

## Yapı ve LQR kontrol sisteminin birleşik optimum tasarımı

Mehmet BOZCA\*, Ata MUĞAN

İTÜ Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 34464, Gümüşsuyu, İstanbul

### Özet

*Bu çalışmada, yapının ve kontrol sisteminin birleşik optimum tasarımı çalışılmıştır. Yapı sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş ve kontrolcü "linear quadratik regülör (LQR)" formülasyonu kullanılarak tasarlanmıştır. Yapı ve kontrolcü eşzamanlı ve ardışık olarak optimize edilmiştir. Yapıların ve LQR formülasyonları kullanılarak kontrolcülerin eş zamanlı optimizasyonunun, yapıların yapısal tekil değer şekillendirmesi ile optimize edildiği ve başarılı bir şekilde herhangi bir ilgili kontrol kuralının tasarlanabileceği bir eşdeğer ayrık optimizasyon problemine indirgenebileceği gösterilmiştir. Yapıların ve kontrolcülerin ayrık optimizasyonu özellikle çok serbestlik derecesine sahip yapılar için belirli üstünlüklere sahiptir. Yapıların ve kontrolcülerin eş zamanlı ve ardışık optimizasyonları bir kafes yapı ve kontrolcüsüne uygulanmıştır. Birleşik LQR tasarım problemi için ardışık optimizasyon yaklaşımının eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından çok daha hızlı global minimumu verdiği sonucuna varılmıştır.*

**Anahtar Kelimeler:** Yapısal optimizasyon, optimum kontrol, tekil değer ayrıklaştırması, sonlu elemanlar metodu.

### Integrated optimum design of structures and LQR control systems

#### Abstract

*In this study, integrated optimum design of structures and control systems is studied. The structures are modeled by the use of finite elements method, and the controllers are designed by the use of linear quadratic regulator (LQR) formulation. The structures and controllers are optimized simultaneously and successively. It is shown that simultaneous optimization of structures and controllers by using LQR formulations can be achieved by an equivalent decoupled optimization problem where structures are optimized by shaping the structural singular values and succeeding any control law of interest can be designed. Decoupled optimization of structures and controllers has certain advantages, especially for structures having large degrees-of-freedom (DOF). Computational cost of the associated singular value shaping problem is very low since it is only necessary to compute the largest and smallest singular values that can be computed by using selective eigenvalue solvers. Model order reduction techniques should be employed at every design iteration for simultaneous optimization approach in order to design LQR laws; however, successive optimization approach developed in this paper does not need any model order reduction technique during structural optimization and can easily be implemented into problems having large DOF. Then, simultaneous and successive optimization of structures and controllers are applied to a truss structure and its controller. It is concluded that successive optimization approach to integrated LQR design problem yields the global minimum much faster than the simultaneous optimization approach.*

**Keywords:** Structural optimization, optimum control, singular value decomposition, finite element method.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Mehmet BOZCA. mbozca@yildiz.edu.tr; Tel: (212) 259 70 70 dahili: 2213.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makina Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Yapıların ve kontrol sistemlerinin birleşik optimum tasarımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 30.03.2005 tarihinde dergiye ulaşmış, 31.08.2005 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.09.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Bu çalışmada, yapıların ve kontrol sistemlerinin birleşik optimum tasarımı için “lineer quadratik regülatör (LQR)” formülasyonu uygulanmıştır. Eğer uygulamada yapıların serbestlik derecesi çok büyük ise, model derecesi düşürme tekniklerinin birleşik optimum tasarım yaklaşımlarında bir kontrol kuralını tasarlayabilmek için optimizasyon esnasında her LQR tasarım adımında kullanılmaları gerekir. Bu ise CPU zamanını arttırır ve modelleme hataları içerir. LQR formülasyonlarının yapının yapısal tekil değerlerinin şekillendirilmesi ile optimize edildiği, ve sonra kontrolcünün herhangi bir istenen yolla tasarlanabileceği bir yapı ve kontrolcüsü için ayrık optimizasyon problemine dönüşebileceği gösterilmiştir. Bu yaklaşım optimize edilmiş yapılara daha hızlı gitme, yapının ve kontrolcüsünün ayrık tasarımına müsaade etme, kontrolcülerini tasarlamak için model derecesi düşürme tekniklerinin kullanımında modelleme hatalarını ortadan kaldırma gibi üstünlüklere sahiptir. Bu yüzden, çok serbestlik derecesine sahip yapılar için uygundur. LQR formülasyonu ve yapının toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjisi arasındaki bağıntı yapısal tekil değer şekillendirme problemi ile bağlantılı olarak türetilmiştir.

