

# Sınır elemanlarının nötron difüzyonuna uygulanmasında Chebyshev hızlandırması

Öznur ENGİN\*, Bilge ÖZGENER

İTÜ Enerji Enstitüsü, Nükleer Enerji Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Bu çalışmada, iki boyutlu grup içi nötron difüzyon denkleminin çözümü için çok gruplu sınır integral denkleminin sabit ya da doğrusal sınır elemanları ayrıklaştırması sonucu ortaya çıkan yetkinlik özdeğer probleminin sayısal çözümünün hızlandırılması konusu incelenmiştir. Sınır elemanları yöntemi sonucu ortaya çıkan katsayılar matrisleri dolu ve simetrik olmayan matris yapıya sahip olup, almaşık yöntemlerin (sonlu fark, sonlu elemanlar) simetrik ve seyrek yapıdaki katsayılar matrislerinden farklılık göstermektedir. Bu nedenle almaşık yöntemlerde yetkinlik özdeğer probleminin sayısal çözümünde kullanılan hızlandırma yöntemlerinin, sınır elemanlarına dayalı bir hesaplama da etkin olup olmayacağı araştırılması gereken bir konu olarak ortaya çıkmaktadır. Gerek sonlu fark gerekse sonlu elemanlar yetkinlik özdeğer problemlerinin çözümünde Chebyshev polinomsal hızlandırmasının özellikle dominans oranının yüksek olduğu problemlerde etkin olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada Chebyshev polinomsal hızlandırmasının sınır elemanlarına dayalı yetkinlik özdeğer problemlerinin çözümünde etkinliğinin irdelenmesi konu edinilmiştir. Yapılan sayısal incelemeler sonunda simetrik olmayan katsayılar matrisi yapısına rağmen sınır elemanları yetkinlik özdeğer problemindeki tüm özdeğerlerin nonnegatif olduğu, dolayısıyla Chebyshev hızlandırmasına uygun olduğu görülmüştür. Bu gözlemler doğrultusunda Chebyshev polinomsal hızlandırması hem sabit hem lineer sınır elemanları yetkinlik özdeğer problemlerine uygulanmış, yapılan sayısal incelemelerle yöntemin gerekli hızlandırmayı sağladığı görülmüştür. Hızlandırmanın beklendiği gibi özellikle dominans oranının büyük olduğu durumlarda etkili olduğu gözlenmiştir. Chebyshev yönteminin etkinliğinin sağlanmasında önemli bir unsurun dominans oranının yeterli doğrulukla ön tahmini olduğu saptanmıştır. Yeterli duyarlılıkla bu tahminin yapılması halinde hızlandırma hem sabit hem de doğrusal sınır elemanı uygulamalarında daha da etkin olabilmektedir.*

**Anahtar Kelimeler:** Sınır elemanları, nötron difüzyonu, Chebyshev hızlandırması.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Öznur ENGİN. oznur@yildiz.edu.tr; Tel: (212) 259 70 70 dahili: 2519. Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Enerji Enstitüsü, Nükleer Enerji Programı'nda tamamlanmış olan "Sınır elemanları yönteminin nötron difüzyon denkleminin uygulanmasında Chebyshev polinomsal hızlandırması" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 19.05.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 03.07.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.12.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Chebyshev acceleration in the application of the boundary elements to the neutron diffusion equation

### Extended abstract

The Boundary Element Method (BEM) is a numerical technique for the solution of boundary value problems in many areas of engineering. BEM has been developed during the last two decades and it derives its popularity from its capacity of confining the unknowns only to the boundary and thus reducing the resulting matrix dimensions tremendously. Although this property is a clear advantage of BEM, the non-symmetrical and full coefficient matrices produced by the method constitute its disadvantage compared to the symmetric and sparse matrices of the Finite Element and Finite Difference Methods (FEM and FDM). The application of the BEM to the neutron diffusion equation has been investigated by many researches during the last one and a half decade.

