

Değişen hücre yönlü kapalı formülasyon yöntemi

Ali Ruhşen ÇETE*, Adil YÜKSELEN

İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uçak Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, "Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon – DAHYKF" adlı kısmi dşferansiyel denklem çözen yeni bir sayısal yöntem geliştirilmiştir. Yöntemde "Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon – DYKF (Alternating Direction Implicit - ADI) yöntemindeki değişen yönler kavramından ilham alınmıştır. Fakat yeni yöntemdeki değişen yön DYKF 'de olduğu gibi eğrisel koordinat değil, "Ardışık Hücre Yönleri"dir. Ardışık Hücre Yönleri dörtgen elemanların karşılıklı kenarlarını takip ederek oluşan ardışık yönlerdir. DAHYKF yöntemi ile daire etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle, klasik DYKF yöntemi sonuçlarıyla ve Runge-Kutta zaman integrasyonu kullanan bir Sonlu Hacimler yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar yöntemin yapısal ve yapısal olmayan çözüm ağlarında aynı yüksek performansı gösterdiği ve bunun yanında kullanımının kolay olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu farklar metodu, sonlu hacimler metodu, değişen yönlü kapalı formülasyon yöntemi, değişen ardışık hücre yönlü kapalı formülasyon yöntemi.

Alternating cell directions implicit method

Abstract

In this study, a new numerical method named as "Alternating Cell Directions Implicit – ACDI" for solving partial differential equations is developed. In this study, testing of this method is targeted, since the method is being newly developed. Therefore, the method is applied on two-dimensional problems, and the incompressible potential flow is considered as an example test problem. Application of the method for three-dimensional cases is possible. This method is inspired by alternating directions concept of "Alternating Directions Implicit - ADI) method. In the new method, alternating direction is not curvilinear coordinate like as in the ADI method, but this is "Sequential Cell Directions". Cell direction is formed by following from one edge to its opposite edge on quadrilateral. Sequential directions means a chain of directions formed by sequantial cells. In this study, a cell centered finite volume variation of potential ACDI methods is presented. The solutions obtained by the ACDI method for the incompressible potential flow around a circular cylinder is compared with the analytical solutions, with the results of the classical ADI method and a finite volume method using Runge-Kutta time integration. The results show that this method has the same high performance on structured and unstructured grids, and its usage is easy.

Keywords: Finite difference method, finite volume method, alternating directions method, alternating cell directions implicit method.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Ali Ruhşen ÇETE. rcete@tai.com.tr; Tel: (312) 210 18 57.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Değişen ardışık hücre yönlü, kapalı formülasyonlu yöntem" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 17.12.2004 tarihinde dergiye ulaşmış, 25.02.2005 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Hızla gelişen Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği alanında hayli geniş bir yelpazede çözüm algoritmaları ve çözüm ağı yapıları vardır (Henne, 1990, Jameson, 2003). Bu çeşitliliğe karşılık bir problemin hangi tip çözüm ağı ve hangi algoritmayla çözülmesinin daha uygun olacağı çoğu zaman tartışma konusu olmaktadır. Zira söz konusu yöntemlerin her birinin bir diğerine kıyasla olumlu ve olumsuz yanları vardır. Tartışılan ana hususlar

- Çözüm algoritması: Kapalı-Açık (Implicit-Explicit)
- Çözüm ağı yapısı: Yapısal Yapısal olmayan (structured-unstructured)

şeklinde sınıflandırılabilir. Bu iki grup birbirleri arasında da eşleşebilmektedir. Örneğin, yapısal çözüm ağı kullanan yöntemler çoğunlukla kapalı formülasyonludur (Beam ve Warming, 1982). Buna karşılık yapısal olmayan çözüm ağı kullanan yöntemler de çoğunlukla açık formülasyonlu yapıdadır (Caughey ve Hafez, 1994). Yapısal olmayan ağlarla kapalı formülasyon kullanmak oldukça zordur. Yapısal çözüm ağı kullanan kapalı formülasyonlu yöntemler daha karardır (çoğunlukla şartsız karardır). Daha hassas sonuç verirler ve daha az adımda yakınsarlar. Fakat yapısal çözüm ağı üretmek oldukça zordur ve tam kapalı formülasyon kullanılmışsa çözüm zamanı uzar. Değişen Yönlü Kapalı Formülasyon-DYKF (Alternating Direction Implicit Method-ADI) yöntemi (Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson vd., 1984) gibi kapalı bir formülasyon kullanılırsa çözüm zamanı tam kapalı formülasyonlara göre daha kısa olur. DYKF yöntemi her çözüm adımı için her ne kadar açık formülasyonlardan daha uzun çözüm zamanı gerektirse de daha çabuk yakınsama özelliği nedeniyle toplam olarak genellikle açık formülasyonlu algoritmalarından daha hızlı sonuç vermektedir. Hayli önemli olan tek olumsuz yanı ise, yapısal ağ üretiminin çok zor ve zaman alıcı olmasıdır.

Bu çalışmada amaç çözüm algoritmalarının ve ağ yapılarının olumlu yanlarını birleştirmeye çalışmak, yani yapısal ve yapısal olmayan çözüm ağlarını kullanabilen, hızlı kapalı formülasyon kullanan yeni bir sayısal çözüm algoritması geliştirmektir. Bu amaçla çalışmada

“Değişen Ardışık Hücre Yönlü Kapalı Formülasyon-DAHVKF” olarak adlandırılan yeni bir sayısal yöntem önerilmiş olup, bilgisayar için programlanan bu yöntemin etkinliği çalışma kapsamında test edilmiştir. Yöntemdeki “değişen yön” kavramı klasik DYKF yönteminden esinlenmiştir. Kolaylık düşüncesi ile yöntem şimdilik sadece iki-boyutlu halde uygulanmıştır. Ancak 3-boyutlu uygulamalar da mümkündür.

Çalışmadaki test amaçlı uygulamalar için sıkıştırılmaz potansiyel akım problemi ele alınmıştır ve bu problemi modelleyen Laplace denkleminin sayısal çözümü üzerinde durulmuştur. Bu modelin seçilmesinin ana nedeni, özellikle akışkan akımlarıyla ilgili bir çok problem için Laplace denkleminin çok sayıda araştırmacı tarafından incelenmiş olması ve bu bakımdan bir çok çözüm tekniğinin iyi bilinmesi ve bundan daha da önemlisi bir çok halde analitik çözümlerinin elde edilebiliyor olmasıdır.

Sıkıştırılmaz potansiyel problemi her ne kadar potansiyel veya akım fonksiyonu için yazılmış Laplace denklemi ile temsil ediliyor ise de gerek bu çalışmada önerilen DAHVVF yöntemi ve gerekse ilham alınan DYKF yöntemi zamanda ilerleyen (time-marching) tipte birer sayısal yöntem olduğu için, Laplace denklemi yerine, buna benzeyen ancak ilaveten zamana göre bir türev içeren ve literatürde “Zamana Bağlı Difüzyon Denklemi” veya “Zamana Bağlı Isı Denklemi” olarak tanınan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

denkleminin kullanımı daha uygun bulunmuştur. Zira bu denklem zaman değişkeninin çok büyük değerleri için Laplace denkleminin çözümüne yakınsayacaktır. Bir çok araştırmacı da benzer nedenlerle bu denklem üzerinde değişik sayısal yöntemleri uygulamışlardır (Douglas ve Rachford, 1956; Douglas, 1955).

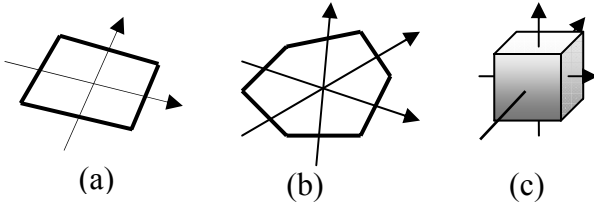
Değişen ardışık hücre yönlü kapalı formülasyon-dahvkf yöntemi

Bu yöntem DYKF yönteminde olduğu gibi değişen yönlerde kapalı formülasyonlar kullan-

maktadır. Fakat DAHYKF yöntemindeki değişen yönler DYKF yöntemindekinden farklıdır. Yöntemin orijinal bir yanı da budur.