Bu çalışmanın ana hatları aşağıdaki gibidir: Önce LQR problemi tanımlanmıştır. Daha sonra, kontrol edilmiş yapıların optimum tasarımı için bağıntılar sunulmuştur. Sayısal örnekler verilmiş ve sonuçlar gösterilmiştir.

## LQR tasarım metodu

Bir doğrusal-zamanla değişmeyen (linear time-invariant) yapı aşağıdaki standart formda tanımlanmıştır.

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(0) = x_0 \quad \text{verilen fakat keyfi} \quad (1)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (2)$$

Buna göre, standart LQR tasarım problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

*-Problem tanımı:* LQR kontrol problemi, performans kriteri  $\|z\|_2^2$  yı minimum yapacak

$u \in L_2[0, \infty)$  aralığında bir optimal kontrol kuralı bulmaktır (Anderson ve Moore, 1990).

Diğer taraftan, genişletilmiş LQR problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

*-Problem tanımı:* LQR problemi, sistemi içten kararlı yapacak i.e.,  $x \in L_2[0, \infty)$  ve (3) ile tanımlanan performans kriterini minimum yapacak,  $u \in L_2[0, \infty)$  aralığında bir optimal kontrol kuralını bulmaktır (Anderson ve Moore, 1990)

$$J = \int_0^t (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (3)$$

Burada  $Q = Q^T \geq 0$  ve  $R = R^T > 0$  sırasıyla  $x$  durum değişkeni ve  $u$  girişi için ceza matrisleridir. Optimal kazanç matrisi  $K$ , geri besleme kuralı  $u = -Kx$  ifadesi yukarıdaki  $J$  maliyet fonksiyonunu minimize edecek şekilde hesaplanır. LQR problemleri için çözümler (Anderson ve Moore, 1990) da bulunabilir.

## Kontrol edilmiş yapıların optimum tasarımı

Bir yapının ve LQR'ın eş zamanlı optimum tasarımı için, (3) ile tanımlanan maliyet fonksiyonu bir optimizasyon algoritması kullanılarak yapının optimum tasarım parametrelerinin bulunması ile minimize edilir. Burada  $Q$  ve  $R$  ceza matrisleri önceden tasarımcı tarafından verilir. Yapısal ve kontrol parametreleri, (3)'deki  $J$  maliyet fonksiyonunu minimize etmek için iteratif optimizasyon algoritmaları kullanılarak eşzamanlı veya ardışık olarak optimize edilmelidirler. Eşzamanlı optimizasyon yaklaşımında, yapının ve kontrolcüsünün tasarım parametreleri eşzamanlı olarak optimize edilir. Yapıların ve LQR'ların eşzamanlı optimum tasarımı için de paralel eşzamanlı optimizasyon yaklaşımı (hem yapısal hem de kontrolcü parametreleri aynı anda minimize edilir) izlenmiştir.

## Yapıların ve LQR tasarım probleminin ardışık optimizasyonu

Bu bölümde, yapı ve LQR kontrolcüsünün birleşik optimum tasarımının bir yapısal tekil değer şekillendirmesi şeklinde ifade edilebilir ve ay-

rıklaştırılabilir olduğu gösterilmiştir. Sonsuz ufuklu problem (infinite horizon problem) için aşağıdaki LQR maliyet fonksiyonunu göz önüne alalım (Anderson ve Moore, 1990)

$$\min_x J = \min_x \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (4)$$

Burada  $X$  yapısal ve kontrolcü parametrelerini içeren tasarım parametre vektörüdür. Diğer taraftan, yapısal denklemleri elde etmek için sonlu elemanlar metodunun kullanıldığını ve yapının yarı ayrık denklemlerinin aşağıdaki formda olduğunu varsayalım

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = f \quad (5)$$

(5) ile verilen yapının denklemleri aşağıdaki gibi durum vektörünün tanımlanması ile kolayca durum-uzay formuna (1) dönüştürülebilir.

$$x = \begin{bmatrix} z & \dot{z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Yapının  $U$  şekil değiştirme enerjisi ve  $T$  kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir (Haug ve Choi, 1986).

$$U = \frac{1}{2} z^T K z \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{z}^T M \dot{z} \quad (8)$$

Sistemin toplam enerjisi  $E$

$$E = U + T = \begin{bmatrix} z & \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \frac{1}{2}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ile verilir. Burada  $0_{n \times n}$   $n \times n$  boyutunda sıfır matristir ve  $n$  yapının serbestlik derecesidir. (5)'deki ikinci terim sönümlenme terimidir ve kayıp enerjinin sorumlusudur. Durum ceza matrisi  $Q$ 'nun aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim;

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \frac{1}{2}M \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Burada yapıya karşılık olan durum değişkenleri (6) ile tanımlanır. LQR formülasyonunun anlamı yapının toplam enerjisini minimize etmektir. Çünkü  $J$ 'nin minimizasyonu (4)'teki her bir terimin minimizasyonunu gerektirir ve birinci terim  $Q$ 'nun bu tanımı için yapının toplam enerjisine eşdeğerdir.