In criticality eigenvalue problems, the matrix whose eigenvalues are sought is formed by a combination of the group coefficient matrices and its characteristics are expected to affect the convergence rate of the numerical solution of the eigenvalue problem. The most widespread numerical method for the determination of the multiplication eigenvalue is the fission source iteration no matter which base discretization technique (FEM, FDM or BEM) is used. But the problems where the Dominance Ratio, DR, (the ratio of the second largest eigenvalue to the largest one) is high, the fission source iteration suffers from a slow convergence rate. Various acceleration methods (Chebyshev Polynomial Acceleration (CPA), coarse mesh rebalance) have been used for acceleration of fission source iteration when the discretization method is FEM or FDM. Since BEM shows different matricial characteristics, the acceleration of the fission source iteration with BEM as the base method, looks like a topic worth investigation. In this work, the most popular of the acceleration method, namely the CPA, has been applied when the base discretization method is BEM. The BEM discretization is based on the multi-group boundary integral equations whose solution is formally equivalent to the solution of multigroup diffusion equations in differential form. In previous research work, both constant and linear boundary elements have been used for this discretization and these have been implemented in the FORTRAN programs BMG and BMGL respectively. In these programs, the

criticality eigenvalue problem has been solved by the classical fission source iteration. In this work, the CPA is formulated for the solution of criticality eigenvalue problem with BEM as the base discretization method. The formulation is implemented by modification of the previously mentioned programs. The CPA-implemented programs are called BMGCH and BMGLCH for the constant and linear boundary elements respectively. The implementation is restricted to two dimensional homogeneous systems with zero flux vacuum and reflective boundary conditions. The developed software is validated by comparisons with the analytical solutions and the results of the unaccelerated programs, BMG and BMGL.

A theoretical investigation of the eigenvalue spectrum of the resulting matrices has been carried out by supplying the matrices computed by BMG and BMGL as input to the software, MATHEMATICA. Using a newly developed analysis, MATHEMATICA is employed to determine all eigenvalues and the DR of the computed matrix. This analysis showed that all eigenvalues are nonnegative and thus the suitability of the CPA when BEM is the base discretization method. The programs BMGCH or BMGLCH develop an estimate for the DR during the first few iterations prior to the onset of the CPA. Thus in our investigation we had two values for the DR: the "true" DR determined by MATHEMATICA and DR estimate produced by BMG(L)CH. The difference between these values is found to be sizable especially for constant boundary elements. Nevertheless, the CPA is found to be effective in accelerating the solution of the criticality eigenvalue problem in both constant and linear BEM implementations. The acceleration is found to be a little more effective with linear BEM. The reason for this has been further investigated by supplying the "true" DR as input into the programs and using this as the estimate for CPA. When the "true" DR is used, the performance of the CPA becomes much better as expected. Also the CPA becomes equally effective in the constant and linear BEM in contrast to the previously observed better performance of CPA with linear elements when the DR estimate was internally generated. Thus it is concluded that this better performance of BEM with linear elements stems just from the better DR estimate produced relative to the constant element case. Further research should perhaps be directed to improving the algorithm for the DR estimation by the program.

**Keywords:** Boundary elements, neutron diffusion, Chebyshev acceleration.

## Giriş

Sınır Elemanları Metodu (BEM), çeşitli mühendislik ve fizik problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılan önemli bir tekniktir. BEM, belirli bir sistem hacmi içinde, belirli sınır şartları altında, çözümü aranan bir diferansiyel denklemin, tanımlanan sonsuz ortam Green fonksiyonları yardımı ile sadece sistem yüzeyinde bilinmeyenler içeren bir sınır integral denklemine dönüştürülmesi prensibine dayanır. Kısmî diferansiyel denklemlerin sınır integral denklemlerine dönüştürülerek, bilinmeyenlerin sadece homojen sistem sınırlarında tanımlanmasına imkân sağlayan BEM, Sonlu Farklar Metodu (FDM) ve Sonlu Elemanlar Metoduna (FEM) göre çok daha küçük boyutta lineer sistemler üretir. FDM ve FEM’de elde edilen lineer sistem simetrik ve bantlı yapıda iken, BEM’de dolu ve simetrik olmayan bir yapı oluşturuyor ise de lineer sistem boyutlarını küçültmesi bakımından diğer sayısal metodlara göre bir avantaj sağlamaktadır. Bu avantajın diğer mühendislik dallarında olduğu gibi nötron difüzyon denkleminin sayısal çözümüne de uygulanması tercih sebebi olmuştur. Nötron difüzyon denkleminin BEM ile çözümünde birçok araştırmalar yapılmıştır. Bu araştırmalara örnek olarak nötron difüzyon denkleminin serbest nötron kaynağı ve fisyon kaynağı hacim integrallerini içermesinden dolayı hacim integrallerinin yüzey integrallerine çoktan karşılıklık sınır elemanı metodu ile dönüştürüldüğü çalışmalar gösterilebilir (Ozgener ve Ozgener, 1994). Çok gruplu nötron difüzyon hesaplarında yer alan gruptan gruba saçılma terimleri sınır integral denkleminde hacim integrali olarak görülürler. Bu hacimsel saçılma integralleri de yüzey integrallerine dönüştürülebilir (Ozgener, 1998).

