

# İki boyutlu betonarme yapı elemanlarında doğrusal olmayan sonlu eleman yaklaşımı

Yıldır AKKAYA\*, Zekai CELEP

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Homojen ve izotrop malzeme için geliştirilen sonlu eleman yönteminin betonarme yapı elemanlarına uygulanmasında genellikle çeşitli sorunlarla karşılaşılır. Bilindiği gibi betonarme davranışı farklı olan beton ve donatıdan oluşur. Donatı bir homojen malzeme olarak kabul edilebildiği için malzeme özellikleri kolaylıkla tanımlanabilir. Diğer taraftan beton mekanik özellikleri oldukça geniş alana dağılan bir heterojen malzemedir. Bu iki malzemenin yük etkisinde etkileşimi, betonun çatlamasının ve çatlama sonrası davranışının tanımlanması gerçekçi bir model geliştirmede önemli güçlükler ortaya çıkarır. Bu güçlükler beton için gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının oluşturulmasını karmaşıklaştırır. Beton ve donatı arasında şekil değiştirme uygunluk koşullarının sağlanması kolay bir iş değildir. Uygunluk koşullarını sağlamak için yapılan kabuller modelin davranışını etkiler. Davranış doğrusal olmadığı için, sayısal işlem hacmini arttıran adım adım çözümleme gerekli olur. Bu artış, kullanılan yaklaşım kriterleri ve sayısal stabilite problemleri, mühendislik problemlerinde birincil öneme sahip olan denge denklemlerinin sağlanmasını zorlaştırır. Bu çalışmada monoton artan yüklemde iki boyutlu kabul edilebilecek betonarme kiriş, yüksek kiriş, perde gibi yapı elemanlarının doğrusal olmayan davranışı için kullanılan bir sonlu eleman çözüm modelinde beton ve donatı davranışının modellenmesi ve doğrusal olmayan artımlı çözümlemenin formülasyonu verilmiştir. Önerilen sonlu eleman çözüm modelinde beton ve donatı elemanların malzeme ve eleman rijitlik matrisleri ayrı ayrı oluşturulmuş ve daha sonra birleştirilmiştir. Betonun güç tükenmesi, çatlaması ve donatının akmasını içerecek şekilde, malzemenin doğrusal olmayan davranışı için gerekli olan, artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi bu çözüm modelinde kullanılmıştır.*

**Anahtar Kelimeler:** Betonarme, beton, monoton artan yükleme, sonlu elemanlar.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Yıldır AKKAYA. yakkaya@ins.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 38 48.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Düzlem gerilme durumunda betonarme elemanların doğrusal olmayan davranışlarının sonlu eleman yöntemiyle incelenmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 10.04.2006 tarihinde dergiye ulaşılmış, 17.07.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.12.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Nonlinear finite element approach for two-dimensional reinforced concrete structural elements

### Extended abstract

Finite element method developed for homogenous and isotropic material can be applied in structural engineering on analysis of reinforced concrete elements. As it is well known, reinforced concrete consists of two materials, i.e., concrete and steel, which have different mechanical behavior. Steel can be considered a homogenous material and its material properties are well defined. On the other hand concrete is a heterogeneous material having mechanical properties scatter very widely. Interaction of these two materials under loading and crack formation in concrete are prime difficulties which have to be considered for developing realistic finite element models. In the present study, a finite element model is developed for the nonlinear behavior of the two-dimensional reinforced concrete structural elements subjected to monotonic increasing loading. Stiffness matrices and typical finite elements are developed separately for concrete and steel. Since step-wise solutions is required to capture the nonlinear behavior of the materials, incremental stress-strain relationship is used in the analysis by including effects of cracking and failure of concrete as well as yielding of steel.

Behavior of concrete is not easy to define. However, it can be roughly divided into three stages: the uncracked elastic stage, the development of cracks and the highly nonlinear plastic stage. In the present study an incremental biaxial orthotropic finite element for concrete is adopted. This model is assumed that the orthotropic material axes coincide with the principal axes of the total strain. Furthermore, it is assumed that the principal axes of total stresses coincide with those of total strains. The concept, which is known as "equivalent uniaxial strain", is used to represent the biaxial behavior of concrete in this study. By using the concept of "equivalent uniaxial strain", the biaxial behavior of concrete is derived from uniaxial stress-strain relations. This model is based on an incremental stress-strain relation. Generally, the axes of orthotropy change continuously during the analysis at each iteration step. Consequently so does the principal axis of stress. This approach is known as "the rotating crack model". For each axis of orthotropy the uniaxial stress strain curves used for obtaining the total stresses and the

material properties in the principal directions are determined. These stresses in the local axes are transformed to the stresses in the global axes. The stiffness matrix of the element for the biaxial case is obtained in the orthotropic directions. The stiffness matrix in the orthotropic directions is transformed to the stiffness matrix in the global reference system. Characteristic values of the uniaxial curves are obtained from the biaxial strength envelope depending on the location of the stress point in the stress plane. The two incremental stress-strain relations are developed and used for representing the one for the uncracked and the other for the cracked concrete. The effect of cracking in concrete is taken into consideration by using the smeared cracked model. Quadrilateral finite elements having four nodes are adopted for concrete and web steel reinforcement. Furthermore, four integration points are used for the surface integrations.

Reinforcing steels is represented in two ways in this study; i.e., discrete and smeared (distributed) models. In the discrete modeling case, it suffices to idealize the steel bars as a one-dimensional two-node truss element, subjected only to constant axial forces for computational simplicity. In case of the smeared model the reinforcing steel is assumed to be distributed over the concrete element at a certain orientation angle relative to the global axes. In the two dimensional problems, as it is the case in the present study, the nodal points have two degrees-of-freedom. A uniaxial stress-strain relation needs to be specified for the reinforcing steel. An elastic-linear hardening model is used for the modeling axial behavior of the reinforcing steel. The relative displacement or slip between concrete and steel is ignored and the perfect bond is assumed.

Various numerical solutions are carried out to check the accuracy of the model and to predict the behavior of the different reinforced concrete elements. The present study includes the numerical analyses for deep beams, where the effects of various parameters on the behavior of the deep beams are investigated in detail. The figures, which represent the numerical results, show clearly the behavior of the deep beam, the failure mechanism and the development of cracks. A comparison of the results with the experimental results shows that the model provides a very good approach.

**Keywords:** Reinforced concrete, concrete, monotonic increasing load, finite elements.

## **Giriş**

Betonarme elemanların boyutlandırılması (normal kuvvet, eğilme momenti, kesme kuvveti ve burulma momenti etkisi altında kullanma yükleri etkisinde davranışı veya güç tükenme yüklerinin bulunması) mukavemet derslerinde verilen ilkelerin küçük değişikliklerle uygulanmasından ibarettir. Buna karşılık elastisite teorisinin ilkelerinin uygulanması (gerilme ve şekil değiştirme kavramlarından hareket edilmesi) ile çözüm elde edilmesinde büyük zorluklarla karşılaşılır. Bunun en önemli nedenleri arasında; genel olarak betonun çok eksenli gerilme altında bulunması, çekme ve basınç gerilmeleri altında farklı davranışı, beton ve çeliğin değişik yük etkileri altında karmaşık etkileşimidir. Betonarme yapı elemanlarında düşük gerilme altında bile beton çatlaklar oluşur. Bu çatlaklar, artan yük etkileri ile elemanda yayılarak genişler. Bu çatlakların ilerleyişi, bütün yapının yada elemanın yük-yerdeğiştirme davranışını etkiler; bazı bölgelerde gerilme ve şekil değiştirmelerin daha da artmasına neden olur. Bu tür davranışın incelenmesi için yapılacak deneysel çalışmalar için gerekli zaman ve maliyet de yüksektir. Ngo ve Scordelis (1967) doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemini betonarme kirişlere uyguladığından beri, bu teknik gelişerek karmaşık betonarme elemanların davranışının belirlenmesi ve tasarımında önemli bir hesap aracı olmuştur.