Genellikle, bir keyfi  $Q$  matrisi için, bir durum ağırlık matrisi  $W_s$  bulunabilir (Horn ve Johnson, 1995) öyleki

$$Q = W_s^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}M \end{bmatrix} W_s \quad (11)$$

durum değişkenleri

$$x' = W_s \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ile tanımlanan bir yapıya karşılık gelir. Durum ceza matrisi  $Q$  genellikle bir diagonal matris olarak seçildiğinden dolayı, ağırlık matrisi  $W_s$  aşağıdaki gibi seçilebilir

$$W_s = \begin{bmatrix} X_k & 0 \\ 0 & X_m \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Burada  $X_k$  ve  $X_m$  matrislerinin sütunları sırasıyla  $K$  ve  $M$  matrislerinin özvektörleridir. Eğer  $Q$  matrisi diagonal olarak seçilmez ise, bu takdirde (11) ile verilen matris denkleminde,  $W_s$  çözümlenmelidir. Özetle, bir keyfi durum ceza matrisi  $Q$  için, (4) ile tanımlanan  $J$ 'nin minimizasyonu (12) ile verilen toplam yapısal enerjinin minimizasyonuna karşılık gelir. Yani toplam yapısal enerji (12)'de olduğu gibi ağırlaştırılmış anlamda minimize edilir.

Bu arada, (Postlethwaite vd., 1981) sayesinde, bir belirleyici (deterministic) periyodik olmayan giriş vektörü  $u(t)$  için, enerji yoğunluğu oranı, aşağıdaki gibi maksimum ve minimum tekil değerlerin kareleri ile sınırlıdır;

$$\sigma_n^2(\omega) \leq \frac{\|\hat{y}(j\omega)\|_2^2}{\|\hat{u}(j\omega)\|_2^2} \leq \sigma_1^2(\omega) \quad (14)$$

Burada  $y(t)$  giriş vektörü  $u(t)$ ' ye cevap olan çıkış vektördür, ve  $\hat{y}(j\omega)$  ve  $\hat{u}(j\omega)$  sırasıyla  $y(t)$  ve  $u(t)$ ' nin "Fourier dönüşümleridir" ve

$$\hat{y}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (15)$$

$$\hat{u}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16)$$

ile tanımlanırlar. Böylece, bir keyfi ceza matrisi  $Q$  için toplam yapısal enerjinin minimizasyonu ((4) deki birinci terim) durum değişkenleri (12) ile tanımlanan yapının  $\sigma_1$  ve  $\sigma_n$  değerlerinin minimizasyonuna eşdeğerdir.

Yukarıdaki sonuca paralel olarak,  $G$  ve  $P$  sırasıyla bozucu etkiden çıkışa ve referans girişten çıkışa transfer matrislerini gösterirler. Böylece, ayrık yapısal optimizasyon probleminde  $\sigma_1(G(j\omega))$ 'nin minimizasyonu, (5)' de  $f=d$  kuvvet vektörüne eşit yapılarak hesaplanabilen bozucu etki girişi  $d'$  ye cevap olarak toplam yapısal enerji  $E_d$ 'nin minimizasyonuna eşdeğerdir. Bu takdirde,  $E_d$  ile gösterilen çıktıya karşılık gelen toplam yapısal enerji bozucu etki girişi  $d$  yüzünden olacaktır. Benzer olarak, ayrık yapısal optimizasyon probleminde,  $\sigma_n(P(j\omega))$ 'nin maksimizasyonu, (5)' de  $f=u$  kontrol girişine eşit kuvvet vektörü durumuna karşılık gelen kontrol girişi  $u$ ' ye cevap olarak toplam yapısal enerji  $E_u$ 'nun maksimizasyonuna eşdeğerdir. Bu takdirde,  $E_u$  ile gösterilen çıktıya karşılık gelen toplam yapısal enerji kontrol girişi  $u$  yüzünden olacaktır. Sonuç olarak, LQR problemi için

amaç fonksiyonu aşağıdaki enerji oranının minimumu olarak tanımlanır

$$\text{Minimum}_{\omega} \frac{E_d(\omega)}{E_u(\omega)} \quad (17)$$

veya eşdeğer olarak

$$\text{Minimum}_{\omega} E_d(\omega) \text{ iken } \text{Maksimum}_{\omega} E_u(\omega) \quad (18)$$

ile belirtilir. Şimdi, (4)'teki ikinci terim üzerinde çalışılacaktır.  $\tilde{u}$  giriş vektörünün büyüklüğünü gösterebiliriz (i.e.,  $u = u(t) = \tilde{u} \sin \omega t$ ). Bu durumda, aşağıdaki giriş-çıkış transfer matrisi  $T(s)$  olan bir yapı aşağıdaki ifade için geçerlidir (Postlethwaite vd., 1981).

$$\sigma_n^2(\omega) \leq \frac{SMSVO(\omega)}{SMSVI} \leq \sigma_1^2(\omega) \quad (19)$$

Burada  $\sigma_i(\omega)$ ,  $T(j\omega)$ 'nin  $i$ . tekil değeridir (yapısal tekil değeri).