Reaktörün çoğaltma katsayısı hesabı yani yetkinlik özdeğer hesabı sayısal analizin en büyük özdeğeri bulmaya yönelik güç iterasyonu metodu, nötron difüzyonunda fisyon kaynağı iterasyonu adını alır. Güç iterasyonu metodunun yavaş yakınsamasından dolayı, güç iterasyonunun hızlandırılması konusunda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. İki boyutlu çok gruplu nötron difüzyon denkleminde FDM ve FEM uygulamalarında fisyon kaynağı iterasyonunun Chebyshev poli-

nomsal hızlandırma tekniği ile hızlandırılabilirdiği saptanmıştır (Alp, 1976; Özgener ve Kabadaayı, 1996).

Seyrek ve simetrik katsayılar matrisine sahip olan FDM ve FEM’in aksine BEM’de katsayılar matrisi dolu ve simetrik olmayan bir yapıda olduğundan, almaşık yöntemlerde etkin olan hızlandırma yöntemlerinin BEM’de etkin olup olmayacağı sorusu araştırılmaya değer bir konudur. Bu nedenle, bu çalışmada Chebyshev polinomsal hızlandırma yönteminin sınır elemanları yetkinlik özdeğer probleminde kullanılması konusu araştırılmış, geliştirilen bilgisayar programları aracılığıyla yöntemin etkinliğinin sınanması için sayısal deneyler yapılmıştır.

## Çok gruplu sınır integral denklemine BEM’in uygulanması

Hacmi  $V$ , yüzeyi  $S$  olan belirli bir homojen nükleer sistem için çok gruplu nötron difüzyon denklemi  $g=1,2,\dots,G$  grup sayısı olmak üzere,

$$\nabla^2 \Phi_g(\vec{r}) - k_g^2 \Phi_g(\vec{r}) = -\frac{s_g(\vec{r})}{D_g}, \quad \vec{r} \in V \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $k_g$ ,  $D_g$ ,  $s_g$  ve  $\Phi_g$  sırasıyla grup difüzyon uzunluğunun tersi, difüzyon sabitini, kaynak ve akıyı temsil etmektedir. (1) denklemi,  $S_v$  boşluk ve  $S_r$  ise yansıtıcı sistem sınırlarını göstermek üzere aşağıda verilen,

$$\Phi(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} \in S_v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} \in S_r \quad (3)$$

sınır şartları altında çözülecektir. (1)’de verilen grup kaynağı,

$$s_g(\vec{r}) = q_g(\vec{r}) + (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow h} \Phi_h(\vec{r}) \quad (4)$$

şeklinde tanımlıdır. Eşitlik (4)’deki ilk terim,  $q_g$  grup fisyon kaynağını göstermektedir. Denklem (4)’deki ikinci terim olan grup saçılma kaynağı yazılırken gruplar arası yukarı saçılma olmadığı varsayımı yapılmıştır. Grup fisyon kaynağı;

$$q_g(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{k_{etk}} f(\vec{r}) \quad (5) \quad \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_g(\vec{r}) dV = c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) \quad (11)$$

$$f(\vec{r}) = \sum_{h=1}^G v_h \Sigma_{f,h} \Phi_h(\vec{r}) \quad (6)$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonsuz ortam grup Green fonksiyonu (grup temel çözümü),

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad (7)$$

denkleminin çözümüdür. Grup temel çözümü grup difüzyon uzunluğunun tersine bağlıdır. İki boyutlu sistemler için  $G_g$ ,

$$G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_g |\vec{r} - \vec{\rho}|) \quad (8)$$

burada  $K_0$  ikinci tür sıfırcıncı mertebe modifiye Bessel fonksiyonudur (Ozgener ve Ozgener, 2001).