Ardışık hücre yönleri kavramı

Çift sayıda kenarlara (veya üç-boyutlu halde yüzeylere) sahip hücrelerde (Şekil 1) karşılıklı kenarlardan (ya da yüzlerden) geçen yönler tanımlamak mümkündür. Bu yönlere, bu çalışmada “Hücre Yönleri” (Cell Directions) denilmektedir. Sayısal yöntemlerde hücreler üzerinde interpolasyon, dönüşüm ve benzeri bir çok matematiksel uygulama aslında bu yönleri kullanmaktadır.



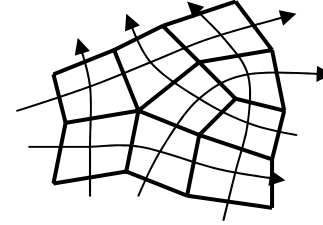
Şekil 1. Hücre yönleri: (a) dörtgen hücre (b) altıgen hücre, (c) dikdörtgen prizması şeklinde hücre

Bu tip hücelere sahip bir ağ yapısında birbirini izleyen hücrelerin yönlerini birleştirerek Şekil 2’de görüldüğü gibi “ardışık hücre yönleri” (Sequential Cell Directions) elde etmek mümkündür. Sayısal bir çözüm söz konusu olduğunda “Ardışık Hücre Yönleri” çözüm bandı olarak da anılabilir.

Tek bloklu yapısal ağlarda Ardışık Hücre Yönleri doğal olarak eğrisel koordinatlarla aynı olacaktır. Yapısal olmayan ağlarda ise bu yolla bir yön yapısı oluşturmak ve bu yapıdan yararlanarak DYKF benzeri çözüm yöntemleri uygulamak mümkündür. DAHYKF yöntemi ardışık hücre yönlerinde kapalı formülasyon uygulamak suretiyle üç diyagonal katsayılar matrisine sahip denklem sistemleri oluşturup bunları çözerek işlemektedir. Klasik DYKF yönteminde olduğu gibi zamanda yarım adım ilerlerken bu yönler değiştirilmektedir.

Değişen ardışık hücre yönleri kavramını kullanarak kapalı formülasyon uygulayan birçok yöntem önermek mümkündür. Bu yöntemler

kullandıkları ayrıklaştırma tekniğine göre ve çözüm noktası olarak hücrenin hangi noktalarının alındığına bağlı olarak çeşitlilik gösterecektir. Yapılan incelemeler sonucu bu çalışmada hücre merkezli, sonlu hacim ayrıklaştırması kullanılan bir DAHYKF yönteminin uygun olacağı değerlendirilmiştir.



Şekil 2. Dörtgen elemanlı yapısal olmayan bir çözüm ağında ardışık hücre yönleri

Hücre merkezi esaslı, sonlu hacim ayrıklaştırmalı DAHYKF yöntemi

DAHYKF yöntemindeki sonlu hacim ayrıklaştırmaları için çok yaygın olarak bilinen bir hücre merkezli formülasyon kullanılmıştır (Swanson ve Turkel, 1997). Şekil 3’te hücre merkezli bir ayrıklaştırma için genel olarak kullanılan hücre noktaları şematik olarak gösterilmektedir.

Bu ayrıklaştırmanın açık formülasyonlu bir uygulaması da geliştirilen DAHYKF yönteminin karşılaştırılacağı yöntemlerinden birisi olarak düşünülmüştür. Açık formülasyonlu zaman integrasyonu için en yaygın olan çözüm yöntemi ise Runge-Kutta tekniğidir (Jameson, 1997; Swanson ve Turkel, 1997).

Sonlu hacimler, integral formda uygulanan bir teknik olup, buna göre (1) denklemi hücre alanı üzerinde integre edilirse zamana bağlı difüzyon denkleminin integral formu:

$$\int_A \frac{\partial u}{\partial t} dA = \int_A \nabla^2 u dA = \int_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA \quad (2)$$

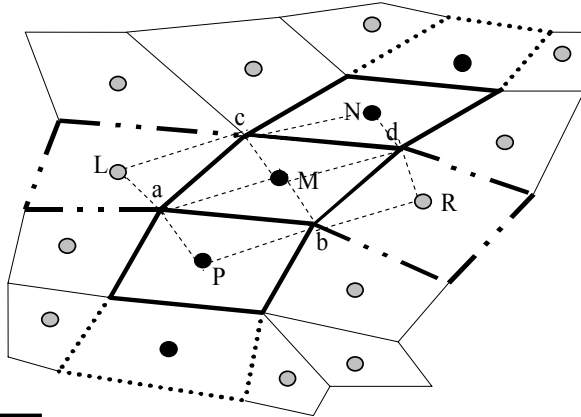
olarak elde edilir. Soldaki zamana göre türev integral dışına alınır ve ayrıca denklemin sağ tarafındaki integralin mertebesi Green teoremi uygulanarak düşürülürse:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A u dA = \int_A \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds \quad (3)$$

bulunur. Şekil 3'teki M merkezli hücre için C sınırı $abcd$ dörtgenidir. Buna göre (3) eşitliği:

$$A_{abcd} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \int_{abcd} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{abcd} \frac{\partial u}{\partial y} dx \quad (4)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada $\bar{u} = \int_{abcd} u dA$ dır.



- Bilinmeyen hücreler
- Değerleri bilinen olarak kullanılacak hücreler (açık formülasyonla)
- Çözüm dalının diğer denklemlerinde bilinmeyen olacak hücreler
- M noktasından geçen çözüm bandında kullanılmayan hücreler
- Kenarlarda akı değerlerinin eldesi için alınacak integral alanın çeperleri

Şekil 3. Hücre merkezi esaslı, sonlu hacim ayrıklaştırması için integral bölgeleri

Eşitliğin sağ tarafında değişkenlerin uzay eksenlerine göre türevlerinin (akı) hesabı söz konusu olup, $abcd$ dörtgeninin kenarları üzerinde bu integrallerin ayrı ayrı alınması gerekmektedir. Sonlu hacimler yönteminde türev hesaplamaları sonlu fark yönteminde olduğu gibi değil, ama yine integraller yardımıyla yapılmaktadır. Yani alan (veya üç-boyutlu halde hacim) üzerinde integrale ortalama değerler hesaplanmaktadır. Bu nedenle akı integrallerinin de yine alan integraline, yani alanda ortalama hesabına dönüştürülmesi gerekmektedir.