$SMSVO(\omega)$  "bir periyod için  $m$  sürekli-durum çıkışı  $y_{ss}$ 'in karesinin ortalama değerinin toplamını" gösterir.

$$\begin{aligned} SMSVO(\omega) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y_{ss}^T(t) y_{ss}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \tilde{u}^T S(\omega) \tilde{u} \end{aligned} \quad (20)$$

ile verilir.  $SMSVI$  "bir periyod için girişin karesinin ortalama değerinin toplamını" gösterir.

$$SMSVI = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u^T(t) u(t) dt = \frac{1}{2} \hat{u}^T \hat{u} \quad (21)$$

ile verilir ve

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [T^*(j\omega)T(j\omega) + \overline{T^*(j\omega)T(j\omega)}] \quad (22)$$

ile gösterilir. Burada (\*) eşlenik transpozu ve üst çizgi eşlenikliği gösterir. Kontrol girişi ceza matrisi  $R$ 'nin aşağıdaki formda ayrıklaştırıldığı düşünülür,

$$R = W_R^T \Lambda W_R \quad (23)$$

ile verilir. Burada  $W_R$  orthogonal ve  $\Lambda$  diagonaldir (Horn ve Johnson, 1995). Yerine koyarak

$$\tilde{u} = \Lambda^{1/2} W_R u \quad (24)$$

elde edilir. Sonra, (21) aşağıdaki formda elde edilir

$$\begin{aligned} SMSVI &= \frac{1}{2} \tilde{u}^T \tilde{u} = \frac{1}{2} u^T W_R^T \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} W_R u \\ &= \frac{1}{2} u^T R u \end{aligned} \quad (25)$$

(25) denkleminin, (24) ile verilen bir giriş için sistemin  $SMSVI$ 'nin (4) ile verilen LQR maliyet fonksiyonu  $J$ 'deki son terime eşit olduğu anlamına gelir. Bu nedenle SMSVO (20) ve (24) kullanılarak da hesaplanabilir. Böylece  $J$ 'nin minimizasyonu (19) ile tanımlanan bir ağırlaştırılmış giriş için  $SMSVI$ 'nin minimum yapılması anlamına gelir; bu da aşağıdaki gibi  $\sigma_n$ 'in maksimizasyonunu gerektirir

$$\frac{1}{\sigma_1^2(\omega)} \leq \frac{SMSVI}{SMSVO(\omega)} \leq \frac{1}{\sigma_n^2(\omega)} \quad (26)$$

$SMSVI$   $u$  girişinin fonksiyonu iken, yapısal tekil değerler  $\sigma_1$  ve  $\sigma_n$ 'in sadece yapısal parametrelere bağlı olması dikkate değerdir ve  $SMSVO$  hem  $u$  girişinin hemde yapısal parametrelerin fonksiyonudur.

(4) denklemindeki amaç fonksiyonundaki birinci ve ikinci terimlerin sırasıyla (14) ve (26) ile açıklanan yapısal tekil değer şekillendirme problemlerinin tersine eşdeğer oldukları önemlidir. Gerçekten,  $Q$  ve  $R$  ceza matrislerinin kullanımı ile dengelenen, birinci ve ikinci terimlerin katkıları için (4) ile tanımlanan  $J$  amaç fonk-

siyonunda bir ilişki vardır. Müteakiben, sayısal çözümlerde yapı için bir ayrık optimizasyon problemi olan aşağıdaki amaç fonksiyonu kullanılır

$$\text{Minimum}_{\omega} A(\sigma_1(\omega) + \sigma_n(\omega)) + B \left( \frac{1}{\sigma_1(\omega)} + \frac{1}{\sigma_n(\omega)} \right) \quad (27)$$

$A$  ve  $B$  katsayıları sırasıyla, toplam yapısal enerjiyi ve  $SMSVI$ 'yi cezalandırmak için bağımsız olarak seçilir.

(22) sadece  $\sigma_1$  ve  $\sigma_n$ 'i içerdiğinden dolayı, bilinen optimizasyon probleminin hesaplama maliyetini düşüren seçimli öz değer çözümleri (Golub ve Loan, 1983) kullanılabilir (örneğin, bkz. Muğan, 2002). Gerçekten, LQR probleminin karşılığı bir ayrık yapısal tekil değer şekillendirme problemi olarak ortaya konmuştur.