Betonarme yapı elemanların doğrusal olmayan çözümü ile ilgili geliştirilen teorilerin temel esasları, sonlu elemanlar yönteminde karşılaşılan zorluklar, çözümleme yöntemleri ve uygulamalar ASCE Committee 447 (1982), ASCE Committee 447 (1993), Kotsovovs ve Pavlovic (1995) ve ACI-ASCE Committee 447 (2001) tarafından değerlendirilmiştir. Mühendislik malzemesi olarak gerilme-şekil değiştirme bağıntıları; elastik malzeme kabülü ile modellerin ayrıntılı incelemesi ve yapılan çalışmaların değerlendirilmesi Chen ve Saleeb (1994) ve plastik beton ve metal malzeme modellerin ayrıntılı incelenmesi Chen (1994) tarafından yapılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde programlama ile ilgili derleme ise Crisfield (1997) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada monoton artan yüklemeye iki boyutlu kabul edilebilecek kiriş, yüksek kiriş ve perde gibi betonarme yapı elemanlarının doğrusal olmayan davranışı için geliştirilen bir sonlu eleman çözüm modelinde beton ve donatı davranışının tanımlanması ve doğrusal olmayan artımlı çözümleme yöntemi verilmiştir. Bu sonlu eleman çözüm modeli için, Smith ve Griffiths (1997) tarafından yapılan çalışmadan da yararlanarak, hazırlanan bilgisayar programı ile bir yüksek kiriş üzerinde yapılan çözümlerin sonuçları incelenmiştir.

## **Malzeme modelleri**

### **Beton**

Geliştirilen sonlu eleman çözüm modelinde beton doğrusal olmayan davranışa sahip iki eksenli ortotrop malzeme olarak tanımlanır. Ortotrop malzeme eksenlerinin toplam şekil değiştirme asal eksenleri ile çakıştığı kabul edilir. Ayrıca beton asal şekil değiştirme ile asal gerilme doğrultularının çakıştığı da kabul edilmektedir. Düzlem gerilme durumunda betonun mekanik davranışını tanımlamak için gerekli iki eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisi, ortotrop malzeme eksenlerinde tanımlanan ve deneysel olarak elde edilen bir eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisinden türetilen “eşdeğer bir eksenli şekil değiştirme” olarak bilinen yaklaşım ile oluşturulur (Darwin ve Pecknold, 1977).

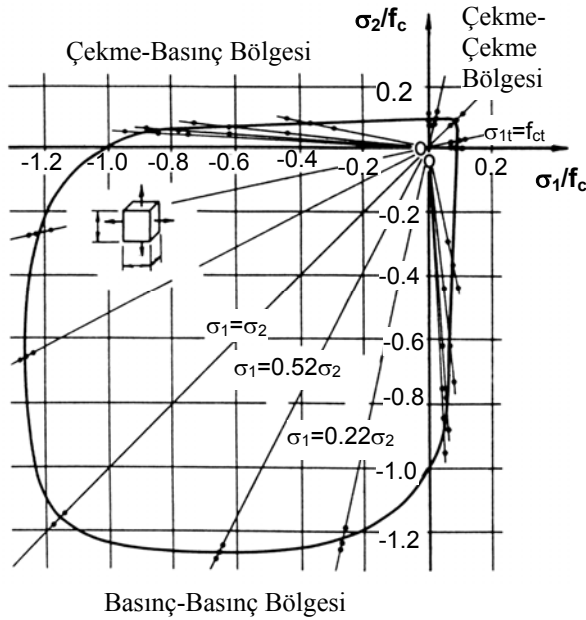
Betonun doğrusal olmayan gerilme-şekil değiştirme ilişkisi artımlı olarak yazılarak küçük yüklemeye aralığında doğrusal bağıntı haline getirilir. Yüklemeye arttıkça her iterasyon adımında, toplam şekil değiştirme asal doğrultu açısına bağlı olarak, ortotrop malzeme eksen doğrultuları sürekli değişir. Asal doğrultulardaki malzeme sabitlerini ve toplam gerilmeleri elde etmek için, ortotrop malzeme eksenlerinde eşdeğer bir eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkileri belirlenir. Yerel eksende elde edilen gerilmeler global eksene dönüştürülür. Betonda çatlama öncesi ve sonrası doğrusal olmayan farklı davranış sözü konusu olduğu için ayrı ayrı artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi gereklidir.

Beton ortotrop malzeme modelini oluşturmak için, betonun iki eksenli gerilme güç tükenmesi

zarfına, ortotrop malzeme eksenlerinde bir eksenli gerilme-şekil değiştirme ilişkisine, beton çatlama modeline, eleman rijitlik matrisinin tanımlanmasına ve bir eksenli gerilme-şekil değiştirme eğrilerinden verilen şekil değiştirme durumu için uygun gerilme durumunun belirlenmesine ihtiyaç vardır.

### İki eksenli beton gerilme güç tükenme zarfı

İncelenen herhangi bir yük artımı adımında gerilme düzleminde geçerli gerilme noktasının yerine bağlı olarak, Kupfer ve diğerleri (1969) tarafından önerilen iki eksenli gerilme güç tükenme zarfından bir eksenli eğrinin karakteristik değerleri elde edilir (Şekil 1).



Şekil 1. İki eksenli beton gerilme güç tükenme zarfı (Kupfer vd., 1969)

İterasyon adımında hesaplanan beton toplam asal gerilme çiftinin ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) Şekil 1’de verilen iki eksenli gerilme güç tükenme zarfında hangi bölgede olduğu asal gerilmelerin işaretlerine bağlı olarak belirlenir. Ortotrop malzeme eksenlerin her birinde tanımlı ve üç bölge için ayrı ayrı eşdeğer bir eksenli gerilme-şekil değiştirme eğrileri elde edilir. Bu eğrileri oluşturmak için gerekli olan maksimum gerilme ve karşı gelen şekil değiştirmeler asal gerilme oranlarına bağlı olarak her bir bölgede ve eksen için hesaplanır.

### Basınç-basınç bölgesinde

Bilinen toplam asal gerilme çifti ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) ile,  $|\sigma_2| \geq |\sigma_1|$ ,  $\alpha = \sigma_1/\sigma_2$  asal gerilme oranına göre eşdeğer bir eksenli gerilme-şekil değiştirme eğrilerini tanımlayan maksimum gerilmeler ve karşı gelen şekil değiştirmeler belirlenir:

$$\sigma_{2p} = \frac{1+3.65\alpha}{(1+\alpha)^2} f_c \quad \text{ve} \quad \sigma_{1p} = \alpha \sigma_{2p} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{2p} = \varepsilon_{co} \left( 3 \frac{\sigma_{2p}}{f_c} - 2 \right) \quad (2)$$

$$\alpha_c = \frac{\sigma_{1p}}{f_c} \quad (3a)$$

$$\varepsilon_{1p} = \varepsilon_{co} \left( -1.6 \alpha_c^3 + 2.25 \alpha_c^2 + 0.35 \alpha_c \right) \quad (3b)$$

### Çekme-basınç bölgesinde

Bilinen toplam asal gerilme çifti ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) ile, ( $\sigma_2 < 0$  ve  $\sigma_1 > 0$ ) olacak şekilde,  $\alpha = |\sigma_1|/|\sigma_2|$  asal gerilme oranına göre tanımlı eşdeğer bir eksenli gerilme-şekil değiştirme eğrisini tanımlayan maksimum gerilmeler ve karşı gelen şekil değiştirmeler belirlenir. Çekme gerilme-şekil değiştirme eğrisinde maksimum gerilme ve karşı gelen şekil değiştirme;

$$\sigma_{1t} = f_{ct} \left( 1 - \frac{0.8 f_{ct}}{f_c \alpha + 0.8 f_{ct}} \right) \quad \alpha \geq 0.2 f_{ct} / f_c \quad (4a)$$

$$\sigma_{1t} = \alpha f_c \quad \alpha \leq 0.2 f_{ct} / f_c \quad (4b)$$

$$\varepsilon_{1ct} = \frac{\sigma_{1t}}{E_{c0}} \quad (5)$$

olarak elde edilir. Basınç gerilme-şekil değiştirme eğrisi ise gözönüne alınan malzeme eksenine dik doğrultuda betonun çatlamış ve çatlamamış olması durumu için ayrı ayrı belirlenir. Bunun için betonun bir doğrultuda çatlamasının ardından çatlağa dik doğrultuda artan yanal çekme şekil değiştirmelerine bağlı olarak beton basınç dayanımı  $\beta_d$  katsayısı ile azaltılır. Gözönüne alınan doğrultuya dik doğrultuda  $\varepsilon_{1f} \leq \varepsilon_{ct}$

ise betonun çatlamadığı,  $\beta_d=1$  alınarak azaltma yapılmadan, bir eksenli durumdaki basınç gerilme-şekil değiştirme eğrisi kullanılır. Eğer  $\varepsilon_{1f} \geq \varepsilon_{ct}$  ise, betonun çatladığı kabul edilir ve  $\beta_d$  katsayısı;

$$\beta_d = \frac{1}{1 + 0.27(-\varepsilon_{1f} / \varepsilon_{c0} - 0.37)} \leq 1.0 \quad (6)$$

