

# Üniform aksenal akım etkisindeki elastik yapıların dinamik analizi için bir sınır eleman metodu

**Bahadır UĞURLU\***, **Ahmet ERGİN**

*İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Gemi İnşaatı Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul*

## Özet

*Akışkan taşıyan ya da aksenal bir akım içine daldırılmış elastik yapıların dinamik analizi için, lineer bir hidroelastik çözüm metodu sunulmuştur. Modal analiz tekniklerinden hareketle geliştirilen metod, bağımsız iki analize dayanmaktadır: (i) yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda elastik yapının dinamik karakteristiklerinin belirlenmesi ve (ii) yapının akışkanla temastayken doğal modlarında hareket ettiği ve her bir modal formun, yapı ıslak yüzeyi üzerinde karşılık gelen bir basınç dağılımına neden olduğu varsayımları altında akışkan probleminin çözülerek, etkileşim kuvvetlerinin hesaplanması. Akışkan-yapı sisteminin davranışı, hidrodinamik kuvvetlerin, yapısal sönüm ve var olan diğer dış yüklerle birlikte genelleştirilmiş hareket denkleminde etkilmesiyle belirlenmektedir. Çözümün ilk aşaması ANSYS sonlu eleman yazılımıyla, ikinci aşama ise yapının elastik hareketlerinin akışkan ortamında neden olduğu pertürbasyonları tanımlayan potansiyel problemin, akışkan-yapı arayüzü üzerinde bir sınır integral denkleminde dönüştürülmesiyle, sayısal olarak gerçekleştirilmektedir. Analizler sırasında, elastik yapının göreceli olarak yüksek frekanslarda titreştiği kabul edilerek, serbest yüzey dalgası etkileri ihmal edilmiş, ortaya çıkan serbest yüzey şartı ise imaj metodu kullanılarak doğrudan sağlanmıştır. Genelleştirilmiş eksu kütlesi, hidrodinamik sönüm ve hidrodinamik rijitlik formunda elde edilen etkileşim kuvvetleri, akışkan ortamının elastik yapı üzerindeki sırasıyla eylemsizlik ve titreşen yapı boyunca aksenal hareketiyle ilişkili Coriolis ve santrifüj etkilerini temsil etmektedir. Uçları basit bağlı silindirik bir kabuk üzerinde yapılan analizler, sunulan metodun güvenilirliğini ve etkinliğini ortaya koymaktadır.*

**Anahtar Kelimeler:** *Dinamik akışkan-yapı etkileşimi, hidroelastisite, dinamik stabilite, aksenal akım etkisindeki elastik sistemler, sınır eleman metodu.*

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Bahadır UĞURLU. bugurlu@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 64 95.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Gemi İnşaatı Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Kısmen akışkanla dolu ve daldırılmış, yüksek frekanslı yapıların hidroelastik analizi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 24.03.2006 tarihinde dergiye ulaşılmış, 24.05.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.10.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## A boundary element method for dynamic analysis of elastic structures subjected to uniform axial flow

### Extended abstract

The dynamic interaction between an elastic structure and a flowing fluid medium is an important aspect in the design of various engineering applications, such as flexible pipe lines conveying fluid, heat exchanger tubes in axial flow, inflatable dams in the presence of flowing water, etc. In all of these systems, fluid affects the dynamical behavior of the structure strongly and in the extreme case may cause instability.

A general 3-D hydroelastic method is presented for linear dynamic analysis of structures subjected to uniform axial flow. The developed numerical approach is based on the fundamental principles of linear hydroelasticity theory, where a weak coupling methodology is preferred and co-use of finite element and boundary integral equation methods for elastic and fluid domains, respectively. By assuming that the structure does not deform the fluid, but only affects it through its elastic vibrations, the interested problem may also be taken as free or self-induced vibrations of elastic structures under the influence of hydrodynamic loads.

The proposed numerical procedure is founded on two separate analysis: (i) evaluation of dynamic characteristics (natural frequencies and corresponding principal mode shapes) in the absence of any external excitation and structural damping (vacuum analysis), and (ii) by assuming that the elastic structure preserves its in-vacuo mode shapes when in contact with fluid, and that each mode shape gives rise to a corresponding surface pressure distribution on the wet part of the structure, solution of the fluid problem and calculation of the generalized fluid-structure interaction forces (wet analysis). In the former stage, a standard finite element software (ANSYS) is adopted and in the latter one, the fluid problem is converted to a boundary integral equation over fluid-structure interface and solved numerically. In this investigation, it is assumed that the fluid is ideal (inviscid and incompressible) and its motion is irrotational. It is also assumed that the elastic structure vibrates at relatively high frequencies so that the effect of surface waves can be neglected. The resulting free surface condition is satisfied implicitly by using method of images. During the analysis, the interaction problem is considered

in two separate parts: (i) the vibration of the elastic structure in a quiescent fluid and (ii) the disturbance in the main axial flow due to the oscillation of the elastic structure.

Using the Bernoulli's equation, the dynamic fluid pressure on the elastic structure is expressed in terms of potential function, and interaction forces are calculated from the pressure distribution over the wetted surface of the structure, as generalized added mass, hydrodynamic damping and hydrodynamic stiffness coefficients, due to the inertia, Coriolis and centrifugal effects of fluid, respectively. By merging the generalized structural matrices (mass and stiffness) with the hydrodynamic matrices, an eigenvalue problem is obtained for the elastic structure immersed in or containing flowing fluid, from which the wet dynamic characteristics of the system is obtained.

In order to demonstrate the applicability of the proposed method, a circular cylindrical shell, simply supported at both ends is studied. The cylindrical shell is considered, separately, with rigid and flexible extensions at its ends. A cylindrical shell with rigid extensions corresponds to a finite length, flexible cylindrical shell connected to infinitely long rigid cylindrical baffles, of the same diameter as the shell at both ends and the cylindrical shell with flexible extensions coincides with one that is infinitely long and periodically supported.

To assess the influence of flowing fluid on the dynamic behavior of the shell structure, the non-dimensional eigenfrequencies are presented as a function of the non-dimensional flow velocity. The imaginary parts of the eigenfrequencies decrease with increasing fluid velocity, and they reach zero values at certain axial fluid velocities, which correspond to points of static divergence. Due to the gyroscopic conservative nature related with Coriolis forces, the cylindrical shell may regain stability with increasing flow velocity and even for further velocities coupled mode flutter may also occur. But both of these are post-divergence behavior of the shell, involving large deformations and so cannot be decided by a linear theory. In general, a very good comparison is obtained between the calculations of the present study and results found in the literature.

**Keywords:** Dynamic fluid-structure interaction, hydroelasticity, dynamic stability, elastic systems subjected to axial flow, boundary element method.

## Giriş

Eksenel bir akımın varlığının tasarım sürecinde belirleyici olduğu farklı mühendislik dallarına ait çok sayıda uygulama (boru hatları, ısı değiştirgeç tüpleri, uçak motorlarında kullanılan ısı kalkanları, jet pompaları, nükleer reaktörler, denizaltılar, fizyolojik borular, vs.), genellikle silindirik kabuk formunda ve narin alınan elastik bir sistemin, akışkan tarafından önemli ölçüde değiştirilen dinamik davranışının araştırıldığı bir etkileşim problemine işaret eder.