Gerçekten, yapının ve kontrolcünün optimum tasarımı için LQR formülasyonu frekans uzayında yapısal tekil değer şekillendirmesi problemi ile ilgilidir ve de frekans uzayında yapısal enerjinin şekillendirilmesine eşdeğerdir. Aşağıdaki bölümde LQR formülasyonları üzerine sayısal örnekler gösterilmiştir.

### Uygulama

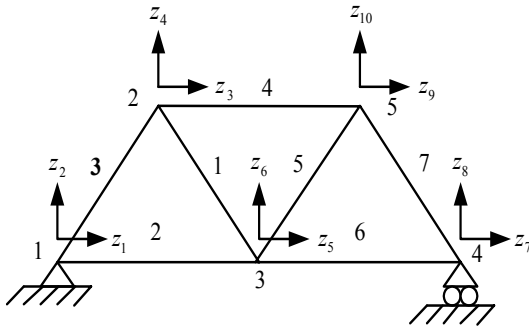
Şekil 1'de belirtilen kafes sistem ve onun kontrolcüsü için bilinen eşzamanlı ve ardışık optimum tasarım problemleri LQR formülasyonları kullanılarak bu bölümde çözülmüştür.

Kafes sistem 7 kafes elemandan oluşturulmuştur ve yapısal parametreler aşağıdaki gibidir: Elastiklik modülü  $E_i = 2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , eleman boyu

$l_i = 1 \text{ m}$ , malzeme yoğunluğu  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  dür. Bütün optimizasyon çalışmalarında, "Ardışık Quadratik Programlama" metodu kullanılmıştır.

Yapının mukavemetini garanti etmek için optimizasyon problemi maksimum gerilmenin  $(\tau_{ij})_{\max}$  bir emniyet gerilmesi  $(\tau_{ij})_{\text{emniyet}}$  ile sınırlandırıldığı bir kısıtlı optimizasyon problemi olarak çözülmüştür. St 37 çelik malzeme için  $\tau_{ak} = 24000 \text{ N/cm}^2$ , emniyet katsayısı  $S=4$  ve

$\tau_{emniyet}=6000 \text{ N/cm}^2$  olarak alınmıştır. Kafes-kiriş sistem için tasarım parametreleri kafes-kiriş elemanların  $h_i$  kesit alanlarıdır. Optimizasyon algoritmasında  $h_i$  kesit alanlarının alt ve üst sınırları sırasıyla  $1.4 \times 10^{-4} m^2$  ve  $12 \times 10^{-4} m^2$  olarak alınmıştır. Yapının kütlesi düğüm noktalarına paylaştırılmıştır.  $C=\alpha K$  formundaki Rayleigh sönümü sayısal simülasyonda kabul edilmiştir burada  $\alpha$  değeri 0.1 ile 0.0001 arasındadır. Global minimumları bulmak için, yapısal parametreler (örneğin, kafes-kiriş elemanların kesit alanları) için başlangıç koşulları sayısal çözümler esnasında değiştirilmiştir.



Şekil 1. Kafes sistem

Tasarım parametreleri kafes-kiriş sistemdeki çubukların  $h_i$  kesit alanlarıdır ve LQR formülasyonları ile hesaplanan  $u=-Kx$  kontrol girişi için geri besleme matrisi  $K$ 'dir. (4)'teki durum ceza matrisi  $Q$  ve kontrol ceza matrisi  $R$

için, bütün tasarım çalışmalarında basitlik için birim matrisleri olarak seçilmişlerdir. Keyfi  $Q$  ve  $R$  matrisleri de seçilebilirdi.

Ardışık optimizasyon için, aşağıdaki maliyet fonksiyonu (27)'de  $A=0$  ve  $B=1$  seçilerek minimize edilmiştir.

$$\text{Minimum}_{\omega} \frac{1}{\sigma_1(P(j\omega))} + \frac{1}{\sigma_n(P(j\omega))} \quad (28)$$

Bu yapıların ve kontrolcülerin eşzamanlı optimizasyonları ile elde edilen hemen hemen aynı sonuçları verir.  $\sigma_n(P(j\omega))$  çok küçük ( $10^{-5}$  mertebesinde) ve  $\sigma_1(P(j\omega))$   $10^2$  mertebesinde olduğundan dolayı,  $1/\sigma_n(P(j\omega))$  terimi baskındır ve bunun sonucunda  $1/\sigma_n(P(j\omega))$  nin maliyet fonksiyonu (28)deki gibi aynı sonuçları verir.