şeklinde hesaplanır (Vecchio ve Collins, 1982; 1986). Basınç dayanımı azaltma katsayısı ile eşdeğer bir eksenli basınç gerilme-şekil değiştirme eğrisinde maksimum gerilme ve karşı gelen şekil değiştirme belirlenir:

$$\sigma_{2p} = \beta_d f_c, \quad \varepsilon_{2p} = \varepsilon_{c0} \quad (7)$$

### Çekme-çekme bölgesinde

Toplam asal gerilme çifti çekme-çekme bölgesinde ise asal gerilme oranlarına bakılmadan, gerilmelerin etkileşimi ihmal edilerek eşdeğer bir eksenli çekme gerilme-şekil değiştirme eğrilerinde, maksimum gerilmeler basit çekme deneylerinden elde edilen beton çekme dayanımı olarak kabul edilir. Karşı gelen şekil değiştirme de beton başlangıç elastisite modülü ile çekme dayanımı arasında doğrusal ilişkiden hesaplanır:

$$\sigma_{1t} = \sigma_{2t} = f_{ct}, \quad \varepsilon_{1ct} = \varepsilon_{2ct} = \frac{f_{ct}}{E_0} \quad (8)$$

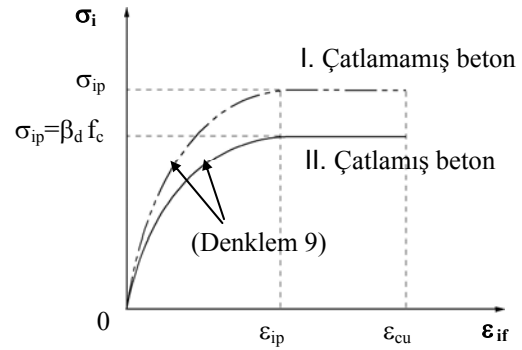
### Ortotrop malzeme eksenlerinde gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

Ortotrop malzeme ekseninde eşdeğer bir eksenli basınç gerilme-şekil değiştirme eğrisinde şekil değiştirmeye artan kol,  $0 \leq \varepsilon_{if} \leq \varepsilon_{ip}$  aralığında

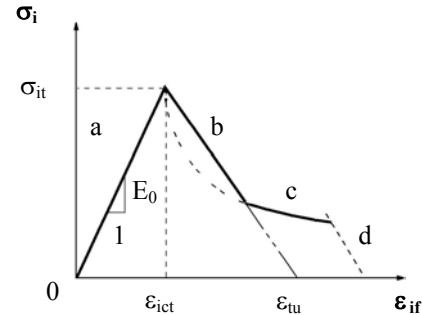
$$\sigma_i = \frac{E_0 \varepsilon_{if}}{1 + \left( \frac{E_0}{E_{sec}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{if}}{\varepsilon_{ip}} + \left( \frac{\varepsilon_{if}}{\varepsilon_{ip}} \right)^2} \quad (9)$$

olarak kabul edilir (Saenz, 1964). Denklem 9'da  $E_0$  beton başlangıç elastisite modülü,  $\varepsilon_{if}$  malzeme ekseninde tanımlı toplam eşdeğer bir eksenli şekil değiştirme,  $E_{sec} = \sigma_{ip} / \varepsilon_{ip}$  sekant elastisite modülü,  $\sigma_{ip}$ ,  $\varepsilon_{ip}$  ise iki eksenli gerilme güç tü-

kenme zarfı ve toplam asal gerilme oranına bağlı olarak belirlenen maksimum basınç gerilmesi ve karşı gelen birim kısalmayı gösterir (Şekil 2). Eğride şekil değiştirmeye sabit kalan kolda,  $\varepsilon_{ip} \leq \varepsilon_{if} \leq \varepsilon_{cu}$  aralığında, beton  $\sigma_{ip}$  maksimum basınç gerilmesini taşımaya devam eder. Maksimum birim kısalma değeri ( $\varepsilon_{cu}$ ) aşıldığında betonun ezildiği kabul edilir. Çekme-basınç bölgesinde dik doğrultuda betonun çatlaması basınç gerilme-şekil değiştirme eğrisini etkiler (Şekil 2).



Şekil 2. Eşdeğer bir eksenli basınç gerilme-şekil değiştirme ilişkisi



Şekil 3. Eşdeğer bir eksenli çekme gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

Ortotrop malzeme ekseninde eşdeğer bir eksenli çekme gerilme-şekil değiştirme eğrisi artan ve azalan kol olmak üzere iki bölümden oluşur (Şekil 3). Eğri betonun  $E_0$ ,  $f_{ct}$ ,  $\varepsilon_{ct}$  ve  $\varepsilon_{tu}$  malzeme sabitleri ve iki eksenli gerilme güç tükenme zarfı için tanımlı gerilme bölgelerine ve asal gerilme oranlarına göre belirlenen  $\sigma_{it}$  maksimum gerilme ve  $\varepsilon_{ict}$  karşı gelen şekil değiştirme ile oluşturulur. Beton eşdeğer bir eksenli çekme gerilme-şekil değiştirme eğrisini belirlemek için eğ-

rideki her bir kolun (a,b,c,d) belirlenmesi gerekir. a kolu çatlamamış betonun davranışını, b kolu çatlamış betonun yumuşamasını, c kolu betonun çekme rijitliğini ve d kolu da betonda oluşan çekme gerilmesinin donatılara aktarılabilmesini ifade eder. Her bir kol aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\sigma_i^a = E_0 \varepsilon_{if} \quad \varepsilon_{if} \leq \varepsilon_{ict} \quad (10)$$

$$\sigma_i^b = \sigma_{it} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_{if} - \varepsilon_{ict})}{(\varepsilon_{tu} - \varepsilon_{ict})} \right] \quad \varepsilon_{ict} \leq \varepsilon_{if} \quad (11)$$

$$\sigma_i^c = \frac{\sigma_{it}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_{if}}} \quad \varepsilon_{ict} \leq \varepsilon_{if} \quad (12)$$

$$\sigma^d = \sum_i^n \rho_i (f_{yi} - \sigma_{si}) \cos^2 \theta_{ni} \quad \varepsilon_{ict} \leq \varepsilon_{if} \quad (13)$$

Beton eşdeğer bir eksenli çekme gerilme-şekil değiştirme eğrisinde  $\varepsilon_{if}$  şekil değiştirmesine karşılıklı gelen  $\sigma'_i$  asal çekme gerilmesi

$$\sigma'_i = \sigma_i^a \quad \varepsilon_{if} \leq \varepsilon_{ct} \quad (14)$$

$$\sigma'_i = \max(\sigma_i^b; \sigma_i^c) \quad \varepsilon_{ict} \leq \varepsilon_{if} \quad (15)$$

şeklinde belirlenir. Azalan kol üzerindeki Denklem 15'de belirlenen  $\sigma'_i$  asal çekme gerilmesi Denklem 13'den hesaplanan  $\sigma^d$  gerilmesinden büyük olamaz (Vecchio, 2000). Denklem 13'de i'inci yayılı donatı katmanında global sistemdeki yatay eksenle bu donatının yaptığı açı  $\alpha_i$  ise  $\theta_{ni} = \theta_\varepsilon - \alpha_i$  olarak belirlenir.