(1) denklemi temel çözüm ile çarpılıp  $V$  hacmi üzerinden integre edilip Green'in ikinci özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \int_V (\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho})) \Phi_g(\vec{r}) dV \\ &= - \int_V \frac{s_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS \quad (9) \\ &+ \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (9) eşitliğinin sol tarafı (7) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & \int_V -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_g(\vec{r}) dV + \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS \\ & - \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS = - \int_V \frac{s_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (10) \end{aligned}$$

şeklinde olur. (10) eşitliğinin ilk terimi sistem yüzeyinde sürekli bir tanjanta sahip olması şartıyla,

biçimini alır.  $\theta$  iki eleman arasındaki açı olmak üzere,

$$c(\vec{\rho}) = \begin{cases} 1, & \vec{\rho} \in V, \rho \notin S \\ \frac{\theta}{2\pi}, & \vec{\rho} \in S \end{cases} \quad (12)$$

tanımına sahiptir. (11) ve (12)'de verilen tanımlardan dolayı (10) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS \\ & - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS = \int_V \frac{s_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (13) \end{aligned}$$

sınır integral denklemi elde edilir. (13) denkleminin sağ tarafındaki son terim, (4)'deki ikinci terim olan saçılma hacim integrallerini,

$$I_g(\vec{\rho}) = \sum_{h=1}^{g-1} I_{s,g \leftarrow h}(\vec{\rho}) \quad (14)$$

$$I_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow h}}{D_g} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_h(\vec{r}) dV \quad (15)$$

içermektedir. Yapılan bir çalışmada Ozgener (1998) yukarıdaki saçılma integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Buna göre (13):

$$\begin{aligned} & c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS \\ & - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS = \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \left[ c(\vec{\rho}) \Phi_h(\vec{\rho}) \right. \\ & \left. + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_h(\vec{r}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_h}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (16) \\ & + \int_V z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilmektedir.  $d_{gh}$  katsayıları bir başka çalışmada Ozgener (1998) verilmiştir.

$$z_g(\vec{r}) = \frac{q_g(\vec{r})}{D_g} - \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \frac{q_h(\vec{r})}{D_h} \quad (17)$$

$$\varphi_g(\vec{r}) = \Phi_g(\vec{\rho}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \Phi_h(\vec{\rho}) \quad (18)$$

$$\varphi'_g(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \frac{\partial \Phi_h}{\partial n}(\vec{r}) \quad (19)$$

tanımları ile (16),

$$c(\vec{\rho})\varphi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho})\varphi_g(\vec{r})dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho})\varphi'_g(\vec{r})dS = \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho})z_g(\vec{r})dV \quad (20)$$

biçimine dönüştürülebilir. Eşitlik (5)'ten (17),

$$z_g(\vec{r}) = \frac{w_g}{k_{etk}} f(\vec{r}) \quad (21)$$

$$w_g = \frac{\chi_g}{D_g} - \sum_{h=1}^{g-1} \frac{\chi_h}{D_h} d_{gh} \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir. (21) ve (22) eşitlikleri (20) eşitliğinde kullanılırsa,

$$c(\vec{\rho})\varphi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho})\varphi_g(\vec{r})dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho})\varphi'_g(\vec{r})dS = \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho})f(\vec{r})dV \quad (23)$$

şeklinde saçılma hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürüldüğü sınır integral denklemi elde edilir. Burada,

$$\varphi_g(\vec{r}) = \Phi_g(\vec{r}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \Phi_h(\vec{r}) \quad (24)$$

şeklinde tanımlı olup  $g$  ve daha önceki grup akıların lineer kombinasyonu şeklindedir.