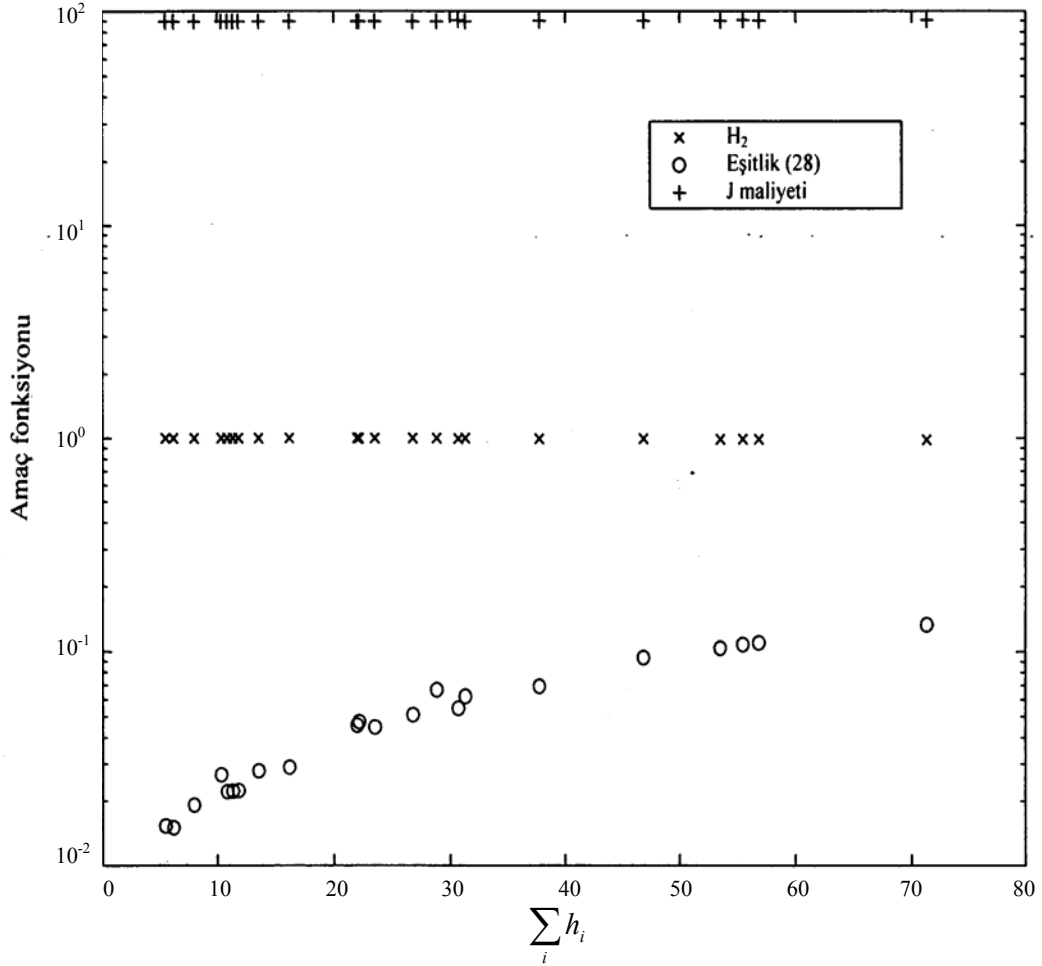
Tablo 1 ve Tablo 2'de sırasıyla eşzamanlı ve ardışık optimum tasarım yaklaşımları için bazı sonuçlar sunulmuştur. Bir impulsa karşılık olan  $J$  maliyet fonksiyonunun değerleri, transfer matrisinin  $H_2$  normu ve (28) maliyet fonksiyonunun değerleri sırasıyla kafes-kiriş sistemin eşzamanlı ve ardışık optimum tasarımları ve LQR için çubukların toplam kesit alanlarının (kafes-kiriş sistemin toplam ağırlığı ile orantılı) çözüm grubu içinde değiştiği durumda Şekil 2 ve 3'te verilmiştir.