### Beton çatlama modeli

Betonda çatlamanın davranışa etkisi yayılı çatlak modeli ve dönen çatlak yaklaşımı ile gözönüne alınmıştır (Rashid, 1968). Ortotrop malzeme ekseninde birim uzama değeri  $\varepsilon_{ict} \leq \varepsilon_{if} \leq \varepsilon_{tu}$  aralığındaiken çatlama başlamış, beton çekme yumuşama ve rijitliği etkisinde ve çekme gerilme-şekil değiştirme eğrisinde azalan kol üzerindedir. İki azalan kol tanımlanmıştır (Şekil 3). Denklem 11'le tanımlanan b azalan

kolu beton çekme yumuşama etkisini ifade eder. Maksimum birim uzama  $\varepsilon_{tu}$  değerine eriştiğinde çatlağın oluştuğu kabul edilir. Bazant ve Oh (1983) tarafından yapılan çalışmada, çatlak mekanik teorilerine göre çatlağın oluştuğu kabul edilen,  $\varepsilon_{tu}$  değeri betonun çatlama ile açığa çıkan enerjiye ( $G_f$ ) ve çatlağa dik doğrultuda eleman karakteristik boyuna ( $L$ ), betonun çekme dayanımına ( $f_{ct}$ ) bağlı olarak verilmiştir:

$$\varepsilon_{tu} = \frac{2G_f}{f_{ct}L} \quad (16)$$

Vecchio (2000) tarafından yapılan çalışmada  $G_f$  beton çatlama eneji için 75N/m değeri önerilmiştir. Bu çalışmada ise  $\varepsilon_{tu}$  maksimum birim uzama değeri veri olarak girilir ve ortalama 0.005 değeri kullanılmıştır. Betonun çekme yumuşaması donatının olmadığı yada az olduğu elemanlarda etkilidir. Donatısı fazla olan elemanlarda da beton çekme rijitliği, donatılar akma dayanımına ulaşana kadar, etkili olduğu bildirilmiştir. Beton çekme rijitliği etkisi için Denklem 12'de verilen ifade kullanılmıştır (Vecchio, 2000).

### Beton eleman rijitlik matrisi

Önce ortotrop malzeme eksenlerinde artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi;

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta \tau_{12} \end{Bmatrix} = [D_c]_{LO} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \varepsilon_2 \\ \Delta \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

şeklinde. Denklem 17'de  $[D_c]_{LO}$  yerel malzeme rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde

$$[D_c]_{LO} = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_1 \nu_2) G \end{bmatrix} \quad (18)$$

ifade edilir. Denklem 18'de ortotrop malzeme eksenlerinde tanımlı  $E_1$  ve  $E_2$  teğet elastisite modülleri,  $\nu_1$  ve  $\nu_2$  Poisson oranlarıdır ( $\nu_2 E_1 = \nu_1 E_2$ ). Kayma gerilmesi ile kayma şekil

değiştirmesi arasındaki bağıntı malzeme eksenlerinin dönmesinden etkilenmeyecek şekilde

$$G = \frac{\nu_1 E_2}{\nu_1 + 2\nu_1 \nu_2 + \nu_2} \quad (19)$$

belirlenir (Liu vd., 1972). Çatlamamış beton durumunda kayma modülü ( $\beta G$ ) çatlama dik doğrultudaki malzeme eksenindeki elastisite modülünün 1/4'ü kabul edilmiştir (Darwin ve Pecknold, 1977). Büyük olan asal gerilme doğrultusunda Poisson oranı 0.2 alınıp simetri koşulunu sağlayacak şekilde diğer doğrultudaki Poisson oranı belirlenmiştir. Poisson oranları her zaman 0.5 değerinden küçüktür. Yerel eksenlerde tanımlanan artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi  $[T_\varepsilon]$  eksen dönüştürme matrisi ile yerel eksenlerden global eksenlere dönüştürülür:

$$[D_c]_{GL} = [T_\varepsilon]^T [D_c]_{LO} [T_\varepsilon] \quad (20)$$

Burada  $[T_\varepsilon]$  eksen dönüştürme matrisi toplam asal şekil değiştirme ekseninin global eksenle yaptığı açı  $\theta_\varepsilon$  ile belirlenir ( $c = \cos\theta_\varepsilon$  ve  $s = \sin\theta_\varepsilon$ ):

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (21)$$

### Beton gerilmelerinin belirlenmesi

Artımlı çözümlenin safhalarından biri, bir yük artımı adımında verilen  $\{\Delta R\}$  yük artımı vektörü için, her bir iterasyon adımında, beton elemanların bilinen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ve  $\gamma_{xy}$  toplam şekil değiştirme bileşenlerinden uygun şekilde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  toplam gerilme bileşenlerinin belirlenmesidir. Bu safha sırasıyla verilmiştir:

Aşağıda verilen denklemlerde  $(m+1)$  hesap yapılan ve  $m$  bir önceki yük artımı adımı,  $(m+1)$ 'inci adımında  $i$  iterasyon sayısı olup, eşitliklerin sol tarafındaki ifadeler  $(m+1)$ 'inci adımda ve  $i$ 'inci iterasyonda elde edilen değerlerdir. Önce, iterasyon adımında toplam şekil değiştirmelerden karşı gelen toplam asal şekil değiştirme doğrultu açısı hesaplanır:

$$\tan 2\theta_\varepsilon = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (22)$$

Bu  $\theta_\varepsilon$  doğrultu açısı ile Denklem 21'den  $[T_\varepsilon]$  şekil değiştirme eksen dönüştürme matrisi belirlenir. Dönüşüm matrisi ve global eksenlerde toplam şekil değiştirme vektöründen asal şekil değiştirme vektörü belirlenir:

$$\{\varepsilon\}_{Asal}^{(i)} = {}^{m+1}[T_\varepsilon]^{(i) m+1} \{\varepsilon\}_{GL}^{(i)} \quad (23)$$

Bir önceki yük artımı adımı sonunda hesaplanan toplam asal şekil değiştirme vektöründen bu adımda hesaplanan toplam asal şekil değiştirme vektörü çıkarılarak asal şekil değiştirme artımı vektörü bulunur:

$$\{\Delta\varepsilon\}_{Asal}^{(i)} = {}^{m+1}\{\varepsilon\}_{Asal}^{(i)} - {}^m\{\varepsilon\}_{Asal} \quad (24)$$

Her adımda toplam asal şekil değiştirme doğrultu açısı değiştiğinden, bir önceki adımdaki asal şekil değiştirme doğrultuları ile bu iterasyon adımdaki asal şekil değiştirme doğrultuları çakışmaz. Fakat asal şekil değiştirme artımının ve toplam asal şekil değiştirme doğrultu açısındaki değişimin küçük olması koşuluyla Denklem 24 kabul edilebilir. Bununla birlikte asal şekil değiştirme artımından, bir önceki adımda belirlenen Poisson oranları ile eşdeğer bir eksenli fiktif asal şekil değiştirme artımı hesaplanır:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{1f} \\ \Delta\varepsilon_{2f} \end{Bmatrix}^{(i)} = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 \\ \nu_2 & 1 \end{bmatrix} {}^{m+1} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Bir önceki yük artımı adımı sonunda hesaplanan eşdeğer bir eksenli asal şekil değiştirmelerle artımları toplanarak eşdeğer bir eksenli asal şekil değiştirmeler elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{1f} \\ \varepsilon_{2f} \end{Bmatrix}^{(i)} = {}^m \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1f} \\ \varepsilon_{2f} \end{Bmatrix} + {}^{m+1} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{1f} \\ \Delta\varepsilon_{2f} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (26)$$

Bir önceki yük artım adımı sonunda bulunan toplam asal gerilmeler, asal şekil değiştirme

doğrultularında elde edilen beton elastisite modülleri ( $E_1, E_2$ ) ve bu iterasyon adımında eşdeğer bir eksenli asal şekil değiştirme artımları ile toplam asal gerilmeler belirlenir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}^{m+1} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{1f} \\ \Delta \varepsilon_{2f} \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (27)$$

Denklem 27 ile bulunan toplam asal gerilmeler gerçek gerilme durumuna karşı gelmeyecek, daha sonra düzeltililecektir. Bu aşamada  $(\sigma_1, \sigma_2)$  asal gerilme çifti yaklaşık olarak betonun iki eksenli gerilme güç tükenme zarfındaki yerini belirlemek için kullanılır (Ayoub ve Fillippou, 1998). Ayrıca bu asal gerilme çifti  $(\sigma_1, \sigma_2)$  betonun iki eksenli gerilme güç tükenme zarfındaki gerçek yerine yeterince yaklaşıncaya kadar iterasyona devam edilir.