Eksenel akım taşıyan ya da içine daldırılmış elastik sistemlerin dinamiği, başlangıçta borularla sınırlı kalmak üzere, 1950’li yıllardan itibaren kapsamlı olarak çalışılmıştır ve konuyla ilgili literatürün önemli kısmına, Païdoussis (1987) ve Païdoussis ve Li’nin (1993) değerlendirmeleri ile konunun tüm yönleriyle ele alındığı Chen (1987) ve Païdoussis’in (1998, 2004) kitaplarından ulaşılabilir. Bazı yakın tarihli çalışmalarda, Amabili ve Garziera (2002) Rayleigh-Ritz metodundan yararlanarak, aksel akım etkisindeki uçları bağlı silindirik kabuklar için genel bir çözüm tekniği sunmuş ve karakteristik denkleme eklenen matrisler yoluyla, üniform olmayan sınır şartları, radyal basınç ya da ön gerilme gibi etkileri probleme dahil etmiş, Zhang ve diğerleri (2002) akışkan taşıyan ortotropik silindirik kabuklar için, ön gerilme ve hidrostatik basınç etkilerinin dikkate alındığı bir sonlu eleman çözümü geliştirmiş, Langthjem ve Olhoff (2003) elastik titreşimlerden kaynaklanan pertürbasyonları kabuk nihayetlerinde ihmal ederek, akışkan potansiyelinin ortonormal giriş modlarına bağlı bir seriyle ifade edildiği bir Galerkin çözümü önermiş ve Uğurlu ve Ergin (2006) yapı/akışkan problemlerinin sonlu/sınır eleman metodlarıyla ele alındığı genel bir sayısal yaklaşımı, yapının akışkanla temas halindeyken doğal modlarında hareket ettiği kabulü altında sunmuştur.

Bu çalışmada, durağan ya da aksel doğrultuda üniform olarak akan bir akışkan ortamıyla etkileşim içindeki elastik yapıların dinamik analizi için, lineer bir çözüm metodu sunulmuştur. Modal analiz tekniklerinden hareketle geliştirilen yaklaşım, bağımsız iki analize, (i) yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda yapının

dinamik karakteristiklerinin (doğal frekanslar ve karşılık gelen titreşim modları) belirlenmesi, ve (ii) yapının akışkanla temastayken doğal modlarında hareket ettiği ve her bir modal formun, yapı ıslak yüzeyi üzerinde karşılık gelen bir basınç dağılımına neden olduğu varsayımları altında akışkan probleminin çözülerek, etkileşim kuvvetlerinin hesaplanmasına, dayanmaktadır. İlk aşama ANSYS (Ansys, 2005) sonlu eleman yazılımıyla, ikincisi ise elastik hareketlerin akışkan ortamında neden olduğu pertürbasyonları tanımlayan potansiyel problemin, akışkan-yapı arayüzü üzerinde bir sınır integral denklemine dönüştürülmesiyle, sayısal olarak gerçekleştirilmiştir. Akışkan-yapı sisteminin davranışı, hidrodinamik kuvvetlerin, yapısal sönüm ve varolan diğer dış yüklerle birlikte genelleştirilmiş hareket denkleminin uygulanmasıyla belirlenmektedir. Analizler sırasında elastik yapının göreceli olarak yüksek frekanslarda titreştiği kabul edilerek, yüzey dalgası etkileri ihmal edilmiş, ortaya çıkan serbest yüzey şartı ise imaj metodu kullanılarak doğrudan sağlanmıştır.

Akışkanın durağan hali için çeşitli kısmi etkileşim problemlerinde (Ergin ve Temarel, 2002, Ergin ve Uğurlu, 2003, Ergin ve Uğurlu, 2004) başarıyla kullanılmış olan metodun, akışkan taşıyan uçları basit bağlı silindirik bir kabuk üzerindeki uygulamaları, sunulan metodun üniform aksel akım etkisindeki yapıların hidroelastik analizi için uygunluğunu ve etkinliğini ortaya koymaktadır.

## Matematik model

### Genelleştirilmiş hareket denklemi

Ayrıklaştırılmış bir yapının dış kuvvetlerin etkisi altındaki davranışını belirleyen hareket denklemi

$$M \ddot{\mathbf{q}} + C_v \dot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (1)$$

ile verilebilir. Burada  $M$ ,  $C_v$ ,  $K$  ve  $\mathbf{P}$ , sırasıyla kütle, yapısal sönüm ve rijitlik matrisleri ile dış kuvvet vektörünü gösterirken,  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  ve  $\ddot{\mathbf{q}}$  sırasıyla yerdeğiştirme, hız ve ivme vektörleridir. Yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda (1) eşitliği

$$M \ddot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = 0 \quad (2)$$

formuna dönüşür ve bir  $\mathbf{q} = \mathbf{u} e^{i\omega t}$  çözümünden:  $\mathbf{F}(t) = U^T \mathbf{P}(t)$  (7)

$$(-\omega^2 M + K)\mathbf{u} = 0 \quad (3) \quad \text{ile verilir.}$$

elde edilir. Serbest sönümsüz yapının harmonik hareketlerini tanımlayan (3) eşitliğinden,  $\omega$  doğal frekansları ve  $\mathbf{u}$  şekil değiştirme modları, yapının dinamik karakteristikleri olarak belirlenir. Modal vektörlerin ortogonalite karakterine dayanarak, baz vektörleri modal vektörlerden oluşan bir vektör uzayı tanımlanabilir ve sistemin genel dinamik davranışı, her bir modal vektöre karşılık gelen davranışlarının bir toplamı olarak,

$$\mathbf{q}(t) = U\mathbf{p}(t) \quad (4)$$

ile verilebilir.  $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  modal matristir ve  $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_n\}^T$  hareketin modal vektör uzayındaki bileşenlerinden oluşan asal koordinat vektörüdür.  $n$ , vakum analiz sırasında hesaplanan modal vektör sayısını göstermektedir. (4) ifadesinin (1) denkleminde kullanılması ve eşitliğin  $U^T$  ile önden çarpılmasıyla, asal koordinatlar cinsinden

$$a\ddot{\mathbf{p}}(t) + b\dot{\mathbf{p}}(t) + c\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (5)$$

genelleştirilmiş hareket denklemi elde edilir. Sırasıyla genelleştirilmiş kütle, viskoz sönüm ve rijitliği ifade eden  $a, b, c$  matrisleri

$$a = U^T M U, \quad b = U^T C_v U, \quad c = U^T K U \quad (6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş kuvvet vektörü  $\mathbf{F}(t)$  ise

### Akışkan probleminin formülasyonu

Elastik bir yapıyla etkileşim içindeki üniform bir akımda meydana gelen değişimler, yapının akışkan alanında varlığıyla bir bozulmaya yol açmadığı, ancak elastik titreşimleri yoluyla etkilediği varsayımı altında incelenecektir. Bu şekilde akışkan problemi, bir üniform aksenal akım problemine dönüşür. Şekil 1'de problemin tipik bir örneği olarak, akışkan taşıyan bir silindirik yapı verilmiştir