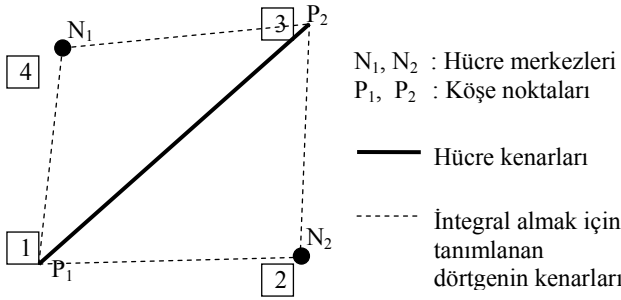
Şekil 3'te kenarlar üzerindeki akı integrallerini hesaplamak için tanımlanmış bölgeler görülmektedir. Bu integral bölgeleri hücrenin merkezi bir köşe, komşu hücrenin merkezi karşı köşe ve iki hücrenin ortak kenarının uçları da diğer köşeleri oluşturmak üzere bir dörtgenden oluşmaktadır. Bu alanlar sayesinde komşu noktaların değerleri de ilişkilendirilerek korunum yasaları daha iyi sağlanmaktadır. Örneğin, ab kenarı üzerindeki akı integrallerini hesaplamak için $MaPb$ dörtgeni kullanılmaktadır. Bu hesabı formüle etmek için öncelikle $MaPb$ dörtgeni üzerinde akı hesaplarının yapılması gerekir. Akının bu dörtgen üzerindeki integrali alan integralinden eğri integraline dönüştürülürse:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{ab} \cdot A_{MaPb} &= \int_{A_{MaPb}} \frac{\partial u}{\partial x} dA = \int_{MaPb} u \frac{\partial x}{\partial n} ds \\ &= \int_{MaPb} u \frac{\partial y}{\partial s} ds = \int_{MaPb} u \cdot dy \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{ab} \cdot A_{MaPb} &= \int_{A_{MaPb}} \frac{\partial u}{\partial y} dA = \int_{MaPb} u \frac{\partial y}{\partial n} ds \\ &= - \int_{MaPb} u \frac{\partial x}{\partial s} ds = - \int_{MaPb} u \cdot dx \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde akı değerlerinin bu alanlardaki ortalama değerleri elde edilir. Yukarıdaki integraller trapez kuralı ile hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_{ab} &= \frac{1}{A_{MaPb}} \left[\frac{(u_M + u_a)}{2} \Delta y_{Ma} + \frac{(u_a + u_p)}{2} \Delta y_{aP} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u_p + u_b)}{2} \Delta y_{pB} + \frac{(u_b + u_M)}{2} \Delta y_{bM} \right] \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{ab} &= \frac{-1}{A_{MaPb}} \left[\frac{(u_M + u_a)}{2} \Delta x_{Ma} + \frac{(u_a + u_p)}{2} \Delta x_{aP} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u_p + u_b)}{2} \Delta x_{pB} + \frac{(u_b + u_M)}{2} \Delta x_{bM} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

ifadeleri bulunur. Makalenin devamında ortalama değerler üst çizgili verilmeyecektir. Uzun karmaşık denklemlerle uğraşmamak için ve programlama kolaylığı açısından denklemleri sistematik bir biçimde küçük parçalara bölerek genel bir formda yazmak uygun olur. Bu genel form için kenar temelli bir formülasyon en uygun yapıyı oluşturacaktır. Şekil 4'te böyle bir yapının elemanları görülmektedir.



Şekil 4. Genel formda kenar temelli formülasyon için oluşturulmuş yapı

Bu yapıya göre P_1P_2 kenarındaki akı integrali:

$$I_{PP_2} = \int_{PP_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{PP_2} \frac{\partial u}{\partial y} dx = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{PP_2} \Delta y_{PP_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{PP_2} \Delta x_{PP_2} \quad (7)$$

şeklinde yazılabilir. (6) denklemindeki akı diferansiyel açılımı da yeni formata göre düzenlenerek

$$I_{P_1P_2} = L_{N_1} u_{N_1} + L_{N_2} u_{N_2} + L_{P_1} u_{P_1} + L_{P_2} u_{P_2} \quad (7a)$$

elde edilir. Buradaki L büyüklükleri ağ geometrisine bağlı integral çarpanları olup her hücre için sabit değere sahiptir. Önceden hesaplanıp saklanabildiklerinden işlemler hızlanmaktadır. L çarpanları (7) denkleminde:

$$\begin{aligned} L_{N_1} &= \frac{(\Delta y_{PP_2} \Delta y_{P_2N_1} + \Delta y_{PP_2} \Delta y_{N_1P_1} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{N_1P_1} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{P_2N_1})}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \\ L_{N_2} &= \frac{(\Delta y_{PP_2} \Delta y_{P_1N_2} + \Delta y_{PP_2} \Delta y_{N_2P_2} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{N_2P_2} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{P_1N_2})}{2A_{P_1N_2P_2N_2}} \\ L_{P_1} &= \frac{(\Delta y_{PP_2} \Delta y_{P_1N_2} + \Delta y_{PP_2} \Delta y_{N_1P_1} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{N_1P_1} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{P_1N_2})}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \\ L_{P_2} &= \frac{(\Delta y_{PP_2} \Delta y_{P_2N_1} + \Delta y_{PP_2} \Delta y_{N_2P_2} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{N_2P_2} + \Delta x_{PP_2} \Delta x_{P_2N_1})}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \end{aligned} \quad (8)$$

şeklinde hesaplanabilir.

(8) ifadelerinde, görüldüğü gibi köşe noktaları da kullanılmaktadır. Buna göre her çözüm adımında köşe noktalarının değerleri interpolasyon ile yenilenmelidir. İnterpolasyon yöntemi olarak ortalama almak yeterlidir. Programlamanın her hücre için çevrim yapısı, öncelikle kenarlar için

bir çevrim ve her kenar çevriminde bu kenarı çevreleyen integrasyon dörtgenin noktalarında bir iç çevrimden oluşmaktadır (Şekil 4.). Bahsedilen kenarlara ait dörtgenin köşelerini dönen çevrim için (8) denklemi düzenlenirse:

$$I_{K,P_1P_2} = \sum_{N=1}^4 L_{K,N} \cdot u_N = \sum_{N=1}^4 I_{K,N} \quad (9)$$

elde edilir. Burada K indeksi hücrelerin kenar numaralarını N , Şekil 4 ‘deki integrasyon dörtgenin köşelerini ve $I_{K,N}$ ise K kenarının integrasyon dörtgenin N numaralı köşesinin integral terimini belirtmektedir. Yöntemin zaman integrasyonu için, temel karşılaştırma yöntemi olan DYKF ile aynı olmasının doğru olacağı düşüncesiyle ileri farklar tekniği kullanılmıştır. (4) Denkleminin sol tarafındaki zaman türevi de ileri farklarla ayrıştırılırsa:

$$A_{abcd} \frac{(u_M - u_{old,M})}{\Delta t} = \sum_{K=1}^4 I_{K,P_1P_2} = \sum_{K=1}^4 \sum_{N=1}^4 L_{K,N} \cdot u_N \quad (10)$$

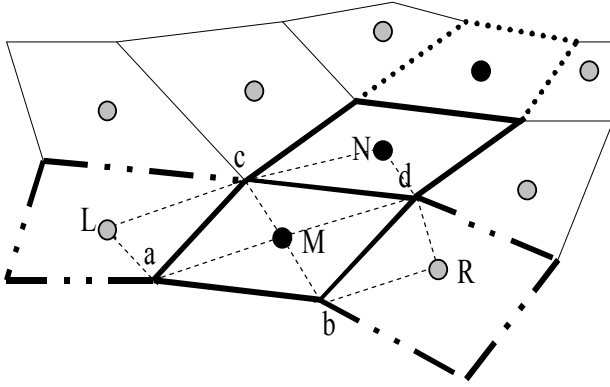
elde edilir.

Sınır şartları

Bu çalışmadaki test problemlerinde Dirichlet tipi sınır şartı uygulanmış olup, Şekil 5 deki M merkezli sınır hücresinin sınırı üzerindeki şartlar $u_a=c_1$, $u_b=c_2$ şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 büyüklükleri sabitler olup, uygulamalarda bu değerler analitik çözümlerden elde edilerek kullanılmıştır. Sınır şartının uygulanmasında ab doğrusu üzerinde akı değerlerinin integrasyonu gerekmektedir. Bu integrasyon Şekil 5’teki aMb üçgen alanında yapılmaktadır. İntegrasyon alanı değiştiği için integrasyon çarpanları da değişecektir. Nitekim (8) bağıntılarındaki integrasyon çarpanları bu üçgen alan için:

$$\begin{aligned} L_{P_1} &= \frac{(\Delta y_{P_1P_2}^2 + \Delta y_{P_1P_2} \Delta y_{N_1P_1} + \Delta x_{P_1P_2}^2 + \Delta x_{P_1P_2} \Delta x_{N_1P_1})}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \\ L_{P_2} &= \frac{(\Delta y_{P_1P_2}^2 + \Delta y_{P_1P_2} \Delta y_{P_2N_1} + \Delta x_{P_1P_2}^2 + \Delta x_{P_1P_2} \Delta x_{P_2N_1})}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \\ L_{N_1} &= \frac{(\Delta y_{P_1P_2} \Delta y_{P_2N_1} + \Delta y_{P_1P_2} \Delta y_{N_1P_1} + \Delta x_{P_1P_2} \Delta x_{N_1P_1} + \Delta x_{P_1P_2} \Delta x_{P_2N_1})}{2A_{P_1N_1P_2N_2}} \end{aligned} \quad (11)$$

şeklinde elde edilebilir.