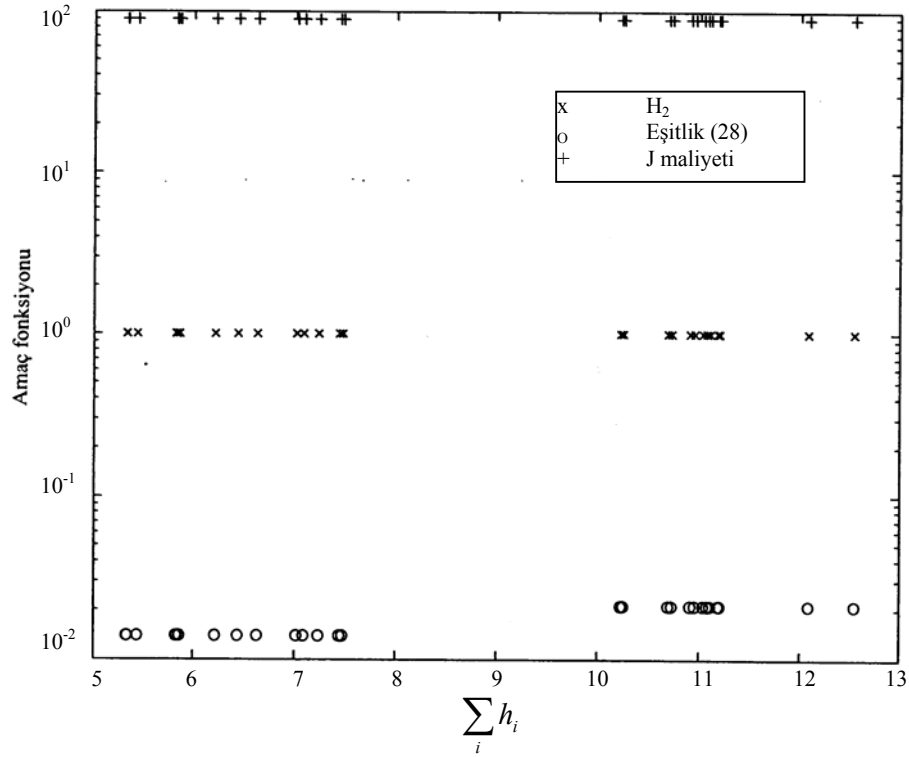
Tablo 1. Eşzamanlı LQR optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen bazı çözümler

Çözüm no	Optimum kesit alanları ( $\text{cm}^2$ )	Toplam alan ( $\text{cm}^2$ )	$J$	$\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_n}$	CPU Zamanı (s)
1	$h_{\text{başlangıç}} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$	11.31	89.49	23620	20.71
	$h_{\text{optimum}} = [1.4, 1.97, 1.87, 1.4, 1.87, 1.4, 1.4]$				
2	$h_{\text{başlangıç}} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$	26.77	89.84	53470	9.42
	$h_{\text{optimum}} = [3.99, 4.99, 2.23, 1.4, 4.56, 4.65, 4.91]$				
3	$h_{\text{başlangıç}} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$	57.56	90.37	109620	14.82
	$h_{\text{optimum}} = [8.08, 10.5, 6.13, 1.4, 10.5, 10.53, 10.37]$				

Tablo 2. Ardışık LQR optimizasyonu ile elde edilen bazı çözümler

Çözüm no	Optimum kesit alanları (cm <sup>2</sup> )	Toplam alan (cm <sup>2</sup> )	$J$	$\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_n}$	CPU Zamanı (s)
1	$h_{\text{başlangıç}} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{\text{optimum}} = [1.67, 1.76, 1.97, 1.4, 1.4, 1.43, 1.4]$	11.04	89.68	20990	13.59
2	$h_{\text{başlangıç}} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{\text{optimum}} = [1.74, 1.69, 1.81, 1.4, 1.4, 1.74, 1.4]$	11.20	89.50	20990	28.45
3	$h_{\text{başlangıç}} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{\text{optimum}} = [1.88, 1.43, 1.82, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.73	89.69	20990	67.51

Şekil 2. (28) amaç fonksiyonuna göre, kafes sistemin eşzamanlı optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde  $J$  maliyet fonksiyonu,  $H_2$  normu ve tekil değerlerin terslerinin toplamı



Şekil 3. (28) amaç fonksiyonuna göre, kafes sistemin ardışık optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde  $J$  maliyet fonksiyonu,  $H_2$  normu ve tekil değerlerin terslerinin toplamı

Bir çok-amaçlı karar kriteri kullanarak bu şekillerde sunulan çözüm grupları arasından en iyi çözümün seçimi tasarımcının hedefidir.

Tablo 2’de ardışık optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen optimum çözümün, Tablo 1’de eşzamanlı optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen daha iyi olduğu gözlemlenir. CPU zamanlarına dayalı mukayeseler eşzamanlı optimizasyon yaklaşımı için model derecesi düşürme tekniği gerçekten gerekmemesine rağmen, ardışık optimizasyon yaklaşımının lehinedir. Eğer herhangi bir model derecesi düşürme tekniği eşzamanlı optimizasyon yaklaşımı için uygulansaydı, bu takdirde, eş zamanlı optimizasyon yaklaşımının CPU zamanları artacak, modelleme hataları problemin içine girecek ve ardışık optimizasyon yaklaşımı eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından daha üstün olacaktır.