Akışkanın ideal (viskoz olmayan, sıkıştırılmaz) ve hareketinin irrotasyonel alınmasıyla,  $\mathbf{v}$  hız alanı bir potansiyel fonksiyonun gradyanı olarak verilebilir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (8)$$

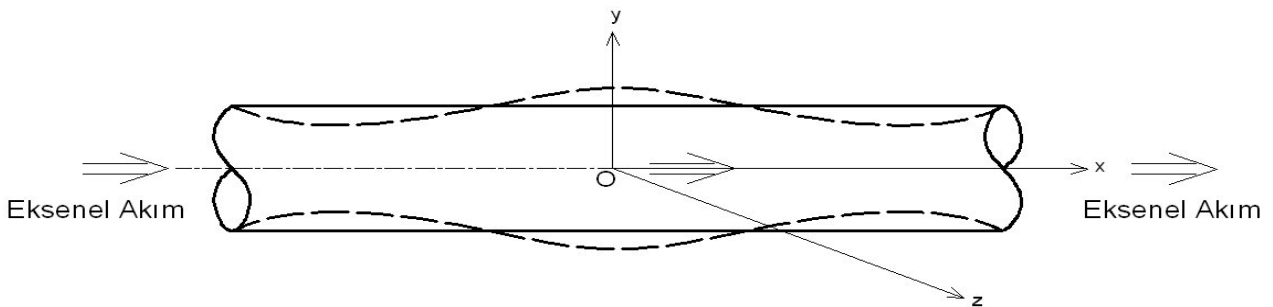
$\mathbf{x} = (x, y, z)$  konum vektörüdür (Şekil 1).  $\Psi$  hız potansiyeli içinse,

$$\Psi = U_x x + \Phi \quad (9)$$

yazılabilir. İfadedeki ilk terim,  $U_x$  üniform akımını temsil ederken, zamana bağlı olan diğeri, yapı hareketlerinin akışkan ortamında oluşturduğu pertürbasyonlarla ilişkilidir ve Laplace denklemini sağlar

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (10)$$

Yapının lineer hareketleri çerçevesinde, genel olarak  $\|\nabla \Phi\| \ll U_x$  geçerlidir.



Şekil 1 Eksenel akım etkisindeki silindirik yapı

Akışkan ortamını çevreleyen sınır yüzeyleri üzerindeki kinematik sınır şartı, yüzey normalini doğrultusundaki akışkan ve yüzey hızlarının eşit olmasını gerektirir ve akışkanın aksenal hareketinin dikkate alınmasıyla,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left( \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + U_x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

ile verilir (Amabili ve Garziera, 2002).  $\mathbf{n}$  birim dış normal vektördür. Hareketin (4) denklemi ile asal koordinatlar cinsinden ifade edilmesi ve  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}e^{\lambda t}$  ile

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial w_r}{\partial t} + U_x \frac{\partial w_r}{\partial x} \right) p_r e^{\lambda t} \quad (12)$$

elde edilir. Burada  $w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  modal vektörün yüzey normalini doğrultusundaki bileşenini,  $\lambda$  ise reel ve sanal kısımları sırasıyla hareket genliğinin zamanla değişimini ve titreşim frekansını veren genel olarak kompleks bir büyüklüğü göstermektedir. Hız potansiyelinin

$$\Phi = \sum_{r=1}^n \phi_r p_r e^{\lambda t} \quad (13)$$

şeklinde alınmasıyla, (12) denkleminde her  $r$  doğal modu için

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial n} = \lambda w_r + U_x \frac{\partial w_r}{\partial x}, \quad r = 1, \dots, n \quad (14)$$

yazılabilir. (13) ifadesi, yapının akışkanla temas halindeyken doğal modlarında hareket ettiği kabulünü yansıtır ve  $\phi_r$ , hareketin  $r$ . moduna, dolayısıyla da asal koordinatların  $r$ . bileşenine karşılık gelen pertürbasyon potansiyelini tanımlar.

Etkileşim problemi, yapının akışkan üzerindeki farklı etkileriyle ilişkili iki ayrı kısım halinde incelenebilir: (i) yapının durağan akışkanla temas içindeyken hareketi, ve (ii) üniform aksenal akımda elastik hareketler neticesinde meydana gelen bozulma. Pertürbasyon potansiyelinin bu ayırma paralelinde

$$\phi_r = \lambda \phi_{r1} + U_x \phi_{r2} \quad (15)$$

olarak alınmasıyla, her bir etkiye karşılık gelen sınır şartları (14) eşitliğinden

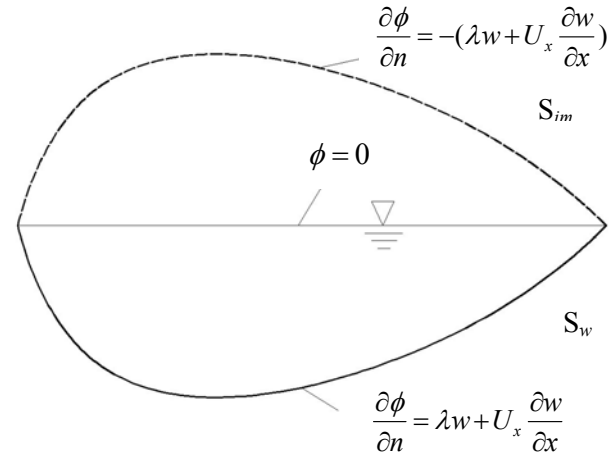
$$\frac{\partial \phi_{r1}}{\partial n} = w_r, \quad \frac{\partial \phi_{r2}}{\partial n} = \frac{\partial w_r}{\partial x} \quad (16)$$

ile verilebilir.

Bu çalışmada, akışkan ortamının etkileşim içinde olduğu yapının göreceli olarak yüksek frekanslarda titreştiği varsayılarak, serbest yüzey dalgası etkileri ihmal edilmiş ve pertürbasyon potansiyeli için serbest yüzey üzerinde,

$$\phi_r = 0 \quad (17)$$

uygulanmıştır. (17) sonsuz-frekans limit şartı, imaj metodu kullanılarak doğrudan yerine getirilebilir. Şekil 2’de görüldüğü gibi, problem alanına ıslak yüzeyin bir imajının eklenmesi ve ters işaretli sınır şartının üzerine uygulanması, serbest yüzeyin ele alınma gerekliliğini ortadan kaldıracaktır. Burada  $S_w$ ,  $S_{im}$ , sırasıyla ıslak yüzey ve imajını temsil etmektedir.



Şekil 2 İmaj metodunun uygulanması

Sınırsız akışkan ortamları için sonsuzda sağlanması gereken uygunluk şartları, yapı hareketlerinin akışkan alanında yol açtığı etkilerin, kaynak noktasından uzaklaştıkça azaldığını ifade eder ve  $R$ , kaynak ile etki ettiği nokta arasındaki uzaklık ise,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi_r = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\partial \phi_r}{\partial R} = 0 \quad (18)$$

ile verilir. Ayrıca akışkan sıkıştırılamazlığının gereği olarak tamamen dolu yapılarda,

$$\iint_{S_w} \frac{\partial \phi_r}{\partial n} dS = 0 \quad (19)$$

olmalıdır.