Şekil 5. Dirichlet sınır şartında kenar akı değerlerini hesabi için integral bölgeleri

DAHVKF yöntemi daha önce de ifade edildiği gibi ardışık hücre yönlerini esas alan bir çözüm algoritmasına sahiptir. Bu bakımdan formülasyonda sadece denklemin yazıldığı hücre üzerindeki değerler değil, aynı yöndeki komşu hücrelere ait değerler de bilinmeyen olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlama öyle yapılmaktadır ki her denklemde üç bilinmeyen yer almakta ve ardışık olarak yazılan denklemlerde bilinmeyenler de ardışık olarak bulunmaktadır. Böylece her çözüm bandında yazılan denklemlerin oluşturduğu lineer denklem takımının katsayılar matrisi üç-diyagonalidir. Bunu sağlayan, çözüm bantlarının “hücre yönleri”nde olmasıdır. Çözüm bantları her hücreden sadece iki kez geçecek ve böylece her hücre, her iki yönünde, DYKF yönteminde olduğu gibi ayrı ayrı kapalı formülasyonla hesaplanmış olacaktır. Genel formda yazılmış olan (9) denklemindeki $I_{K,N}$ büyüklüğünün, çeşitli durumlar için bilinen ve bilinmeyenler olarak tanımlamaları aşağıda verilmiştir. Eğer N noktası kenar noktaları ise (P_1, P_2)

$$I_N = L_N u_{old,N} \quad (12a)$$

N noktası hücre merkezi ve bilinmeyen ise (N_1, N_2)

$$I_N = L_N u_N \quad (12b)$$

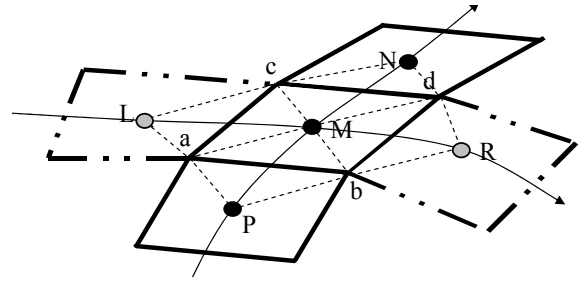
N noktası hücre merkezi ve bilinen ise (N_1, N_2)

$$I_N = L_N u_{old,N} \quad (12c)$$

şeklinde. Bu ifadeler Şekil 6’da gösterilen hücrenin iki hücre yönündeki denklemleri yazılarak daha iyi anlaşılabilir. (10) Denklemi Şekil 6’ya göre açık bir formda yazılıp bilinmeyenler sol tarafa bilinmeyenler sağ tarafa toplanarak

$$L_P u_P + \left(L_{Mab} + L_{Mbd} + L_{Mdc} + L_{Mca} \frac{2A_{abcd}}{\Delta} \right) u_M + L_N u_N = \left\{ \begin{array}{l} (L_a u_a + L_b u_b)_{ab} + (L_R u_R + L_b u_b + L_d u_d)_{bd} + \\ (L_d u_d + L_c u_c)_{dc} + (L_L u_L + L_c u_c + L_a u_a)_{ca} + \frac{2A_{abcd}}{\Delta} u_{oldM} \end{array} \right\} \quad (13)$$

elde edilir.



Şekil 6. Bir hücre yapısında iki yöndeki çözüm bantları

Çözüm bantının diğer yönde olması durumunda (13) denklemindekine benzer bir ifade aynı şekilde elde edilecektir. Çözüm algoritması, hücre üzerinde çözüm bantının yönüne göre bu denklemlerden birini yazar ve bu denklemler de katsayılar matrisi üç-diyagonal olan bir denklem takımı oluşturur. Her çözüm bandında bu şekilde elde edilen lineer denklem takımları standart yöntemlerle çözülür. Her iterasyon adımı sonunda kenar noktası değerleri interpolasyon ile yenilenerek işlemlere devam edilir.

Yukarıda anlatılan çözüm algoritmasının programlanabilmesi için klasik veri dizi yapıları yeterli olmamaktadır. Bu nedenle bu çalışmada uygulanan özel veri yapısından ve programlamadan bahsetmek yararlı olacaktır. Çok değişik veri yönetimleri mevcuttur (Sedgewick, 1988). Bu çalışma için en uygun görülen veri yönetim

yapısı ise hücre temelli dört kenarlı veri yapısıdır (Cell based quad edge). Veriler esas olarak iki adet tek boyutlu dizi grubunda tutulmaktadır. Bu diziler köşe noktalarını içeren noktalar kümesi grubundan ve hücre bilgilerini saklayan dizi grubundan oluşmaktadır. Hücre grubunda dört kenarın bilgileri bulunmaktadır. Bunlar kullanılarak bir çözüm bandının başındaki hücre bilgilerinden bant izlenebilir. Bunun için ayrıca çözüm bandının başlangıç hücre bilgilerini saklayan bir dizi (Header) kullanılmıştır.

Sayısal kararlılık ve yakınsama karakterleri

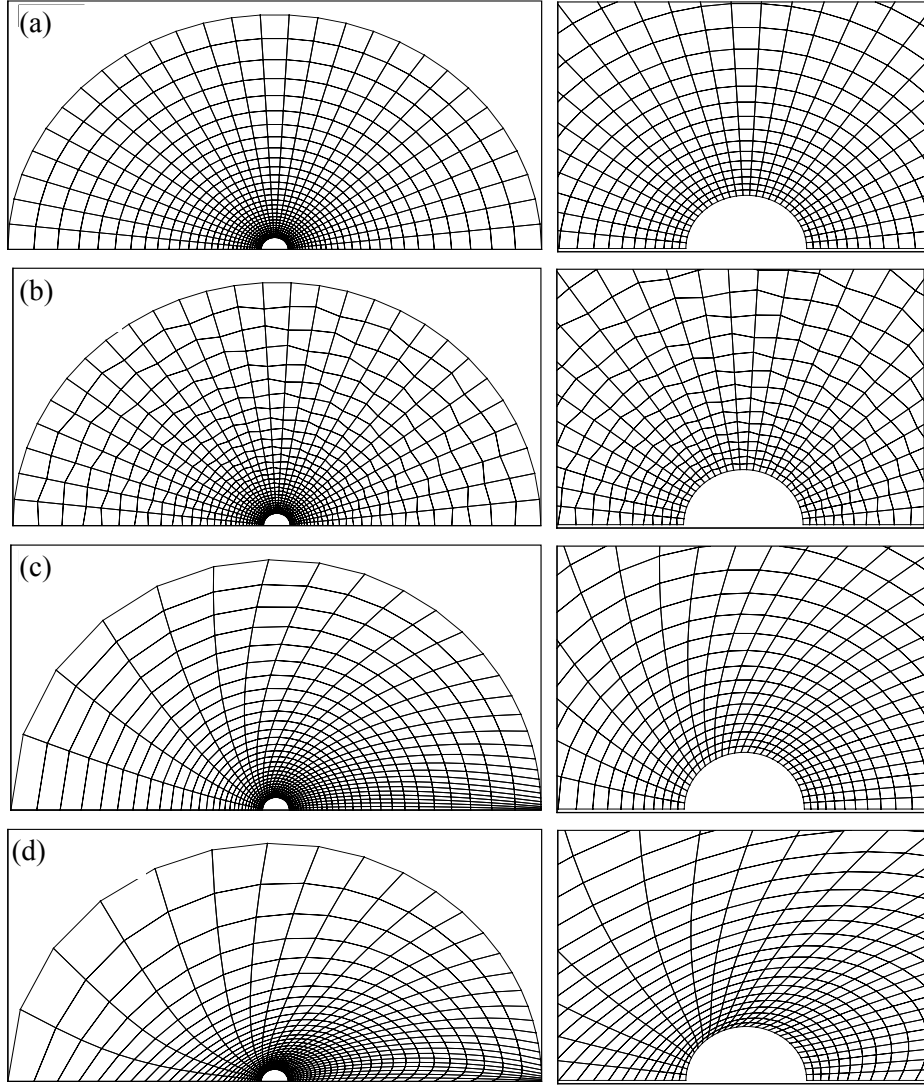
Gerek bu çalışmada önerilen DAHYKF yönteminin, ve gerekse karşılaştırmalar için kullanılan DYKF ve RK4 yöntemlerinin kararlılık davranışlarının bilinmesi, özellikle kararlılık açısından karşılaştırılabilirlikleri ve sonuçların yorumlanabilmesi için önemlidir. RK4 yöntemi açık formülasyonlu bir yapıya sahip olduğundan şartlı kararlı olduğu yaygın olarak bilinmektedir. Bu husus pek çok temel sayısal analiz kitabında belirtilmiş olup, kararlılık analizleri verilmiştir (Pozrikidis, 1998; Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson vd., 1984;). DYKF metodu aynı şekilde bir çok temel sayısal kitabında yer almakta olup ayrıca bir çok yayında uniform kartezyen ağ için kararlılık analizlerine de yer verilmiştir (Pozrikidis, 1998; Hoffmann ve Chiang, 2000; Anderson, 1984; Douglas, 1956a; Douglas, 1956b; Abarbanel vd., 1986). Analizler yöntemin uniform kartezyen ağ için şartsız kararlı olduğunu ispatlamaktadır. Fakat bu yöntemin eğrisel koordinat sisteminde kararlılık analizi çok az yayında yapılmıştır (Abrashin ve Dzyuba, 1994). Bu yayınlarda DYKF yönteminin, sadece hücre en ve boyunun eşit olması halinde şartsız kararlı olduğu belirtilmektedir. DAHYKF yöntemi yapısal olmayan çözüm ağlarını da kullandığından kararlılık analizi için bu yapıya uygunluğu nedeniyle ayrık pertürbasyon tekniğinin (Hoffmann ve Chiang, 2000) uygun olacağı değerlendirilmiştir. Yer darlığı nedeniyle kararlılık analizi bu çalışmada verilmemiştir (Bkz. Çete, 2004). Kararlılık analizi sonucunda yöntem şartsız kararlı çıkmakta buna ek olarakda Δt sonsuza gittikçe kararlılık karakterinin arttığı ortaya çıkmıştır.

