kullanımı (Cheng ve Powers, 2001; Zhou ve Giannakis, 1997) yer almaktadır. Zhou ve Giannakis (1997)'de yer alan 2. örneği temel alarak 4. dereceden ve  $N = 3$  bir Volterra süzgeci için benzetim gerçekleştirilmiştir. Ortalama giriş işareti gücü 4 ve gözlem gürültüsü gücü 0.5 olmuştur. Tablo 1 sistemin sıfırdan farklı olan çekirdekleri için gerçek değerleri göstermektedir. Ayrıca, Zhou ve Giannakis (1997)'de verilen yöntem ve burada önerilen yöntemin her ikisi için 1000 bağımsız denemeyle elde edilen çekirdek kestirimlerinin standart sapma ve ortalamaları verilmektedir. Bizim sonuçlarımız

Tablo 1. Benzetim sonuçları

$(i_1, i_2, i_3, i_4)$	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 1, 1)	(0, 0, 1, 2)	(0, 1, 2, 3)
gerçek $b_4(i_1, i_2, i_3, i_4)$	1.0000	4.8000	4.8000	-6.0000	14.4000
PSK giriş için $\hat{b}_4(i_1, i_2, i_3, i_4)$ ortalama	0.9944	4.7927	4.8006	-6.0084	14.3892
PSK giriş için $\hat{b}_4(i_1, i_2, i_3, i_4)$ standart sapma	0.2013	0.1940	0.1745	0.1766	0.1004
önerilen giriş için $\hat{b}_4(i_1, i_2, i_3, i_4)$ ortalama	1.0002	4.7999	4.8000	-6.0003	14.4001
önerilen giriş için $\hat{b}_4(i_1, i_2, i_3, i_4)$ standart sapma	0.0024	0.0042	0.0021	0.0038	0.0069

Zhou ve Giannakis (1997)'de elde edilen sonuçlardan daha iyi çıkmakta ve yüksek dereceli doğrusalsızlık ve gürültüye rağmen yöntem yüksek doğruluklu kestirimlere ulaşmaktadır.

Zhou ve Giannakis (1997)'de yer alan PSK yöntemi ve literatürde yer alan pek çok diğer yöntem yüksek dereceden moment kestirimlerini kullanmaktadır. Bu, gürültüsüz durumda dahi kestirim hataları getirmektedir. Önerilen yöntem kesin bir yöntem olduğu için gürültü olmadığına kısa giriş dizileri için tam değerleri bulabilmektedir.

## Sonuçlar

Doğrusal olmayan sistem tanılama için yeni bir yöntem önerdik. Algoritmamızda giriş olarak gerekirci çok-katlı giriş dizileri ve Volterra çekirdekleri için yeni bir ayrıştırma kullanılmaktadır. Algoritmamız kapalı biçimdedir, kesindir ve özyinelemesizdir. Benzetimlerle bu yöntemin daha önce önerilen bazı yöntemlerden (Zhou ve Giannakis, 1997) daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Kısa veri tutanağı için sistem katsayılarının doğru kestirimlerini sağlayan bu yöntem, doğrusal olmayan sistem tersi gerçekleşmesi ve dengeleme problemlerinde uygulanabilir.

## Kaynaklar

- Benedetto, S. ve Biglieri, E., (1983). Nonlinear equalization of digital satellite channels, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **1**, 57-62.
- Biglieri, E., Barberis, S. ve Catena, M., (1988). Analysis and compensation of nonlinearities in digital transmission systems, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **1**, 42-51.

- Billings, S. A., (1980). Identification of nonlinear systems – a survey, *IEE Proceedings*, **8**, 272-285.
- Cheng, C. ve Powers, E. J., (2001). Optimal Volterra kernel estimation algorithms for a nonlinear communication system for PSK and QAM inputs, *IEEE Trans. Signal Processing*, **12**, 147-163.
- Koukoulas, P. ve Kalouptsidis, N., (1995). Nonlinear system identification using Gaussian inputs, *IEEE Trans. Signal Processing*, **8**, 1831-1841.
- Mathews, V. J. ve Sicuranza, G. L., 2000. *Polynomial Signal Processing*, John Wiley & Sons.
- Nowak, R. ve Van Veen, B., (1994). Random and pseudorandom inputs for Volterra filter identification, *IEEE Trans. Signal Processing*, **8**, 2124-2135.
- Özden, M. T., Kayran, A. H. ve Panayırıcı, E., (1996). Satellite channel identification with lattice orthogonalisation, *Electronics Letters*, **4**, 302-304.
- Raz, G. ve Van Veen, B., (1998). Baseband Volterra filters for implementing carrier based nonlinearities, *IEEE Trans. Signal Processing*, **1**, 103-114.
- Sandberg, I. W., (1992). Uniform approximation with doubly finite Volterra series, *IEEE Trans. Signal Processing*, **40**, 1438-1442.
- Schetzen, M., (1965). Measurement of the kernels of a non-linear system of finite order, *International Journal of Control*, **3**, 251-263.
- Schetzen, M., (1989). *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, New York: Wiley, 1980. Reprint edition with additional published by Robert E. Krieger Co., Malabar, Florida.
- Wiener, N., (1958). *Nonlinear Problems in Random Theory*, M.I.T. Press.
- Zhou, G. ve Giannakis, G., (1997). Nonlinear channel identification and performance analysis with PSK inputs, *Proc. 1st IEEE Sig. Proc. Workshop on Wireless Comm.*, 337-340, Paris, Fransa.