### Genelleştirilmiş akışkan-yapı etkileşim kuvvetleri

Yapının elastik hareketlerinin akışkan ortamında neden olduğu basınç, Bernoulli denkleminde ikinci mertebeden terimler ihmal edilerek,

$$P = -\rho_f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (20)$$

ile verilebilir (Amabili vd., 1999). (13) ve (15) ifadelerinden  $r$ . titreşim moduyla ilişkili basınç alanı,

$$P_r = -\rho_f \left( \lambda^2 \phi_{r1} + U_x \lambda \left( \frac{\partial \phi_{r1}}{\partial x} + \phi_{r2} \right) + U_x^2 \frac{\partial \phi_{r2}}{\partial x} \right) p_r e^{\lambda t} \quad (21)$$

olarak elde edilir.  $\rho_f$  akışkan yoğunluğudur. Eksenel akım etkisindeki yapının  $r$ . titreşim moduna karşılık gelen genelleştirilmiş akışkan-yapı etkileşim kuvvetlerinin  $k$ . bileşeni, arayüz üzerindeki basınç dağılımına bağlı olarak (7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F_{kr}(t) &= \iint_{S_w} P_r(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -(\lambda^2 A_{kr} + \lambda B_{kr} + C_{kr}) p_r e^{\lambda t} \\ &= -A_{kr} \ddot{p}_r(t) - B_{kr} \dot{p}_r(t) - C_{kr} p_r(t) \end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde verilir. Burada

$$A_{kr} = \rho_f \iint_{S_w} \phi_{r1} w_k dS \quad (23a)$$

$$B_{kr} = \rho_f U_x \iint_{S_w} \left( \frac{\partial \phi_{r1}}{\partial x} + \phi_{r2} \right) w_k dS \quad (23b)$$

$$C_{kr} = \rho_f U_x^2 \iint_{S_w} \frac{\partial \phi_{r2}}{\partial x} w_k dS, \quad (23c)$$

sırasıyla genelleştirilmiş eksu kütlesi, hidrodinamik sönüm ve hidrodinamik rijitlik katsayılarıdır ve akışkan ortamının yapı üzerindeki, sırasıyla eylemsizlik ve titreşen yapı boyunca eksenel hareketiyle ilişkili Coriolis ve santrifüj etkilerini temsil etmektedir.

### Pertürbasyon potansiyelinin belirlenmesi

Laplace denklemini sağlayan iki ayrı  $\Phi$  ve  $\Psi$  potansiyel fonksiyonu için Green'in ikinci özdeşliği,

$$\int_{\Omega} (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (24)$$

şeklinde verilir ve ifade

$$\nabla^2 \Phi^* = -\delta(s, \xi) \quad (25)$$

eşitliğini sağlayan bir  $\Phi^*$  temel çözümünün kullanılmasıyla

$$\Phi(\xi) = \int_{\Gamma} \left( \Phi^*(s, \xi) q(s) - \Phi(s) q^*(s, \xi) \right) d\Gamma \quad (26)$$

yazılabilir.  $\xi$ ,  $\Omega$  problem uzayında temel çözümün uygulandığı kaynak noktasını,  $s$  uzayda genel bir yüklem noktasını temsil etmektedir ve  $q = \partial \Phi / \partial n$ ,  $\Phi$  potansiyelinin,  $\Omega$  uzayını sınırlandıran  $\Gamma$  yüzeyi üzerinde, dış normal doğrultusundaki türevidir.  $\delta(s, \xi)$  ise,

$$\int_{\Omega} f(s) \delta(s, \xi) d\Omega = f(\xi) \quad (27)$$

ile verilen Dirac delta fonksiyonudur. Üç boyutlu uzay için temel çözüm ve normal türevi sırasıyla,

$$\Phi^*(s, \xi) = 1/4\pi r \quad (28)$$

$$q^*(s, \xi) = -(\partial r / \partial n) / 4\pi r^2 \quad (29)$$

olarak tanımlanmıştır (Wrobel, 2002). Burada  $r$ , kaynak ve yükleme noktaları arasındaki uzaklığı göstermektedir. (18) uygunluk şartlarının, (28), (29) ifadelerince sağlandığı açıktır.

(26) eşitliğinde,  $\xi$  kaynak noktasının sınır yüzeyine çekilmesi ve  $s$ ,  $\xi$  noktalarının çakışması sonucunda  $\Phi^*$ ,  $q^*$  fonksiyonlarında oluşacak tekilliklerin dikkate alınmasıyla,

$$c(\xi)\Phi(\xi) + \int_{\Gamma} \Phi(s)q^*(s, \xi)d\Gamma = \int_{\Gamma} q(s)\Phi^*(s, \xi)d\Gamma \quad (30)$$

sınır integral denklemi elde edilir (Gaul ve diğerleri, 2003).  $c(\xi)$ , kaynak noktasının potansiyel alan içinde kalan kısmını yüzey geometrisine bağlı olarak ifade eden serbest terimdir. (30) denkleminin genel çözümü, sınır yüzeyinin ayrıklaştırılması ve potansiyel fonksiyon ve normal türevinin sınır elemanları üzerindeki değişimi için, eleman düğüm noktalarındaki  $\Phi_e$  ve  $q_e$  değerleri cinsinden ve  $N_e$  şekil fonksiyonları yardımıyla verilecek bir yaklaşımla gerçekleştirilebilir:

$$\Phi_e = \sum_{i=1}^{n_e} N_i \Phi_{ei}, \quad q_e = \sum_{i=1}^{n_e} N_i q_{ei} \quad (31)$$

$n_e$  elemanda yer alan toplam düğüm noktası sayısını göstermektedir. Bu çalışmada, fonksiyonların lineer bir dağılımla temsil edildiği dörtgen elemanlar kullanılmıştır.

(31) ifadelerinin (14) sınır şartı dikkate alınarak (30) denkleminde kullanılması ve düğüm noktalarındaki potansiyel fonksiyon ve normal türevlerinin integral dışına alınmalarıyla, elastik yapının  $r$ . şekil değiştirme moduna karşılık gelen pertürbasyon potansiyeli için

$$c(\xi)\phi_r(\xi) + \sum_{e=1}^m \left( \sum_{i=1}^{n_e} \phi_{eir} \int_{\Gamma_e} N_i q^* d\Gamma \right) = \sum_{e=1}^m \left( \sum_{i=1}^{n_e} (\lambda w_{eir} + U_x \frac{\partial w_{eir}}{\partial x}) \int_{\Gamma_e} N_i \Phi^* d\Gamma \right) \quad (32)$$

yazılabilir.  $m$  ayrıklaştırılan ıslak yüzeydeki toplam eleman sayısıdır. Eşitliğin sırayla tüm dü-

ğüm noktalarında uygulanmasıyla elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü, arayüz üzerinde  $\phi_r = \lambda \phi_{r1} + U_x \phi_{r2}$  potansiyel dağılımını verecektir.