Uygulamalar

Bu çalışmada uygulama olarak daire etrafındaki potansiyel çözüm ele alınmış çözüm ağı sıklığı, bozuntular ve zaman aralığı etkileri DYKF ve RK4 yöntemleri ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Tüm uygulamalar P IV anakartlı ve 2.4 MHz hızındaki bir bilgisayarla yapılmıştır. Çözülen denklem ise daimi olmayan ısı iletimi denklemdir, bu denklem yakınsadığında daimi hali yani Laplace denklemine dönüşmektedir. Laplace denklemi ayrıca potansiyel akışta akım fonksiyonu denklemdir. Daire etrafındaki potansiyel akışta akım fonksiyonu üç tip sayısal metod ile çözülmüştür. Daire etrafında potansiyel akışın analitik çözümü mevcut olduğu için çalışmada direk hatalar da hesaplanabilmektedir. Sayısal metodlardan biri çalışmada önerilen ve Değişen Ardışık Hücre Yönlü, Kapalı Formülasyonlu DAHYKF (Alternating Cell Directions Implicit, ACDI) yöntemi diye isimlendirdiğimiz yöntemdir. Bu sayısal yöntem dörtgen elemanlı yapısal ve yapısal olmayan çözüm ağları etrafında daimi olmayan ısı akışı denklemini kapalı formülasyon ile çözmektedir, daire etrafındaki potansiyel akışın analitik sonuçları ve sınır şartları bir önceki başlık altında verilmiştir. Karşılaştırmada karışıklık olmaması nedeniyle tüm sınırlarda Dirichlet sınır şartı ve değer olarak analitik değerler kullanılmıştır. DAHYKF yönteminin yapısal çözüm ağlarındaki ve kapalı formülasyondaki performansını karşılaştırabilmek için eğrisel koordinat sisteminde yazılmış Değişen Yönlü, Kapalı formülasyonlu DYKF (Alternating Direction Implicit, ADI) yöntemi kullanılmaktadır. Yapısal olmayan çözüm ağlarındaki performansını karşılaştırabilmek amacı ile zaman integrasyonunu Runge-Kutta ile yapan Sonlu hacimler metodu (Metod için RK4 denilecektir) kullanılmaktadır. Burada ilham kaynağı olan DYKF yöntemi bir sonlu farklar metodu olmasına rağmen DYKF yöntemi aslında bir sonlu hacimler yöntemidir. Birim yarıçapındaki daire etrafındaki akım fonksiyonu (Yükselen, 1995, Jones, 1979) aşağıdaki gibidir:

$$\psi(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (23)$$

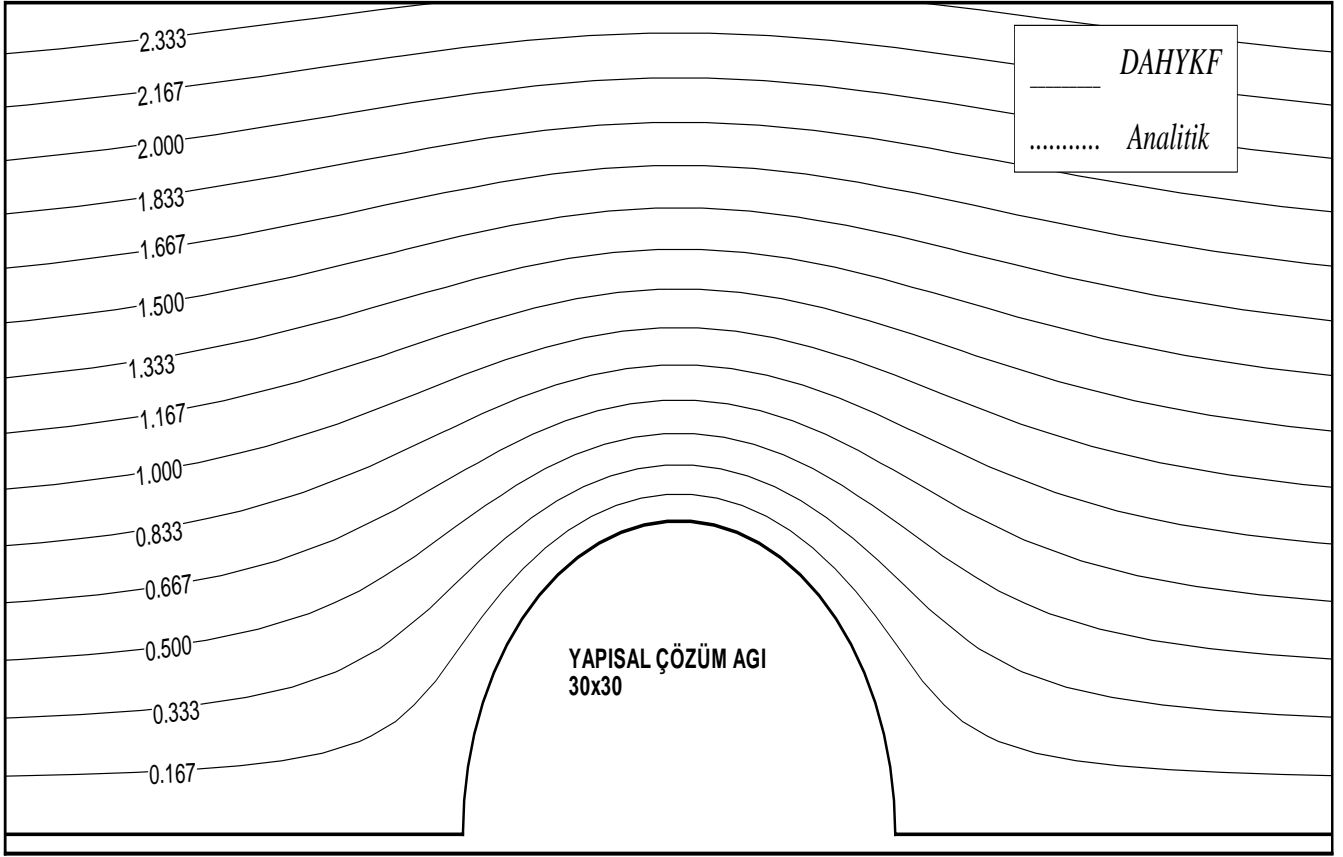
Hata terimide çözümün analitik fonksiyon ile farkından elde edilmiştir