### Sonuçlar

Bir yapı ve onun kontrolçüsünün birleşik optimum tasarım problemi LQR formülasyonları

kullanılarak çalışılmıştır. Eşzamanlı optimizasyon problemlerinde LQR kullanımı özellikle çok serbestlik derecesine sahip yapılar için her tasarım aşamasında yapılar için model derecesini düşürme tekniklerinin kullanımına gereksinim duyar. Bu yüzden, önemli yaklaşım hataları içermesi gibi belirli sakıncalara sahip olduğu bilinmektedir. Kontrol edilmiş yapının optimum tasarımının bir çok-amaçlı optimizasyon problemi olduğu dikkate değerdir. Bir basit kafes-kiriş sistem için, amaçların çubukların toplam kesit alanları (toplam ağırlıkla orantılı) ve amaç fonksiyon (örneğin, (4)’deki  $J$  maliyet fonksiyonu ve (27)’deki yapısal tekil değerlerin fonksiyonu) olan farklı yaklaşımlar için çözüm grupları verilmiştir. Yapıların ve kontrolçülerin eşzamanlı optimizasyonunun aşağıdaki gibi bir ayrık (ardışık) optimum tasarım yaklaşımına indirgenebileceği gösterilmiştir: İlk önce, yapı yapısal tekil değerlerin şekillendirilmesi ile optimize edilir, sonra kontrolcü herhangi bir ilgili metod ile tasarlanabilir. Ardışık optimizasyon yaklaşımında yapısal optimizasyon için amaç



fonksiyonları (27) ile verilen yapısal tekil değerlere göre açıklanır. Bilinen tekil değer şekillendirme probleminin hesaplama maliyeti bir yapının sonlu eleman modelinin serbestlik derecesi büyük olmasına rağmen çok düşüktür. Çünkü sadece en büyük ve en küçük tekil değerlerin hesaplanması gerekir ve seçimli öz değer çözümlerinin kullanımı ile hesaplanabilir ve diğer tekil değerler gerekli değildir. Eş zamanlı LQR optimizasyon probleminin çözümlerinin ardışık optimizasyon yaklaşımı ile elde edilebileceği de gözlemlenmiştir. Sayısal çalışmaya dayanarak, aşağıdaki yaklaşımın kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı için çok verimli olduğu sonucu çıkarılmıştır: İlk önce (27) ile verilen amaç fonksiyonunu yapıyı optimize etmek için kullan ve yerel minimumların karşılığı olan bütün çözümleri kaydedilir. Sonra herhangi bir kontrol kuralı bu çözümler için bir kontrolcü tasarlamak için kullanılabilir. Nihai tasarım bu aday çözümler arasından seçilebilir.

Öte yandan, eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için, LQR kurallarının tasarımında her tasarım adımında model derecesini düşürme tekniklerinin kullanılması gerekir. Bununla beraber, bu çalışmada geliştirilen ardışık optimizasyon yaklaşımı yapısal optimizasyon esnasında herhangi bir model derecesi düşürme tekniğine ihtiyaç duymaz ve çok serbestlik dereceli problemlere kolayca uygulanabilir. Ardışık optimizasyon yaklaşımında, kontrolcü yapı optimize edildikten sonra tasarlanır; böylece, eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından çok daha az CPU zamanına ihtiyaç duyar. Model derecesi düşürme

teknığının uygulanmadığı durumda, ardışık optimizasyon yaklaşımının toplam CPU zamanı yaklaşık 2 ile 4 kat bu eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından daha azdır. Eğer eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için bir model derecesi düşürme tekniği uygulanırsa, CPU zamanı karşılaştırması ardışık optimizasyon yaklaşımının daha fazla lehine olacaktır.

## Teşekkür

Bu çalışma kısmen İstanbul Teknik Üniversitesi Araştırma Etkinlikleri Sekreterliği tarafından desteklenmiştir.

## Kaynaklar

- Anderson, B. D. O. ve Moore, J.B. (1990). *Optimal control*, Prentice Hall, New Jersey.
- Golub, G. H. ve Loan, C. F. (1983). *Matrix computations*, Johns Hopkins University Pres, Maryland.
- Haug, E. J. ve Choi, K. K. (1986). *Design sensitivity analysis of structural system*, Academic Press, London.
- Horn, R. A. ve Johnson, C. R. (1995) *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Pres, New York.
- Muğan, A. (2002). Effect of mode localization on input-output directional properties of structure, *Journal of Sound and Vibrations*,. **258**, 45-63.
- Postlethwaite, I. Edmund J. M. Ve Macferlane, A.G.
- Postlethwaite, I. Edmund J. M. ve Macferlane, A.G. J. (1981). Principal gains and principal phases in the analysis of linear multivariable feedback systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **1**, 32-46.