**Genelleştirilmiş hareket denkleminin çözümü**  
Üniform aksenal akım etkisindeki elastik bir yapının hareketi, (22) etkileşim kuvvetlerinin (5) genelleştirilmiş hareket denkleminde, dış yükler ve yapısal sönüm dikkate alınmadan uygulanmasıyla,

$$(a + A)\ddot{\mathbf{p}}(t) + B\dot{\mathbf{p}}(t) + (c + C)\mathbf{p}(t) = 0 \quad (33)$$

ile belirlenir. Eşitliğin çözümü, sistemin asal koordinat ve hızlardan oluşan bir durum uzayına taşınmasıyla gerçekleştirilebilir ve  $\mathbf{y}(t)$  durum vektörünün

$$\mathbf{y} = [\dot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{p}]^T \quad (34)$$

ile verilmesiyle, hareket denklemi için

$$\bar{M} \dot{\mathbf{y}}(t) + \bar{K} \mathbf{y}(t) = 0 \quad (35)$$

yazılabilir. Burada  $\bar{M}$  ve  $\bar{K}$  matrisleri

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & a + A \\ a + A & B \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} -(a + A) & 0 \\ 0 & c + C \end{bmatrix} \quad (36)$$

şeklinde tanımlanmıştır ve  $n$  boyutlu bir asal koordinat uzayında  $2n$  boyuta sahiptirler.  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}e^{\lambda t}$  formundaki bir çözümden (35) eşitliği,

$$(\lambda \bar{M} + \bar{K}) \mathbf{z} = 0 \quad (37)$$

özdeğer problemiyle neticelenir.  $\lambda$  özdeğerleri ve  $\mathbf{z}$  özvektörleri, genel olarak kompleks büyüklüklerdir ve katsayı matrislerinin reel olmasının bir sonucu olarak, eğer sanal bir bileşene sahipse, her bir şekil değiştirme moduna karşılık daima eşlenik çiftler olarak elde edilirler. Akışkanın durağan hali ( $U_x = 0$ ) için etkileşimin yalnızca eksu kütlesi formunda kurulmasıyla, özdeğerler  $\lambda = \mp i\omega$ , özvektörler reel büyüklükler olarak belirlenir. Aksenal akım etkisindeki

yapının ıslak mod şekilleri, asal koordinatlara ve doğal modlara bağlı olarak (4) denkleminde hesaplanır

$$\mathbf{q}_i = \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j p_{ij} \right) e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (38)$$

### Eksenel akım etkisindeki silindirik kabukların dinamik analizi

Sunulan metodun bir uygulaması olarak, üniform eksenel akım taşıyan dairesel en kesitli silindirik bir kabuk ele alınmıştır. Uçları basit bağlı olan kabuğun geometrik ve malzeme özellikleri, uzunluk-yarıçap oranı  $L/R = 2$ , kalınlık-yarıçap oranı  $h/R = 0.01$  ve elastisite modülü  $E = 206$  GPa, Poisson oranı  $\nu = 0.3$ , yoğunluk  $\rho_s = 7850$  kg/m<sup>3</sup> şeklindedir. Dairesel silindirik kabukların mod şekilleri, çevresel dalga sayısı  $n$  ve eksenel yarım dalga sayısı  $m$  ile tanımlanır ve sunulan matematik model paralelinde, her  $(n, m)$  çifti için kabuğun, radyal, çevresel ve eksenel bileşenlerin baskın olduğu mod gruplarından, sadece radyal olanların dikkate alınması yeterlidir. Analizler sırasında kabuk ince ve üniform, malzeme ise homojen ve izotrop alınmış, kayma deformasyonu, dönülme eylemsizlik, öngerilme, vs. kaynaklı etkilerin kabuk davranışı üzerindeki etkileri ihmal edilmiştir. Islak analizlerde kullanılan kabuğun vakum dinamik karakteristikleri, ANSYS (Ansys, 2005) sonlu eleman yazılımıyla belirlenmiş, kabuk modelleri membran ve eğilme yüklerini taşıyabilen SHELL63 elemanları ile oluşturulmuştur. Hesaplanan  $\lambda$  özdeğerleri ve ek olarak akım hızları, bir  $\lambda_0 = (\pi/L)^2 (Eh_s^2 / (12(1-\nu^2)\rho_s))^{1/2}$  katsayısı (Weaver ve Unny, 1973) ile boyutsuzlaştırılarak,

$$\Lambda = \lambda / \lambda_0, \quad V_x = U_x / (\lambda_0 L) \quad (39)$$

şeklinde verilmiştir. Kullanılan akışkan,  $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup> yoğunluğa sahip tatlı sudur.

Üniform eksenel akım etkisindeki silindirik kabuk sistemler üzerine gerçekleştirilen çalışmalarda verilen çözümlerin bir kısmı (Païdoussis ve Denise, 1972, Amabili ve Garziera, 2002), doğal gereği, sonsuz uzunlukta ve periyodik

olarak desteklenmiş kabuğun, iki destek noktası arasındaki sonlu bir parçasının ele alınmasını gerektirirken (elastik uzatılmış kabuk), diğer yanda nihayetlerinden sonsuz uzunluktaki rijit silindirlere bağlanmış (rijit uzatılmış) kabuklar için sunulan modellerin (Weaver ve Unny, 1973, Amabili vd., 1999) varlığı, kabuğun incelenen kısmı ötesindeki akışkan davranışı bakımından ayrılan iki yaklaşıma işaret eder. Yaklaşımlar arasında, genel olarak frekans ve kritik hız değerleri bakımından söz konusu olan farklılıklar (Amabili vd., 1999), akışkan uç etkilerinin artan kabuk boyuyla birlikte azalmasıyla, giderek ortadan kalkmaktadır. Hidroelastik metodun her iki durumu yansıtacak şekilde uygulanması, dinamik karakteristikleri belirlenen kabuğun nihayetlerine, ıslak analiz sırasında bir ya da sonuçların artan silindir sayısı ile değişkenlik göstermesi durumunda daha fazla sayıda rijit veya elastik silindir eklenmesiyle yerine getirilebilir.