İterasyon adımında elde edilen asal gerilme çiftini  $(\sigma_1, \sigma_2)$  kullanarak önce ortotrop malzeme eksenlerinde eşdeğer bir eksenli gerilme-şekil değiştirme eğrileri oluşturulur. Bu eğrilerden ve bulunan toplam eşdeğer bir eksenli asal şekil değiştirmelerden, karşı gelen toplam asal gerilmeler  $(\sigma'_1, \sigma'_2)$  elde edilir. Bu toplam asal gerilmeler global eksenlere dönüştürülerek beton elemanın  $\{\sigma'\}$  toplam gerilme vektörü,  $\theta_\varepsilon$  açısını kullanarak, belirlenir ( $c=\cos\theta_\varepsilon, s=\sin\theta_\varepsilon$ ):

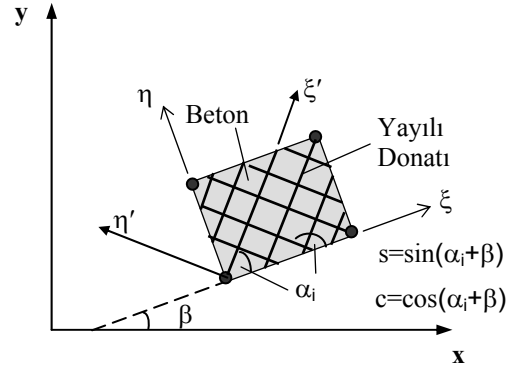
$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ s^2 & c^2 \\ sc & -sc \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}^{(i)} \quad (28)$$

### Donatı

Geliştirilen çözüm yönteminde yayılı donatı modeli kullanılmıştır. Yayılı donatı modelinde, donatı sonlu eleman üzerinde düzgün yayılı olarak eşdeğer bir eksenli malzeme olarak tanımlanır. Donatıyı beton eleman üzerine belirli bir açıyla yerleştirmek de mümkündür (Şekil 4).

Beton ile çeliğin malzeme matrisleri üst üste toplanarak kompozit malzeme için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi yazılır. Şekil 4'de verilen beton eleman ve iki farklı doğrultuda yayılı donatı katmanları bulunmaktadır. Beton eleman  $(\xi, \eta)$  ve

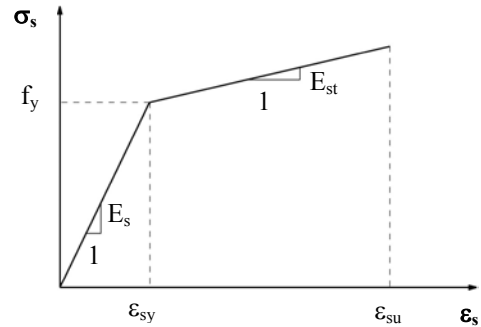
$i$ 'inci yayılı donatı katmanı  $(\xi', \eta')$  yerel koordinatlarında tanımlıdır. Beton eleman ile her bir yayılı donatı katmanı  $(\xi$  ile  $\xi'$  eksenleri) arasındaki açı  $\alpha_i$ , beton elemanın  $\xi$  yerel ve  $x$  global eksen arasındaki açı  $\beta$  ile verilmiştir.



Şekil 4. Beton ve yayılı donatı elemanında seçilen yerel, global eksen takımları ve aralarındaki açılar

### Donatı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

Yayılı donatı modelinde çelik çubukların sadece aksiyel kuvvet taşıdığı kabul edilmiştir. Çekme ve basınç için aynı gerilme-şekil değiştirme eğrisi kullanılır. Donatılar için elastik pekleşen plastik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi kabul edilmiştir (Şekil 5).



Şekil 5. Donatının çekme ve basınç etkisinde gerilme-şekil değiştirme eğrisi

Sayısal stabilite problemlerini azaltmak için, yapılan sayısal çözümlerinde, donatı akma gerilmesi aşıldığında donatı pekleşme oranı 0.005 olarak kabul edilmiştir ( $E_{st}=0.005E_s$ ). Donatıda maksimum şekil değiştirme için  $\varepsilon_{su}=0.01$  değeri hesaplarda kullanılmıştır.



**Yayıllı donatı eleman rijitlik matrisi**

İki boyutlu çözümlemede her bir yayıllı donatı katmanını için yerel koordinatlarda artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$\{\Delta\sigma\}_{LO} = [D_{si}]_{LO} \{\Delta\varepsilon\}_{LO} \quad (29a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{\xi'} \\ \Delta\sigma_{\eta'} \\ \Delta\tau_{\xi'\eta'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i E_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{\xi'} \\ \Delta\varepsilon_{\eta'} \\ \Delta\gamma_{\xi'\eta'} \end{Bmatrix} \quad (29b)$$

tanımlanır. Burada  $E_{si}$  yerel eksen  $\xi'$  doğrultusunda yerleştirilen donatının teğet elastisite modülü  $\rho_i$  yerel eksen  $\xi'$  doğrultusunda yerleştirilen donatı oranıdır. Elastisite modülünün  $E_{si}(\varepsilon_{\xi'})$  şekil değiştirmeye bağlı olarak ifade edilmesi durumunda, bu ifadeleri doğrusal olmayan davranış bölgelerinde de kullanmak mümkündür. Yayıllı donatı için yerel koordinatlarda yazılan artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin global eksenlere taşınması gerekir. Denklem 21'de verilen  $[T_\varepsilon]$  dönüşüm matrisinde  $\theta=\beta+\alpha_i$  kabul ederek donatı malzeme matrisi ve global eksenlerde artımlı gerilme-şekil değiştirme ilişkisi elde edilir:

$$\{\Delta\sigma\}_{GL} = [T_\varepsilon]^T [D_{si}]_{LO} [T_\varepsilon] \{\Delta\varepsilon\}_{GL} \quad (30)$$

**Doğrusal olmayan artımlı çözümleme**

Geliştirilen sonlu eleman modelinde yerdeğıştirmelerin küçük olduğu kabul edilerek, denge denklemleri şekil değiştirmemiş geometrik sistemde yazılmıştır. Beton ve donatı elemanların malzeme ve eleman rijitlik matrisleri ayrı ayrı oluşturulmuştur. Beton ve üzerindeki her bir yayıllı donatı katmanını için belirlenen global eksenlerdeki malzeme matrisi toplanabilir:

$$[D]_{GL} = [D_c]_{GL} + \sum_i [D_{si}]_{GL} \quad (31)$$

Eleman rijitlik matrisi eleman üzerinde integrasyonla elde edilir:

$$[k] = \int_V [B]^T [D]_{GL} [B] dV \quad (32)$$

Burada  $[k]$  eleman rijitlik matrisi,  $[B]$  şekil-yerdeğıştirme bağıntısını sağlayan matrisdir. Beton ve yayıllı donatı için iki boyutlu dört noktalı izoparametrik dört kenarlı (doğrusal şekil değiştirme) sonlu eleman kullanılmıştır. Eleman rijitlik matrisini belirlerken gerekli integrasyonu gerçekleştirmek için Gauss sayısal integrasyon yöntemi  $2 \times 2$  sayısal integrasyon noktası ile kullanılmıştır. Her bir eleman için hesaplanan eleman rijitlik matrisi uygun şekilde birleştirilerek,  $[K]$  sistem rijitlik matrisi elde edilir. Malzeme bakımından doğrusal olmayan çözümlemede, gerilme ve şekil değiştirme vektörleri arasında doğrusal bir ilişki olmadığından, artımlı çözümleme kullanılmıştır. Artımlı çözümlemede, belirli bir yük adımında  $\{R\}$  dış yük vektörü o adıma kadar  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımlarının toplamı olarak ifade edilebilir. Hesap yapılan  $(m+1)$ 'inci adımda dış yük vektörü,  $m$ 'inci adımdaki dış yük vektörünün bu adımdaki  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektöründen

$${}^{m+1}\{R\} = {}^m\{R\} + \{\Delta R_e\} \quad (33)$$

şeklinde elde edilir. Bir önceki  $m$ 'inci adım sonunda  $\{U\}$  yerdeğıştirme, global eksenlerde tanımlı  $\{\sigma'\}$  gerilme ve  $\{\varepsilon\}$  şekil değiştirme vektörlerinin bulunduğu kabul edilirse,  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektörü uygulandığında  $(m+1)$ 'inci adım sonunda toplam yerdeğıştirme ve gerilme vektörleri sırasıyla