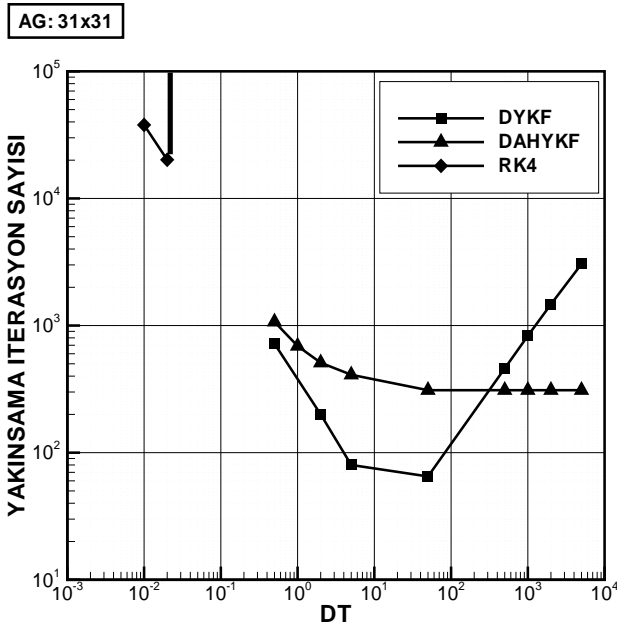
Şekil 10. Çalışmada kullanılan yapısal çözüm ağları (a) 31x31, (b) Bozuntulu, (c)Burulmuş, (d) Burulmuş-Düzgünleştirilmiş çözüm ağları

Şekil 11’de DAHYKF yönteminin yapısal çözüm ağında akım fonksiyonu eşçizgileri, analitik değerleriyle karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Şekil 12’de 31x31 elemanlı yapısal çözüm ağı ile üç sayısal yöntemin çözümleri yakınsama iterasyon sayıları açısından karşılaştırılmıştır. DYKF yönteminin zaman adımları artarken önce yakınsamanın hızlandığı fakat bir optimumdan sonra yakınsamanın yavaşladığı görülmektedir. DAHYKF yöntemi ise aynı şekilde yakınsaması hızlanırken zaman aralığı artıkça optimum bir değere oturmakta ve yüksek zaman aralıklarında aynı kalmaktadır. Ayrıca her iki yöntemde büyük zaman adımlarında çözüm vermesine bakılarak şartsız kararlı olduğu söy-

lenebilir. RK4 yöntemi bilindiği üzere şartlı kararlı bir karakter sergilemektedir. RK4 yönteminin yakınsayabildiği zaman aralığı değerleri 25~50 kat daha düşmektedir. Bir iterasyonu DAHYKF yöntemi DYKF yönteminden yaklaşık 1.5 kat daha uzun sürede, RK4 yöntemi ise yaklaşık 4 kat uzun sürede çözmektedir. Aslında DAHYKF yöntemi ile DYKF yöntemi arasında hız farkının olmaması beklenmektedir, çünkü bir iterasyonda yaptıkları işlem sayıları birbirlerine denk düzeydedir. Böyle bir farkın olmasının sebebinin dizi ve değişken yapıları arasında fark olduğu düşünülmektedir, DYKF yöntemi çok basit yapısı ile dizileri otomatik şekilde kullanmasına rağmen, DAHYKF yönteminde bir



Şekil 11. 31x31 yapısal ağı halin DAHYKF yöntemi ile çözümünün akım fonksiyonu çizgileri ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması



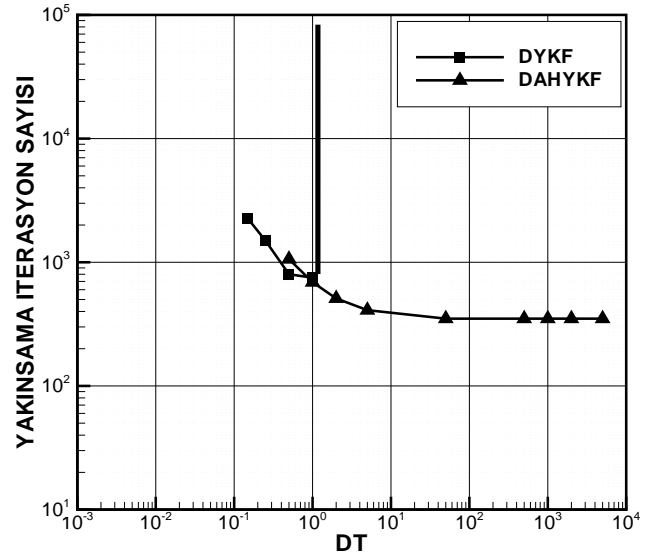
Şekil 12. 31x31 yapısal çözüm ağı ile DYKF, DAHYKF ve RK4 çözümlerinin yakınsama iterasyon sayısının zaman aralığına göre değişimleri

indeksleme sistemi ile her değişken çağrılabilir. Zaman aralığına göre en iyi yakınsama iterasyon sayıları arasındaki karşılaştırmada ise ibre DYKF yönteminden yana gözükmektedir. Burada DAHYKF yönteminin avantajı ise optimum noktasının bilinmesidir, çok büyük zaman aralıkları seçildiğinde DAHYKF yönteminin optimum yakınsama iterasyon sayısında çözüm vereceğinin bilinmektedir. DYKF yönteminde ise hangi zaman aralığının optimum olduğu bilinemeyecektir. RK4 yöntemi ise açık formülasyonlu olup bu nedenle şartlı kararlı olduğu için bu karşılaştırmalarda oldukça başarısız çıkmıştır. Bu çözüm ağlarında optimum (yani yakınsak en yüksek zaman aralığı) yakınsama iterasyon sayısı DYKF yönteminden 50 kat daha fazladır, her iterasyonun DYKF yönteminden 4 kat yavaş çözüldüğünde düşünülürse aradaki fark oldukça fazladır. Çözümlerin hassasiyeti ise aşağı yukarı aynı mertebededir. RK4 ve DAHYKF yönteminin ortalama hataları yaklaşık aynıdır, fakat bu hata değerleri DYKF yön-