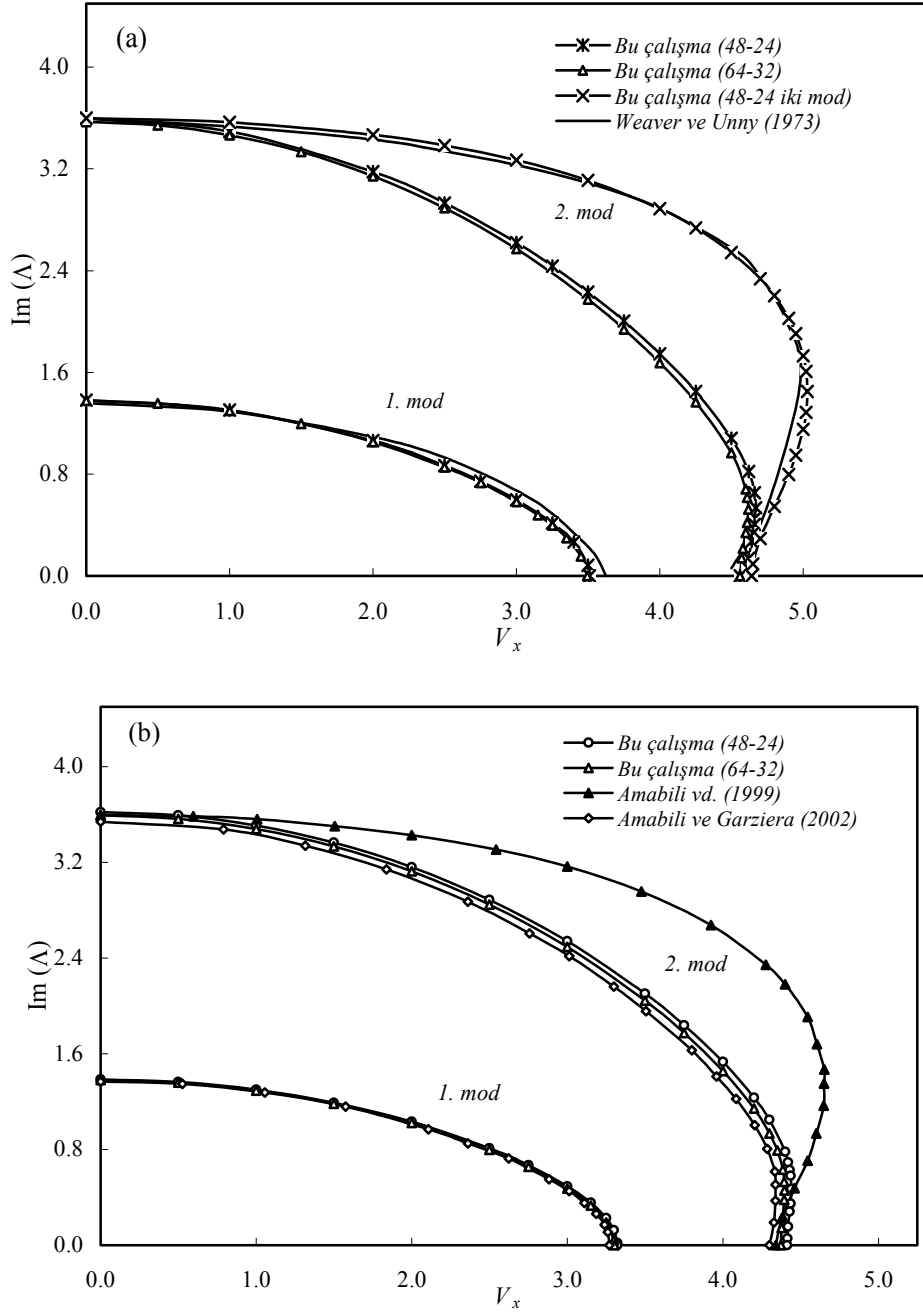
### Metodun yakınsaklığı ve sonuçların karşılaştırılması

Öncelikle sunulan metodun yakınsaklık ve doğruluğunun test edilmesi amacıyla, çevresel ve eksenel eleman sayıları sırasıyla 48/24 ve 64/32 olan iki farklı sınır eleman modeli üzerinde ve modlar arası hidrodinamik etkileşim etkilerinin dikkate alınabilmesi için 6 mod çifti<sup>1</sup> kullanılarak gerçekleştirilen çeşitli analizlerin sonuçları, sistemin taşıdığı davranış özellikleri üzerinde durulmadan değerlendirilmiştir. Kabuğun rijit uzatılmış modeli kullanılarak ilk iki  $n = 5^2$  modu için elde edilen frekans-akım hızı eğrileri, Weaver ve Unny (1973)'nin Galerkin metodu ile elde ettiği sonuçlarla birlikte Şekil 3a'da görülmektedir. Kabuk nihayetlerine eklenen  $\partial\Phi/\partial n = 0$  şartının uygulandığı rijit silindirlerin sınır eleman modeline dahil edilmesiyle hesaplanan değerler ile sadece kabuk yüzeyi gözönüne alınarak belirlenenler arasındaki farkların ihmal edilebilecek oranlarda kalması, küçük sayılabilecek bir  $L/R$  oranı için dahi, akışkan

<sup>1</sup> Dairesel silindirik kabuklar, eksenel simetrik yapıları sebebiyle her  $n > 0$  mod için, aynı frekansa ve mod şekline sahip, ancak açılarda  $\pi/2n$  kadar dönmüş ikinci bir moda sahiptir.

<sup>2</sup> Kabuk ilk olarak  $n = 5$ 'de kararsız hale gelmektedir.





Şekil 3. Üniform aksenal akım taşıyan uçları basit bağlı silindirik kabukta,  $n = 5$  için frekans-akım hızı eğrileri (a) rijit uzatılmış kabuk (b) elastik uzatılmış kabuk

hareketinin kabuk nihayetleri sonrasında sınırlandırılmasının davranış üzerinde belirleyici olmadığına ve etkilerinin dikkate alınmasının gerekmediğine işaret etmektedir. İki sınır eleman modeliyle elde edilen frekans değerleri arasındaki farkların her iki modda  $V_x \leq 2.5$  için<sup>3</sup> %

<sup>3</sup> Akım hızının bu değeri geçmesiyle frekansların değişim hızının göreceli olarak artması, farklarda yanıltıcı bir artışa yol açmaktadır.

0.5-1.4 aralığında kalması ve kritik akım hızı değerlerinin<sup>4</sup> çok küçük oranlarda değişmesi (sırasıyla % 0.5 ve % 0.02), 64/32 modelinin sistemi yeterli doğrulukta temsil ettiğini göster-

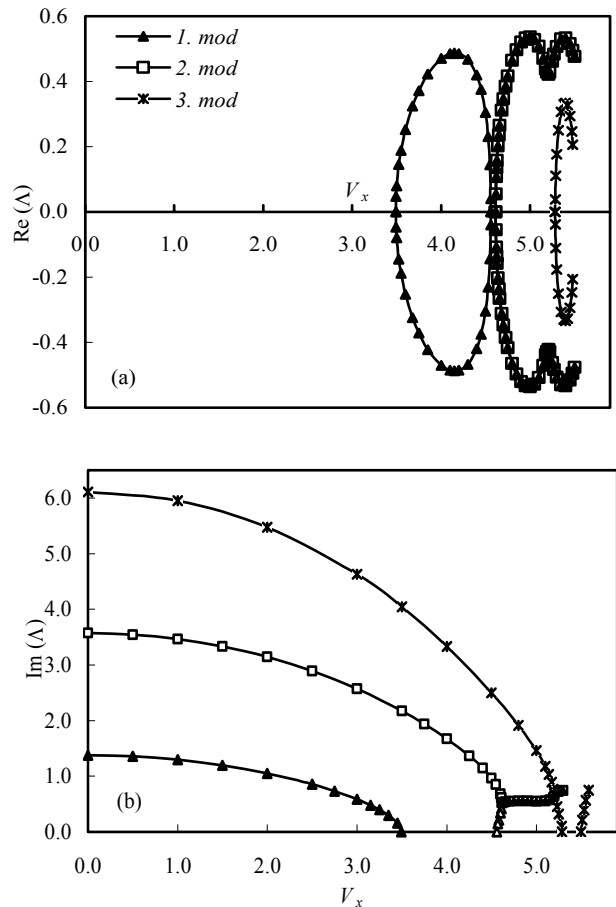
<sup>4</sup> Burada genel bir kritik akım hızı ifadesi kullanılarak frekansın sıfır değerini aldığı belirtilmek istenmiştir. İleride görüleceği gibi, kritik akım hızının, kabuğun o anki dinamik durumu vurgulanarak kullanılması daha uygundur.