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (34)$$

$${}^{m+1}\{\sigma'\} = {}^m\{\sigma'\} + \{\Delta\sigma'\} \quad (35)$$

şeklinde bulunur. Ancak Denklem 34 ve 35'in kullanılabilmesi için  $\{\Delta U\}$  yerdeğıştirme, elemanlarda  $\{\Delta\sigma'\}$  gerilme artımı vektörlerinin belirlenmiş olması gerekir. Artımlı çözümleme  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektörüne karşı gelen, uygun  $\{\Delta U\}$  yerdeğıştirme vektörü ile tüm elemanlarda  $\{\sigma'\}$  gerilme vektörünün belirlenmesi olarak iki safhaya ayrılabilir. Tüm sistemde hesap yapılan  $(m+1)$ 'inci adımda verilen bir  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektörü için

$$\psi^{(m+1)}\{U\} = {}^{m+1}\left\{F\left({}^{m+1}\{U\}\right)\right\} - {}^{m+1}\{R\} \quad (36) \quad \{\Delta\varepsilon\}^{(i)} = [B]^{m+1}\{\Delta d\}^{(i)} \quad (39)$$

ifadesini, iç kuvvetlerle dış kuvvetler arasında dengeyi sağlayan uygun  $\{\Delta U\}$  yerdeğiştirme artımı vektörü aranır. Denklem 36 doğrusal olmayan bir denklemdir. Bu denklemin çözülebilmesi ve uygun  $\{\Delta U\}$  yerdeğiştirme artımı vektörünün bulunabilmesi için bir iterasyon yöntemi kullanmak gerekir. Burada Değiştirilmiş Newton-Rapson iterasyon yöntemi kullanılmıştır. Artımlı çözümlemede m'inci (bir önceki) yük artımı adımı sonunda  $[K]$  sistem rijitlik matrisi,  $\{U\}$  toplam yerdeğiştirme vektörü,  $\{R\}$  toplam dış yük vektörü, elemanlarda  $\{\sigma'\}$  toplam gerilme ve  $\{\varepsilon\}$  şekil değiştirme vektörlerinin bilindiği kabul edilerek,  $(m+1)$ 'inci adımda verilen  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektörü için çözüm aranır. İlk iterasyon adımı  $\{\Delta R\}$  yük artımı vektörü,  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektörüne eşittir. Diğer iterasyon adımlarında  $\{\Delta R\}$  yük artımı vektörü,  $\{\Delta R_e\}$  dış yük artımı vektörü ile bir önceki iterasyon adımı elde edilen  $\{\Delta R_r\}$  dengelenmemiş kuvvet artımı vektörünün toplamından elde edilir:

$${}^{m+1}\{\Delta R\}^{(i)} = {}^{m+1}\{\Delta R_e\} + {}^{m+1}\{\Delta R_r\}^{(i-1)} \quad (37a)$$

$${}^{m+1}\{\Delta R_r\}^{(i-1)} = {}^{m+1}\{R\} - {}^{m+1}\{F\}^{(i-1)} \quad (37b)$$

$${}^{m+1}\{\Delta R_r\}^{(0)} = \{0\} \quad (37c)$$

İterasyon adımı belirlenen yük artımı için, bir önceki adımda belirlenen sistem rijitlik matrisi kullanılarak,  $\{\Delta U\}$  yerdeğiştirme artımı vektörü hesaplanır:

$${}^m[K]\{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{\Delta R\}^{(i)} \quad (38)$$

İterasyon adımı hesaplanan  $\{\Delta U\}$  yerdeğiştirme artımı vektöründen, beton ve yayılı donatı elemanlar için  $\{\Delta d\}$  eleman düğüm noktası yerdeğiştirme artımı vektörü elde edilir. Eleman şekil-yerdeğiştirme matrisi ile eleman yerdeğiştirme artımı vektöründen, global eksenlerde, eleman şekil değiştirme artımı vektörü hesaplanır:

İterasyon adımı, beton ve yayılı donatı elemanlar için bir önceki adımdaki eleman toplam şekil değiştirme vektörü ile şekil değiştirme artımı vektörü toplanarak toplam şekil değiştirme vektörü elde edilir:

$${}^{m+1}\{\varepsilon\}^{(i)} = {}^m\{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon\}^{(i)} \quad (40)$$

İterasyon adımı, elemanlardaki toplam şekil değiştirme durumu belirlendikten sonra elemanlarda bu şekil değiştirme durumuna karşı gelen gerilmeler önceden tanımlı gerilme-şekil değiştirme eğrileri üzerinden bulunur. Bu işlem beton ve yayılı donatı elemanlarında farklı hesap adımları ile gerçekleştirilir. Bu çalışmada sadece beton elemanda  $\{\sigma'\}$  toplam gerilme vektörünün belirlenmesi verilmiştir. İterasyon adımı, global eksen tanımlı,  $\{\sigma'\}$  eleman toplam gerilme vektörü belirlendiği kabul edilirse, beton ve yayılı donatı elemanda düğüm noktalarında iç kuvvet vektörü

$${}^{m+1}\{f_e\}^{(i)} = \int_V [B]^T {}^{m+1}\{\sigma'\}^{(i)} dV \quad (41)$$

şeklinde bulunur. Bütün  $\{f_e\}$  eleman iç kuvvet vektörlerinin uygun şekilde toplanmasından her bir iterasyon adımı  $\{F\}$  iç kuvvet vektörü elde edilir:

$${}^{m+1}\{F\}^{(i)} = \sum_n {}^{m+1}\{f_e\}^{(i)}_n \quad (42)$$

İterasyon adımı hesaplanan yerdeğiştirme artımı vektörü ile bir önceki yük artımı adımı sonundaki toplam yerdeğiştirme vektörü toplanarak iterasyon adımı  $\{U\}$  toplam yerdeğiştirme vektörü belirlenir (Denklem 34).

Her bir iterasyon adımı sonunda önceden tanımlı yaklaşım kriteri koşulunun sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Seçilen yaklaşım kriteri çözüm sonuçlarını önemli oranda etkilemektedir. Burada yerdeğiştirme yaklaşım kriteri kullanılmıştır. Yaklaşım kriteri koşulu sağlanmadığında bu iterasyon adımı hesaplanan iç kuv-

vet vektörü bir önceki iterasyon adımında hesaplanan iç kuvvet vektörüne dönüştürülür:

$${}^{m+1}\{F\}^{(i-1)} = {}^{m+1}\{F\}^{(i)} \quad (43)$$

Ardından Denklem 37 ile yeniden belirlenen  $\{\Delta R\}$  yük artımı vektörü ile iterasyon işlemine devam edilir. Eğer n'inci iterasyon adımında yaklaşım kriteri koşulu sağlanırsa aşağıdaki değişiklikler yapılarak bir sonraki yük artımı adımına geçilir:

$${}^m\{R\} = {}^{m+1}\{R\}, \quad {}^m\{F\} = {}^{m+1}\{F\}^{(n)} \quad (44a)$$

$${}^m\{U\} = {}^{m+1}\{U\}^{(n)}, \quad {}^m[K] = {}^{m+1}[K]^{(n)} \quad (44b)$$

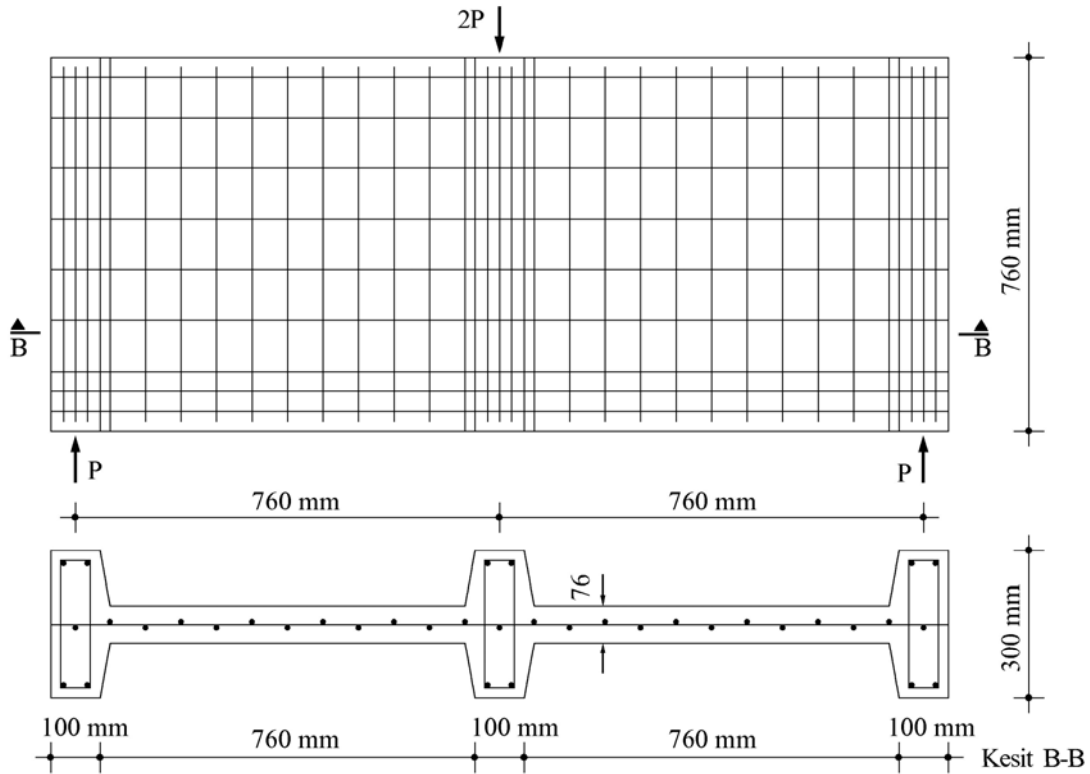
$${}^m\{\varepsilon\} = {}^{m+1}\{\varepsilon\}^{(n)}, \quad {}^m\{\sigma'\} = {}^{m+1}\{\sigma'\}^{(n)} \quad (44c)$$