temininkinden maksimum 1.5 kat daha fazla çıkmaktadır. Bu sonuçlardan özellikle hassasiyet konusunda DYKF yönteminin çok büyük bir fark olmasa da daha iyi bir performansı olduğu görülmektedir, bunun yanında DAHYKF yönteminin zaman aralığı artırıldıkça optimum performansa ulaşması da oldukça önemli bir özellik olduğu düşünülmektedir. Ayrıca DAHYKF yönteminin ayrıklaştırmasının daha yüksek mertebede yapmak mümkündür (Cai vd., 2003). Bunun yanında Sonlu Hacimler ayrıklaştırmasının çözüm ağı kalitesinden daha az etkileneyeceği düşünülmektedir, bunun üzerine 31x31 boyutlu yapısal çözüm ağını değişik tip deformasyonlara uğratarak çözümlerle test edilmiştir. Bu deformasyon sırası ile bozuntulu, burulmuş ve burulmuş-düzgünleştirilmiş (Şekil 10) olmak üzere üç tip olarak seçilmiştir. Bozuntulu çözüm ağı noktaların rastlantısal şekilde konumlarının küçük oranlarda değiştirilerek elde edilmektedir. Burulmuş çözüm ağları ortogonal yapıyı bozarak çözüm ağlarının burulmasından elde edilmektedir. Burulmuş-düzgünleştirilmiş çözüm ağları ise burulmuş çözüm ağlarının Laplasiyen düzgünleştirme uygulanmış halidir, bu çözüm ağı tipini bu test çalışması içine sokmanın sebebi DAHYKF yönteminin özellikle hassasiyet açısından bu tip düzgünleştirmeye hassas olmasıdır, bu yapıda düzgünleştirme yapılsa dahi burulmuşluk (skewness) hala korunmaktadır. Şekil 13'te bozuntulu 31x31 boyutlu çözüm ağının DYKF ve DAHYKF yöntemi ile alınmış çözümlerinin yakınsama karakter ve değerleri görülmektedir. Buradan çıkan sonuç DAHYKF yönteminin yakınsama karakterini değiştirmedir, ayrıca yakınsama açısından normal çözüm ağı sonuçlarından farklı olmadığı gözlenmektedir. Buna karşılık DYKF yöntemi büyük bir performans kaybına uğramış ve şartsız kararlılık yapısı bozulmuştur. DYKF yönteminin 2 boyutta sadece hücrelerin en ve boylarının eşit olması durumlarında şartsız kararlı olduğu bilinmektedir. Sonlu farklar metotlarının metrik yani çözüm ağı kalitesine bağlı olduğu formülasyonlarından da anlaşılmaktadır. DYKF yönteminin avantajı ise hassasiyetinin çok fazla düşmemesidir. Bu örnekle DAHYKF yönteminin bozuntulu çözüm ağı ile yakınsama karakterini kaybetmemekle birlikte hassasiyetini oldukça kay-

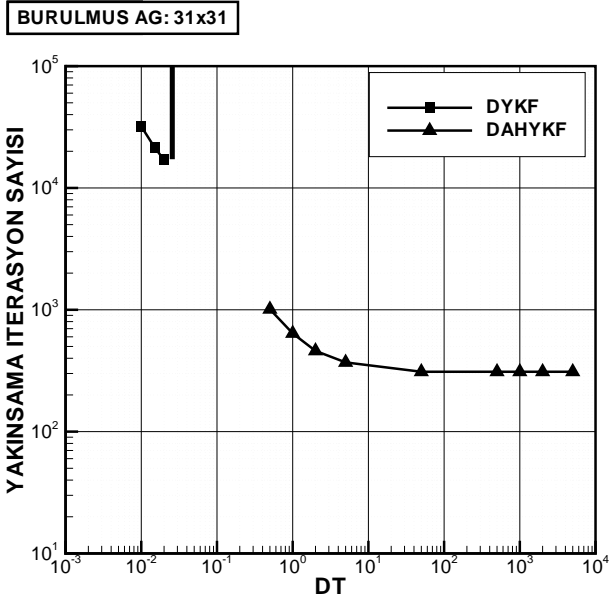
bettiği görülmektedir. Burulmuş çözüm ağlarının yakınsama karakterleri de Şekil 14'te görülebilmektedir. DAHYKF yöntemi aynı yakınsama karakterini korumuş ve DYKF yöntemi yine şartlı kararlı bir davranış göstermiştir, ayrıca kararlılık aralığının daralmasından yöntemin burulmaya daha hassas olduğu düşünülmektedir. Bu örnekte DAHYKF çok büyük bir hassasiyet kaybına uğramıştır. Bunun burulma işleminin çözüm ağının düzgün yapısını (dörtgen yüzeylerin birbirlerine göre dengeli boyutta olması) bozduğu düşünülmektedir, DAHYKF yöntemi interpolasyon kullandığı için bu düzgün yapıya hassas olduğu bilinmektedir. Bu nedenle burulmuş ve düzgünleştirilmiş çözüm ağında da çözümler yapılmıştır, Şekil 15'te bu çözümlerin yakınsama karakterleri görülmektedir. Bu çözüm ağındaki düzgünleştirme işlemi DYKF yönteminin performansında hiçbir etki yapmadığı görülmektedir fakat DAHYKF yönteminde yakınsama açısından hiçbir şey fark etmemiş olmasına rağmen hassasiyet çok fazla artmış neredeyse normal çözüm ağından daha iyi bir ortalama hata vermiştir.

BOZUNTULU AG: 31x31

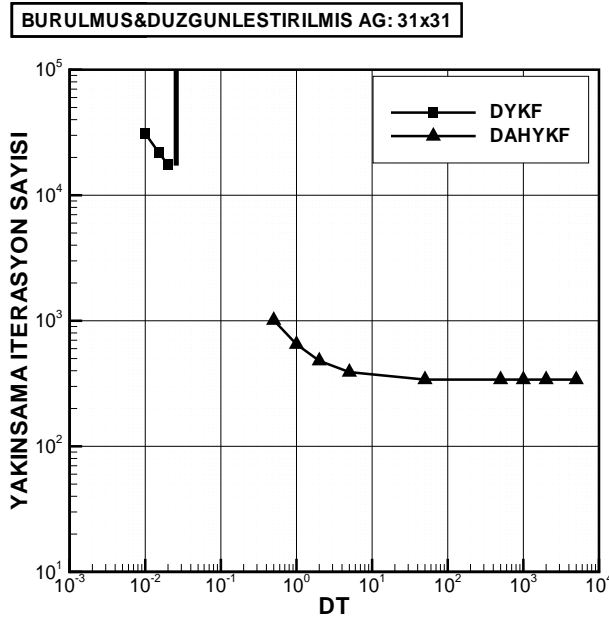


Şekil 13. Bozuntulu 31x31 yapısal çözüm ağı ile DYKF ve DAHYKF yöntemleri çözümlerinin yakınsama iterasyon sayısının zaman aralığına göre değişimleri

Şekil 16 642 noktalı düzgünleştirilmiş yapısal olmayan çözüm ağlarının RK4 ve DAHYKF



Şekil 14 Burulmuş 31x31 yapısal çözüm ağı ile DYKF ve DAHYKF yöntemleri çözümlerinin yakınsama iterasyon sayılarının zaman aralığına göre değişimleri

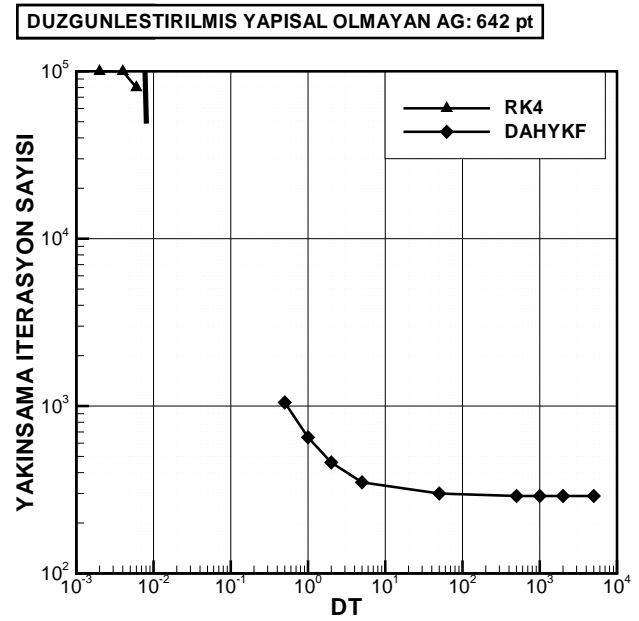


Şekil 15. Burulmuş-düzgünleştirilmiş 31x31 yapısal çözüm ağı ile DYKF ve DAHYKF yöntemleri çözümlerinin yakınsama iterasyon sayılarının zaman aralığına göre değişimleri

yöntemleri çözümlerinin yakınsama karakteri görülmektedir. Şekil 17’de de aynı ağ üzerindeki DAHYKF yönteminin akım çizgileri

görülmektedir. Bu sonuçlardan görülebildiği gibi DAHYKF yöntemi aynı karakteri göstermektedir, görülmektedir ki ister yakınsama ister hassasiyet açısından yapısal olmayan düzgünleştirilmiş çözüm ağları sonuçları yapısal sonuçlardan geri kalmamaktadır.