mektedir. Sınır eleman ve Galerkin sonuçları karşılaştırıldığında ise, ilk mod genelinde ve ikinci kiritik hız değerinde belirgin bir uyum görülürken, ikinci moda ait frekans eğrilerinin önemli derecede birbirlerinden ayrılması dikkat çekmektedir. Ancak grafikteki sadece iki eksnel mod kullanılarak elde edilmiş sınır eleman eğrisinin Galerkin değerlerine oldukça yakın olmasından da anlaşılabilir gibi, Galerkin çözümünde kabuk hareketinin iki terimle ifade edilmesiyle modlar arası hidrodinamik etkileşimin yeterince dikkate alınmamış olması, çözüm fonksiyonunun artan akım hızıyla birlikte ikinci modun gerçek davranışını yansıtmakta yetersiz kalmasıyla sonuçlanmaktadır. İkinci kiritik hız değerinin bu durumdan etkilenmemesi ise sistem elastikiyetiyle ilişkilidir ve ileride üzerinde durulacaktır. Şekil 3b’de ise, ilk iki  $n = 5$  modu için elastik uzatılmış kabuk yaklaşımıyla hesaplanan frekans-akım hızı eğrileri, Amabili ve diğerleri (1999) ve Amabili ve Garziera (2002) tarafından verilen sonuçlarla birlikte sunulmuştur. Elastik uzantılar uçlara eklenen birer silindire modellenmiş, silindir sayısının daha fazla artırılması değerlerde bir değişiklik getirmemiştir. İki sınır eleman modeli sonuçları arasındaki farkların küçük oranlarda kalması (kritik akım hızı değerinde % 1.0,  $V_x \leq 2.5$  için frekans değerlerinde % 1.6’nın altında), 64/32 modelinin yeterliliğini bir kez daha göstermektedir. Diğer çalışmalarla yapılan karşılaştırmalarda ise, Amabili ve Garziera (2002)’nin Rayleigh-Ritz sonuçlarıyla her iki modda büyük uyum yakalanırken, Amabili ve diğerleri (1999)’nin Galerkin çözümüyle farklılıklar göze çarpmaktadır ki, ikinci moda ait Galerkin eğrisinin Şekil 3a’daki Weaver ve Unny (1973)’nin rijit uzatılmış kabuk çözümü ile taşıdığı benzerlikten anlaşılacağı gibi, Galerkin çözümünde ikinci kritik hız değerine bir yaklaşımın verilebilmesine rağmen, frekansın hızlanan akımla değişimi doğru bir şekilde ifade edilememiştir.

### Dinamik davranış ve stabilite problemi

Silindirik kabuğun ilk üç  $n = 5$  moduna ait özdeğerlerin reel ve sanal kısımlarının (sırasıyla sönüm katsayısı ve frekans) akım hızıyla değişimi, rijit uzatılmış model için Şekil 4’te sunulmuştur. Hızlanan akımla birlikte frekansların

tüm modlarda düşmesi, akışkan santrifüj kuvvetinin sistem elastikiyetini azaltıcı etkisinin bir sonucudur ve kuvvetin akım hızının karesiyle orantılı olması sebebiyle (bkz. denklem 23c), giderek hızlanan bir şekilde gerçekleşmektedir. Bu sırada sönüm katsayılarında görülen sıfır değeri, sistemin korunumlu olduğunu simgelerken (aksi durumda mod genliklerinin zamanla değişmesi gerekirdi), korunumlulukla ilişkili olarak Coriolis kuvvetlerinden kaynaklanan jiroskopik karakter, dinamik davranış üzerinde özellikle belirleyicidir. Akımın hızlanarak  $\text{Re}(\Lambda) = \text{Im}(\Lambda) = 0$  ile tanımlanan kritik bir değere ulaşmasıyla ( $V_{xd} = 3.495$ ) elastikiyet ve dolayısıyla frekans ilk mod için kaybolmakta, değer aşılmasıyla da kabuk burkularak kararsızlaşmaktadır.  $V_x < V_{xd}$  için sanal olan ilk moda ait özdeğerlerin burkulmayla birlikte reel



Şekil 4. Üniform aksnel akım taşıyan, uçları basit bağlı rijit uzatılmış silindirik kabukta, ilk üç  $n = 5$  moduna ait özdeğerlerin akım hızıyla değişimi (a) reel kısım (b) sanal kısım

büyükliklere dönüşmesi de, bu durumun göstergesidir. Sönüm eğrisinin taşıdığı simetri, özdeğer probleminin çözümünün her bir mod için mutlak değerce eşit ancak ters işaretli iki değer vermesiyle ilişkilidir ve fizikselden ziyade matematiksel bir sonuçtur. Sönüm katsayısının pozitif kolunun lineer teorideki karşılığı sınırsızca artan genliklerse de, ihmal edilen non-lineer kuvvetlerin büyüyen yerdeğiştirmelerle birlikte devreye girecek olması, gerçek davranışın daha farklı olmasıyla neticelenir: Kabuk yanal bir şekil değiştirmeye uğrar ve burkulmuş formda yeni bir denge konumu edinir. Burkulmanın, santrifüj kuvvetinin sistem elastikiyetine üstün gelmesiyle oluşan bir durum olması sebebiyle, salt elastikiyet açısından yaklaşılarak kararsızlık durumlarının araştırılması mümkün görülebilir. (33) hareket denklemi ve (23c) genelleştirilmiş santrifüj kuvveti ifadesinden elde edilen:

$$\left| c + \rho_f U_x^2 \iint_{S_w} (\partial \phi_2 / \partial x) w dS \right| = |c + C(U_x)| = 0 \quad (40)$$

eşitliğinin<sup>5</sup> çözümü, elastikiyetin ortadan kalktığı akım hızlarını verecektir. Aksenal akım etkisindeki silindirik kabuğun salt korunumlu bir sistem olması halinde,  $\text{Re}(\Lambda) \neq 0$ ,  $\text{Im}(\Lambda) = 0$  ile belirtilen kararsızlık (burkulma) halinin hızlanan akımla devam etmesi ve üniform akımın (40) denklemiyle belirlenen diğer kritik hızlara ulaşmasıyla, kabuğun sırasıyla diğer modlarda da burkulması beklenebilirdi. Ancak sistemin jiroskopik karakterine bağlı olarak, ikinci kritik hız olan  $V_{xr} = 4.56$  değerinde gerçekleşen ikinci modun burkulması değil, ilk modun tekrar kararlı hale gelmesidir. Şekil 4'den görüldüğü gibi  $\text{Re}(\Lambda) = 0$ ,  $\text{Im}(\Lambda) > 0$  durumuna geri dönmüş ve ilk modun frekans değerleri paradoksal olarak yükselmeye başlamıştır. Sadece elastikiyet açısından yaklaşarak, jiroskopik korunumlu bir sistemin stabilitesinin incelenmesinin yanıltıcı olabileceği ve hesaplanan kritik hızların bir burkulma veya yeniden denge konumuna işaret et-