## Uygulama

### W2 Yüksek kirişi

Bir çok araştırmacı, geliştirdikleri çözüm modelini karşılaştırmada, Cervenka ve Gerstle (1972)

tarafından deneysel incelenen W2 yüksek kirişini kullanmıştır (Ayoub ve Filipou, 1998; Kwak ve Kim, 2001). Bu çalışmada da W2 yüksek kirişi üzerinde yapılan çözümlerle geliştirilen hesap modelinin deney sonucu ile karşılaştırılması yapılmıştır. Şekil 6 da verilen W2 yüksek kirişi 760mm yüksekliğinde, 76mm kalınlığında, ortada ve kenarlarda 100mm genişliğinde ve 300mm kalınlığında başlıkları olan, 1720mm açıklığa sahip basit mesnetli ve ortasından tekil 2P yükü ile yüklüdür. Donatı ise alt 150mm'lik bölgede yatay donatı oranı %1.83, üst 610mm'lik bölgede yatay donatı oranı %0.92 ve tümünde düşey donatı oranı %0.92 olacak şekilde yerleştirilmiştir. Donatı elastisite modülü  $E_{so}=190\text{GPa}$ , donatı akma dayanımı  $f_y=353\text{MPa}$ , akma ötesi şekil değiştirme durumunda pekleşme oranı 0.005 olarak alınmıştır. Beton basınç dayanımı  $f_c=26.8\text{MPa}$ , basınç dayanımına karşı gelen birim kısalma  $\varepsilon_{co}=0.002$ , maksimum birim kısalma  $\varepsilon_{cu}=0.005$ , maksimum birim uzama  $\varepsilon_{tu}=0.00186$  olarak alınmıştır. Deney sonucu beton başlangıç elastisite modülü  $E_0=20000\text{MPa}$ , çekme dayanımı  $f_{ct}=1.71\text{MPa}$  olarak bir çözüm yapılmıştır (Çözüm 1). Bunun

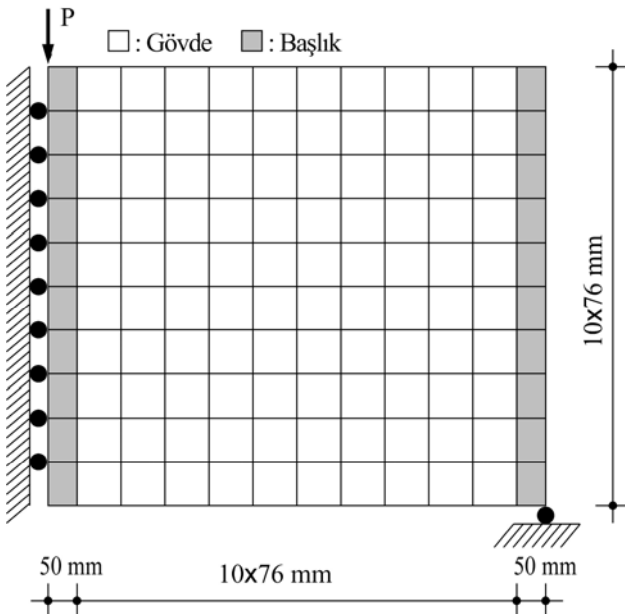


Şekil 6. W2 deney numunesi geometrisi ve donatı yerleşimi (Cervenka ve Gerstle, 1972)

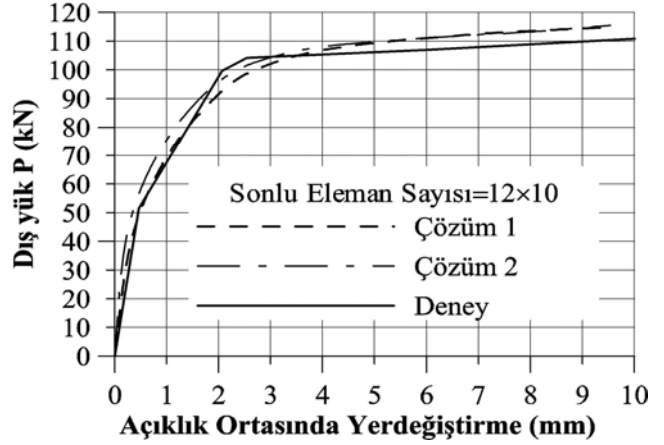
yanında TS 500’de basınç dayanımına bağlı olarak verilen sekant elastisite modülünü başlangıç elastisite modülü  $E_0=30825\text{MPa}$  ve çekme dayanımını da  $f_{ct}=1.81\text{MPa}$  olarak ayrı bir çözüm de yapılmıştır (Çözüm 2).

Sonlu elemanlar yöntemiyle sayısal çözümde, yük ve geometrideki simetri nedeniyle, W2 yüksek kirişinin yarısı gözönüne alınmıştır. Sonlu eleman ağında  $12 \times 10$  eleman kullanılmıştır (Şekil 7). Her bir adımda yapılan yük artımı taşıyabileceği yükün yaklaşık  $0.01-0.001$ ’i kadar alınmıştır. Bir adımda maksimum iterasyon sayısı 30 ile sınırlanmış, yaklaşım kriteri yerdeğiştirme kriteri olarak seçilmiş ve yeterli yaklaşım değeri  $0.003$  olarak alınmıştır.

Şekil 8’de yapılan çözümler ve deney sonucunda elde edilen yük-yerdeğiştirme ilişkisi verilmiştir. Yapılan çözümlerde deney sonucuna oldukça yakın davranış eğrisi, güç tükenme yükü ve süneklik kapasitesi elde edilmiştir. Çözüm 1 ve 2 karşılaştırıldığında W2 yüksek kirişinin davranışında beton başlangıç elastisite modülünün ve çekme dayanımındaki artışın önemli bir etkisinin olmadığı görülmektedir. Bu durum W2 yüksek kirişinin davranışında beton davranışından daha çok donatı davranışının etkin, her iki doğrultuda yerleştirilen donatı miktarının fazla olmasıyla açıklanabilir.



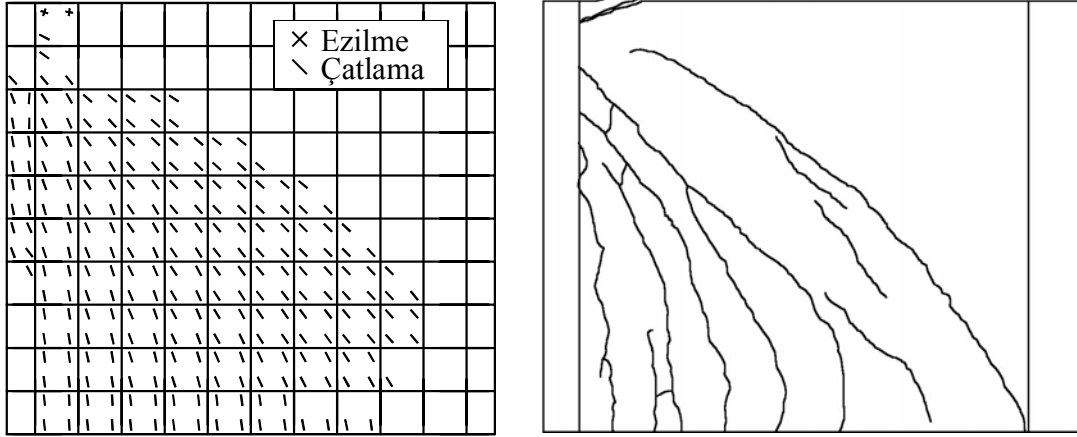
Şekil 7. W2 yüksek kirişi için seçilen sonlu eleman ağı