RK4 yönteminin sonuçları şartlı kararlı olduğu için özellikle yakınsama açısından oldukça geridir, bu anlamda pratikliği yok olmaktadır, fakat hassasiyeti belki aynı temel formülasyonları içerdikleri için olsa gerek DAHYKF yöntemi ile hemen hemen aynıdır.

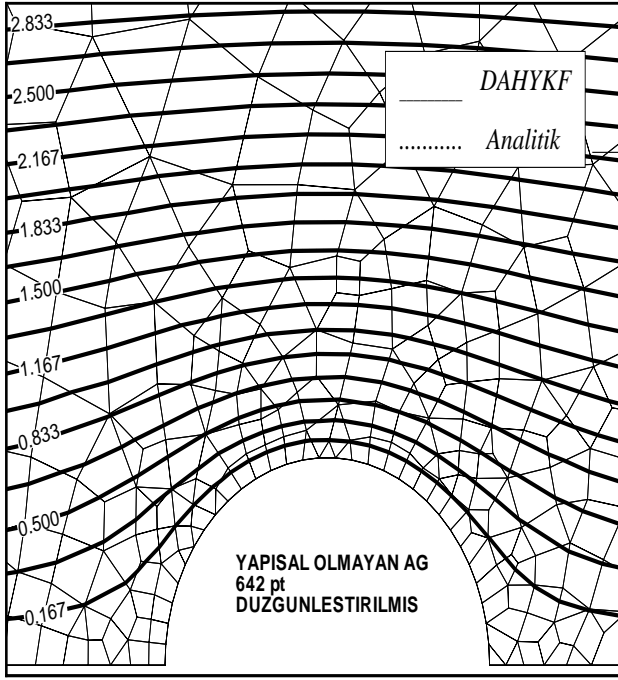


Şekil 16 Düzgünleştirilmiş yapısal olmayan 642 noktalı çözüm ağı DAHYKF ve RK4 yöntemleri çözümlerinin yakınsama iterasyon sayısının zaman aralığına göre değişimleri

Sonuçların yorumlanması

DAHYKF yönteminin çalışma sonucunda değerlendirilen genel karakter ve özelliklerini maddeler halinde aşağıdaki gibi verilebilir.

- DAHYKF yöntemi hızlı kapalı bir formülasyona sahiptir.
- Yapısal ve yapısal olmayan dörtgen elemanlı çözüm ağlarını desteklemektedir. Ayrıca sık olmamak şartı ile çözüm ağı içinde üçgen elemanlarda sorunsuz desteklenmektedir.



Şekil 17. Düzgünleştirilmiş yapısal olmayan 642 noktalı çözüm ağı ile DAHYKF yöntemi çözüm-lerinin akım çizgisi grafiği

- Her türlü ağda şartsız kararlıdır. Bu analitik ve sayısal olarak ispatlanmıştır.
- Yapısal çözüm ağlarında DYKF yöntemi gibi performansının çok yüksek olduğu bilinen metodlara yakın bir performansı gösterebilmektedir.
- DAHYKF yönteminin en üstün yanı ise yapısal olmayan çözüm ağlarında yakınsama, hassasiyet ve bilgisayar çözüm zamanları açısından çok yüksek bir performans göstermesidir, yapısal çözüm ağı hassasiyet, yakınsama ve hızlilik karakterlerine denk bir performans elde edebilmektedir.
- Çözüm zaman aralığına göre yakınsama karakteri DYKF yönteminden farklı olarak her türlü çözüm ağında aynıdır ve çözüm zaman aralığı arttığında optimum yakınsama değerlerine ulaşılmaktadır, buda optimum yakınsama için gerekli çözüm zaman aralığının bilinmesi anlamına gelmektedir.
- Metod düzgünlükten oldukça etkilenmekte fakat sadece hassasiyet kaybı oluşmaktadır. Yapılan örneklerde hassasiyet bir merteben (order) fazla düşebildiği görülmüştür. Bu problemin çözümü ise çok basit laplasiyen

düzgünleştirme metodu ile çözülebilmektedir.

- DAHYKF yönteminin Yaklaşık Çarpanlarına Ayırma (Approximate Factorization, Mitchell ve Griffiths, 1980), Alt-üst üçgenel ayırma (LU Decomposition, Lomax vd., 1999) gibi daha üst düzey kapalı formülasyonlu metodların uygulamasına uygunluğu henüz araştırılmamıştır.

Sonuçlardan görüldüğü gibi DAHYKF yöntemi geniş çözüm ağı alternatiflerinde yüksek performans göstermektedir. Yöntem kolayca elde edilebilen yapısal olmayan çözüm ağlarında yapısal çözüm ağı kapalı formülasyonlu metodların performansını gösterebildiği için bu tür metodların avantajlarını yok edebilecektir. Elbette bu çalışmada yeni bir yöntem önerildiği için sadece daha basit potansiyel akımlar çözülmüştür. Euler, Navier-Stokes gibi daha karmaşık akış çözümlerinde metodun nasıl davranacağı ileriki çalışmalarda incelenmelidir.

Kaynaklar

- Abarbanel,S., Dwoyer,D., Gottlieb,D., (1986). Improving the convergence rate to steady state of parabolic ADI methods, *Journal of Computational Physics*, 67, 236-239.
- Abrashin,V.N., Dzyuba,I.A., (1994). An alternating direction method for solving multidimensional problems of mathematical physics in doain with curvilinear boundary, *Differential Equations*, 30, 7, 1082-1087.
- Anderson,D.A., Tannehill,J.C. ve Pletcher,R.H., (1984). Computational fluid mechanics and heat transfer, Hemisphere Publication Corporation, New York, s.599
- Beam,R.M. ve Warming,R.F., (1982). Implicit numerical method for the compressible navier-stokes and euler equations, *1981-82 Lecture Notes of Von Karman Institute for Fluid Dynamics*.
- Cai, Z., Douglas, J., Park, M., (2003). Development and analysis of higher order finite volume methods over rectangles for elliptic equations, *Advances in Computational Mathematics*, 19, 3-33.
- Caughey, D.A. ve Hafez, M. M., (1994). Frontiers of computational fluid dynamics, John-Wiley & Sons, New York.
- Douglas,J., (1955). Variable time steps in the solution of the heat flow equation by a difference

- equation, *American Mathematical Society. Proceedings* [Issn: 0002-9939], **6**, 787-793, 1955.
- Douglas, J., (1956), The solution of the heat equation by a high order correct difference equation, *Studies in Applied Mathematics*, **35**, 145-151.
- Douglas, J., (1956). On the relation between stability and convergence in the numerical solution of the linear, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **4**, 20-37.
- Douglas, J., Rachord, H., (1956). On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *American Mathematical Society. Transactions*, **82**, 421-439.
- Henne, P.A., (1990), Applied computational aerodynamics, AIAA Inc., Washington.
- Hoffmann, K.A. ve Chiang, S.T., (2000). Computational fluid dynamics, *Engineering Education System*, Wichita, Kansas.
- Jameson, A., (1997). Essential elements of computational algorithms for aerodynamics analysis and design, *NASA/CR 97 206268*.
- Jameson, A., (2003). The role of cfd in preliminary aerospace design, *4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conference*, July 6-11, Honolulu, Hawaii.
- Jones, R.T., (1979). Classical aerodynamic theory, *NASA Reference Publication 1050*.
- Pozrikidis, C., (1998). Numerical computations in science and engineering, *Oxford University Press*.
- Sedgewick, R., (1988). Algorithms, *Addison-Wesley Publishing Company*, USA.
- Swanson, R.C. and Turkel, E., (1997). Multistage schemes with multigrid for euler and navier-stokes , *NASA Technical Paper 3631*, Langley Research Center, Hampton, Virginia.