tiğinin saptanması için dinamik bir analizin gerekliliği bu noktada açıktır. Akım hızında küçük bir artışla birlikte, sönümsüz durumdaki sistemde yeni bir davranış ortaya çıkar. İlk mod,  $V_{xf} = 4.62$  değerinde ikinci mod ile eşit özdeğerlere ulaşarak çakışmakta ve özdeğerlerin reel kısımları burkulmada olduğu gibi ters işaretli olan iki kola ayrılmaktadır. Ancak  $\text{Im}(\Lambda) > 0$  ile kabuğun harmonik hareketlerini sürdürmesi sebebiyle, negatif sönüme karşılık gelen pozitif kol sistemi bu kez dinamik bir kararsızlığa sokmaktadır ve iki moda ait hareketlerin birlikteliği neticesinde söz konusu olan birleşik bir dinamik kararsızlıktır. Her ne kadar sönüm katsayısı değerleri genliklerdeki artışın sınırsızlığına işaret etse de, fiziksel olarak dinamik kararsızlık, sıfırdan sonlu bir genliğe doğru kendi kendine gelişen sabit frekanslı salınımlar şeklinde görülür. Korunumlu sistemlerde kararsızlığın sadece burkulma yoluyla gerçekleşebileceği belirtilmiştir (Ziegler, 1968), ancak sistemin ek olarak jiroskopik de olması durumunda, dengenin tekrar sağlanması ve yük parametresinin (şimdiki durumda akım hızı) yükselmesiyle farklı bir formda tekrar kararsızlaşabilmesi, en azından lineer teoriye göre mümkün görünmektedir. Akım hızının daha yüksek değerleri için kabuğun ilk ve ikinci modlardaki birleşik dinamik kararsızlık halinin devam ettiği, üçüncü modun ise, ilk moda benzer şekilde (40) eşitliğinin üç ve dördüncü köklerinde (kritik hızlarda) sırasıyla önce burkulup sonrasında kararlı hale döndüğü, Şekil 4'den görülebilir.

## Sonuçlar

Durağan ya da aksenal doğrultuda üniform olarak akan bir akışkan ortamıyla etkileşim içindeki elastik yapıların dinamik analizi için, lineer bir çözüm metodu sunulmuştur. Metodu literatürde yer alan diğer çalışmalardan ayıran başlıca özellikler, üniform aksenal akım etkisindeki elastik sistemlerin dinamik analizi için genel bir çözüm çerçevesi sunan ilk yaklaşım olması ve akışkan ve yapı arasında kısmi etkileşimin söz konusu olduğu problemlerin çalışılmasına izin vermesidir. Uçları basit bağlanmış bir silindirik kabuk üzerinde gerçekleştirilen analizlerde ulaşılan sonuçların bir kısmı şu şekilde verilebilir:

<sup>5</sup> Burkulmanın statik bir kararsızlık olduğundan yola çıkarak, hareket denkleminde zamana bağlı terimlerin ihmal edilmesine de karşılık gelir.

(i) Silindirik kabuğun belirlenen davranış karakteri ve literatürde yer alan diğer çalışmalarla frekans değerlerinin akım hızıyla değişimi cinsinden yapılan karşılaştırmalar, akışkan-yapı sistemlerinin verilen matematik model kapsamındaki analizinin, sunulan metod kullanılarak doğru ve etkin bir şekilde gerçekleştirilebileceğine işaret etmektedir.

(ii) Coriolis kuvvetlerinin varlığına bağlı olarak, sistemin jiroskopik korunumlu alındığı uçları bağlı silindirik kabuk sistemlerde, santrifüj kuvvetleri eksenel bir yük şeklinde davranarak, sistem elastikyetini (ve frekans değerlerini) akım hızıyla orantılı şekilde azaltır ve hızın eşik bir değeri için elastikyetin tamamen ortadan kalkmasıyla da statik bir kararsızlık gerçekleşir. Akım hızının daha yüksek değerleri için, burkulan modun kararlılığını geri kazandığı ve takiben, ilk iki modun birlikte yer aldığı dinamik kararsızlıkların varlığı gözlenmişse de, lineer bir teori kapsamında ve kararsızlık sonrası için öngörülmelemleri sebebiyle fiziksel gerçeklikleri şüpheli olup, salt teorik sonuçlar olarak alınabilirler.

(iii) Burkulmanın santrifüj kuvvetinin sistem elastikyetine üstün gelmesiyle karşılaşılan statik bir durum olması sebebiyle, doğrudan elastikyetin kayb olduğu akım hızları araştırılarak kritik durumların saptanması mümkün görülebilir. Korunumlu sistemler için ilk kritik durum bu şekilde tespit edilebilir, ancak kararsızlık sonrası kararlı hale geri dönüşün (lineer bir teori dahilinde) olabilirliliği, hesaplanan kritik hız değerlerinin karşılık geldiği durumların belirlenmesi için, genel olarak dinamik bir analizi gerektirir.

## Kaynaklar

Amabili, M., Garziera, R., (2002). Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part II: Shells containing or immersed in axial flow, *Journal of Fluids and Structures*, **16**, 31-51.

Amabili, M., Pellicano, F., Païdoussis, M.P., (1999). Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part I: Stability, *Journal of Sound and Vibration*, **225**, 655-699.

Ansys, (2005). *User's Manual*, ANSYS Inc., Houston.

Chen, S.-S., (1987). *Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington.

Ergin, A., Temarel, P., (2002). Free vibration of a partially liquid-filled and submerged, horizontal cylindrical shell, *Journal of Sound and Vibration*, **254**, 951-965.

Ergin, A., Uğurlu, B., (2003). Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid, *Journal of Fluids and Structures*, **17**, 927-939.

Ergin, A., Uğurlu, B., (2004). Hydroelastic analysis of fluid storage tanks by using a boundary integral equation method, *Journal of Sound and Vibration*, **275**, 489-513.

Gaul, L., Kögl, M., Wagner, M., (2003), *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Langthjem, M.A., Olhoff, N., (2003). Modal expansion of the perturbation velocity potential for a cantilevered fluid-conveying cylindrical shell, *Journal of Fluids and Structures*, **17**, 147-161.

Païdoussis, M.P., (1987). Flow induced instabilities of cylindrical structures, *Applied Mechanics Reviews*, **40**, 163-175.

Païdoussis, M.P., (1998). *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and axial flow-Vol 1*, Academic Press, London.

Païdoussis, M.P., (2004). *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and axial flow-Vol 2*, Elsevier Academic Press, London.

Païdoussis, M.P., Dennis, J.-P., (1972). Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, **20**, 9-26.

Païdoussis, M.P., Li, G.X., (1993). Pipes conveying fluid: A model dynamical problem, *Journal of Fluids and Structures*, **7**, 137-204.

Uğurlu, B., Ergin, A., (2006). A hydroelasticity method for vibrating structures containing and/or submerged in flowing fluid, *Journal of Sound and Vibration*, **290**, 572-596.

Weaver, D.S., Unny, T.E., (1973). On the dynamic stability of fluid-conveying pipes, *Journal of Applied Mechanics*, **40**, 48-52.

Wrobel, L.C., (2002). *The Boundary Element Method, Volume 1, Applications in Thermo-Fluid and Acoustics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Zhang, Y.L., Reese, J.M., Gorman, D.G., (2002). Initially tensioned orthotropic cylindrical shells conveying fluid: A vibration analysis, *Journal of Fluids and Structures*, **16**, 53-70.

Ziegler, H., (1968). *Principles of Structural Stability*, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.