Şekil 8. W2 yüksek kirişi yük-yerdeğiştirme eğrileri

W2 yüksek kirişinde ilk olarak orta başlık ile birleşen alt gövde bölümünde beton çekme dayanımına ulaşmaktadır. P yükünün  $20\text{kN}$  değerinden başlayıp  $80\text{kN}$  değerine kadar betonda çekme dayanımına ulaşılmış Gauss noktaları sayısı artmaktadır. Betonda çatlak oluşumu asal çekme şekil değiştirmesinin  $0.00186$  (donatının akma dayanımına karşı gelen birim uzama) değerinde olduğu kabul edilirse, P yükünün  $80\text{kN}$  değerine kadar betonda çatlama olmamaktadır. P yükünün  $80\text{kN}$  değerinde W2 yüksek kirişinin hiçbir bölümünde, beton asal basınç gerilmeleri basınç dayanımına ve donatılar akma dayanımına ulaşmamıştır. Sadece W2 yüksek kirişinin büyük bir bölümünde beton çekme yumuşaması görülmektedir. Sonuç olarak P yükünün  $80\text{kN}$  değerine kadar W2 yüksek kirişinin davranışına sadece betonunun çekme dayanımı ve çekme rijitliği etki etmiştir.

P yükünün  $80\text{kN}$  değerinden sonra Çözüm 1’e göre W2 yüksek kirişinin davranışını incelemeye devam edilirse ilk çatlaklar, yükün  $85\text{kN}$  seviyesinde, perdenin ortasında alt bölümünde başlamaktadır. Ardından yükün  $100\text{kN}$  değerine kadar artmasıyla çatlaklar W2 yüksek kirişinin orta bölümlerine kadar ilerlemektedir. Ayrıca yükün  $100\text{kN}$  seviyesinde yükün etkilediği yerdeki başlık elemanına birleşen gövde elemanında beton basınç dayanımına ulaşmış ve betonda basınç yumuşaması başlamıştır. Donatıların durumu ise yüksek kirişin alt  $150\text{mm}$ ’lik bölümü ile orta bölümündeki yatay donatılar ve yükün



a) Çözüm 1 ( $P_u=116$  kN)

b) Deney ( $P_u=110$  kN)

Şekil 9 Güç tükenme durumunda Çözüm 1 ve deney sonucu elde edilen çatlak durumu

etkidiği yerdeki başlık elemanına birleşen gövde elemanındaki yatay donatılar akma gerilmesine ulaşmıştır. Düşey donatılar akma gerilmesine ulaşmamıştır.

P yükünün 100kN'dan sonraki bölümde yük artıkça hızla W2 yüksek kirişi rijitliğini kaybetmektedir. Bunun sebebi, W2 yüksek kirişinin büyük bölümünde meydana gelen çekme yumuşaması olabilir. Yüksek kirişin alt 150mm'lik bölümündeki donatıların bir bölümü akma gerilmesine ulaşmıştır. Bunun yanında yükün etkidiği yerdeki başlık elemanına birleşen gövde elemanında beton basınç dayanımına ulaşmış, betonda basınç yumuşaması başlamış ve yatay donatı da akma dayanımına ulaşmıştır. Deney sonucuna göre güç tükenmesi durumuna başlık elemanına birleşen gövde bölümünde betonun ezilerek ayrılması ile ulaşıldığı bildirilmiştir (Cervenka ve Gerstle, 1972). Yapılan çözümlerde de bu bölümde beton ezilmektedir. Göçme anında Çözüm 1 ve deney sonucu elde edilen çatlak durumu Şekil 9'da verilmiştir.

## Sonuçlar

Betonarme kiriş, yüksek kiriş ve perde gibi iki boyutlu kabul edilebilecek betonarme elemanların monoton artan yük etkisinde doğrusal olmayan davranışlarını tahmin etmek için geliştirilen sonlu eleman çözüm modeli kullanılabilir. Yapılan sayısal çözümlerle elde edilen yük-

yerdeğiştirme ilişkisi ile çatlakların oluşumu ve ilerlemesi deney sonuçları ile oldukça uyumludur. Ayrıca burada verilen W2 yüksek kirişi üzerinde geliştirilen çözüm modeli kullanılarak yapılan çözümlerle yüksek kirişin davranışı, güç tükenmesine ulaşma biçiminin anlaşılmasına ve etkileyen parametrelerin incelemesine olanak tanımıştır. Beton çekme gerilme-şekil değiştirme eğrisinde azalan kolun (çekme yumuşaması ve rijitliği etkisinin) gözönüne alınmasının önemli olduğu görülmüştür. Çekme basınç bölgesinde betonun çatlamasıyla çatlığa dik doğrultuda önemli oranda bir basınç yumuşaması olmaktadır.

Geliştirilen sonlu eleman çözüm modelinde kullanılan ortotrop beton model basitliği yanında oldukça da etkilidir. Yayılı çatlak modeli, dönen çatlak yaklaşımı da global yük yerdeğiştirme ilişkisi incelendiğinde ve donatı oranı yeterli olduğu durumlarda oldukça iyi yaklaşım sağlamaktadır.

## Kaynaklar

- ACI-ASCE Committee 447, (2001). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, *American Concrete Institute*, T. Willam, T. Tanabe, Editors, Farmington Hills, Michigan.
- ASCE Committee 447, (1982). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, *State-of-the-art report*, ASCE, New York.

- ASCE Committee 447, (1993). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II. *State-of-the-art report*, ASCE, J. Isenberg, Editor, New York.
- Ayoub, A. ve Fillippou, F.C., (1998). Nonlinear Finite-Element Analysis of RC Shear Panels and Walls, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **124**, 3, 298-308.
- Bazant, Z. P. ve Oh, B. H., (1983). Crack Band Theory for Fracture of Concrete, *Materials and Structures, RILEM*, **16**, 155-177.
- Cervenka, V. ve Gerstle, K. H. (1972). Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels, Part II: Experimental Verification and Application, *International Association of Bridge and Structural Engineers, Publications*, **32**,11, 25-39.
- Chen, W.F. ve Saleeb, A.F., (1994). *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume I: Elasticity and Modelling*, Elsevier, Amsterdam.
- Chen, W.F., (1994). *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume II: Plasticity and Modelling*, Elsevier, Amsterdam.
- Crisfield, M., (1997). *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Darwin, D. ve Pecknold, D. A. W., (1977). Analysis of Cyclic Loading of Plane R/C Structures, *Computers and Structures*, **7**, 137-147.
- Kotsovos, M.D. ve Pavlović, M. N., (1995). *Structural Concrete, Finite-element analysis for limit-state design*, Thomas Telford Services Ltd, London.
- Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. ve Rusch, H., (1969). Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, *Journal of the American Concrete Institute*, **66**, 8, 656-666.
- Kwak, H. G. ve Kim D. Y., (2001). Nonlinear Analysis of RC Shear Walls Considering tension-stiffening effect, *Computers and Structures*, **79**, 499-517.
- Liu, T. C. Y., Nilson, A. H. ve Slate, F. O., (1972). Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete, *Journal Structural Division, ASCE*, **98**, ST5, 1025-1034.
- Ngo, D. and Scordelis, A. C., (1967). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, *Journal of the American Concrete Institute*, **64**,3, 152-163.
- Rashid, Y. R. (1968). Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels, *Nuclear Engineering and Design*, **7**, 4, April, 334-344.
- Saenz, I. P., (1964). Discussion of "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete," by Desayi and Krishnan, *Journal of the American Concrete Institute, Proceedings*, **61**, 9, September, 1229-1235.
- Smith, I.M. ve Griffiths, D.V., (1997). *Programming the Finite Element Method*, John Willey & Sons Ltd, New York.
- Vecchio, F. J., (2000). Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **126**, 9, 1070-1077.
- Vecchio, F. J., ve Collins, M. P., (1982). Response of Reinforced Concrete to in-Plane Shear and Normal Stresses, *Report No. 82, 03*, Department of Civil Engineering, University of Toronto.
- Vecchio, F. J., ve Collins, M. P., (1986). The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear, *Journal of the American Concrete Institute*, **83**, 2, 219-231.