## Sınır eleman ayrıklaştırması

İki boyutlu homojen bölgenin sınırı, her bir elemanın merkezi bir nod olmak üzere  $I$  adet sabit sınır elemanına, sistem içi de  $N$  adet sonlu elemandan oluşan  $K$  nodlu sonlu eleman ızgarasına ayrılınsın. (23) denklemi sistem yüzeyindeki  $i$ 'inci sınır elemanının  $\vec{\rho}_i$  konum vektörlü merkez noktası için yazılırsa,

$$c(\vec{\rho}_i)\varphi_g(\vec{\rho}_i) + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i)\varphi_g(\vec{r})dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)\varphi'_g(\vec{r})dS = \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)f(\vec{r})dV \quad (25)$$

şeklini alır. Sabit sınır elemanı yaklaşımında,

$$\varphi_g(\vec{r}) = \varphi_g(\vec{r}_i) = \varphi_{g,i} \quad \vec{r} \in S_i \quad (26)$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_i) = \varphi'_{g,i} \quad \vec{r} \in S_i \quad (27)$$

$\varphi_{g,i}$  ve  $\varphi'_{g,i}$  her bir sınır elemanı içinde sabittir. (25) denkleminin sağ tarafındaki kaynak fonksiyonu,

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^K h_k(\vec{r})f_k \quad (28)$$

şeklinde yazılabilir, burada  $h_k(\vec{r})$   $k$ 'inci sonlu eleman noduna ait baz fonksiyonlarıdır. (26), (27) ve (28)'de verilen yaklaşımlar (25)'te yerine yerleştirilirse,

$$c(\vec{\rho}_i)\varphi_g(\vec{\rho}_i) + \sum_{j=1}^I \left( \int_{S_j \in S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i)dS \right) \varphi_g(\vec{r}_j) - \sum_{j=1}^I \left( \int_{S_j \in S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)dS \right) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_j) = \frac{w_g}{k_{etk}} \sum_{k=1}^K \left( \sum_{n=1}^N \int_{V_n} h_k(\vec{r})G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)dV \right) f(\vec{r}_k) \quad (29)$$

ifadesi elde edilir.

$$g_{g,ij} = - \int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS \quad i, j = 1, 2, \dots, I$$

$$h_{g,ij} = c_i \delta_{ij} + \int_{S_j} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS \quad (30)$$

$$p_{g,ik} = \sum_{n=1}^N \int_{V_n} h_k(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \quad k = 1, 2, \dots, K$$

(30)'da verilen tanımlar ile (29) denklemi,

$$\underline{G}_g \underline{\varphi}' + \underline{H}_g \underline{\varphi} = \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{P}_g f \quad (31)$$

şeklinde yazılabilir.  $\underline{G}_g$  ve  $\underline{H}_g$ , (IxI) boyutunda kare,  $\underline{P}_g$  ise (IxK) boyutunda dikdörtgen matrislerdir. Burada  $\underline{\varphi}'$  ve  $\underline{\varphi}$  bilinmeyen vektörleri bir  $\underline{u}_g$  vektörü,  $\underline{G}_g$  ve  $\underline{H}_g$  bilinen matrisleri de bir  $\underline{A}_g$  matrisi altında toplanır; (2) ve (3) sınır koşullarından bilinmeyenlerin yarısı düşürülürse (31) eşitliği matrisyel biçiminde,

$$\underline{A}_g \underline{u}_g = \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{P}_g f \quad (32)$$

şeklinde yazılabilir. Filyon kaynağı iterasyonu sırasında  $f$  ve  $k_{etk}$  öngörüsü bir önceki iterasyondan bilindiği için (32) eşitliği Crout ayrışımı ile çözümlenip  $\underline{u}_g$  bulunabilir. Öte yandan iç akı hesabı için (23) denklemi herhangi bir  $\vec{\rho}_k$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ) koordinatlı iç nod için yazılarak:

$$\tilde{\varphi}_g = \underline{S}_g \underline{\varphi}' + \tilde{T}_g \underline{\varphi} + \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{R}_g f \quad (33)$$

denklemi elde edilir. (33) eşitliğindeki ilk terim iç akıyı temsil etmektedir. Burada,

$$s_{g,ij} = \int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS \quad i = 1, 2, \dots, K \quad j = 1, 2, \dots, I \quad (34)$$

$$\tilde{t}_{g,ij} = - \int_{S_j} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS$$

şeklinde tanımlıdır. (33) denkleminin sağ tarafındaki kaynak terimi yetkinlik özdeğer problemlerinde (28) tanımından,

$$r_{g,ik} = \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) h_k(\vec{r}) dV \quad i, k = 1, 2, \dots, K \quad (35)$$

şeklinde yazılabilir. (33) eşitliğinde,  $\underline{S}_g$  ve  $\tilde{T}_g$ , (KxI) boyutunda dikdörtgen,  $\underline{R}_g$  ise (KxK) boyutunda kare matrislerdir. Burada (32) eşitliğindeki  $\underline{u}_g$  vektörü,  $\underline{S}_g$  ve  $\tilde{T}_g$  bilinen matrisleri de bir  $\underline{T}_g$  matrisi altında toplanırsa,

$$\tilde{\varphi}_g = \underline{T}_g \underline{u}_g + \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{R}_g f \quad (36)$$

elde edilir. (32) çözüldükten sonra (36) ve (24) aracılığı ile iç akılar hesaplanıp yeni  $f$  ve  $k_{etk}$  öngörüsü bulunur.

### Güç iterasyonunun Chebyshev polinomsal metodu ile hızlandırılması

(6) eşitliğinde verilen grup filyon kaynağı (32) ve (36) eşitliklerinde yerine yerleştirilirse,

$$\underline{A}_g \underline{u}_g = \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{P}_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{f,g'} \tilde{\varphi}_{g'} \quad (37)$$

$$\tilde{\varphi}_g = \underline{T}_g \underline{u}_g + \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{R}_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{f,g'} \tilde{\varphi}_{g'} \quad (38)$$

haline gelir. (37) ve (38) denklemlerinin sağ tarafları  $g=1, 2, 3, \dots, G$  için,

$$\tilde{P}_{gg'} = v_{g'} \Sigma_{f,g'} w_{g'} \underline{P}_g \quad \text{ve} \quad \tilde{R}_{gg'} = v_{g'} \Sigma_{f,g'} w_{g'} \underline{R}_g$$

tanımlamaları ile (37) ve (38) eşitlikleri,

$$\underline{A}_g \underline{u}_g = \frac{1}{k_{etk}} \sum_{g'=1}^G \tilde{P}_{gg'} \tilde{\varphi}_{g'} \quad (39)$$

$$\tilde{\varphi}_g = \underline{T}_g \underline{u}_g + \frac{1}{k_{etk}} \sum_{g'=1}^G \tilde{R}_{gg'} \tilde{\varphi}_{g'} \quad (40)$$

şeklinde yazılabilir. (39) eşitliğinde  $\underline{u}_g$  yalnız bırakılıp (40) eşitliğinde yerine yerleştirilip gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g = \frac{1}{k_{etk}} \sum_{g'=1}^G \underline{B}_{gg'} \underline{\tilde{\varphi}}_{g'} \quad (41)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\underline{B}_{gg'} = \underline{T}_g \underline{A}^{-1} \underline{\tilde{P}}_{gg'} + \underline{\tilde{R}}_{gg'}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (41) denklemi,

$$\sum_{g'=1}^G \underline{B}_{gg'} \underline{\tilde{\varphi}}_{g'} = k_{etk} \underline{\tilde{\varphi}}_g \quad g = 1, 2, 3, \dots, G \quad (42)$$

şeklinde ifade edilebilir. (42) denklemleri tüm gruplar için bir araya getirilirse,

$$\underline{B}\underline{\Psi} = k_{etk} \underline{\Psi} \quad (43)$$

klasik özdeğer-özvektör problemi elde edilir. Eşitlik (43)'teki  $\underline{B}$  matrisinin temel özdeğer ve özvektörü güç iterasyonu metodundan bulunabilir. Bu klasik özdeğer-özvektör problemi  $\underline{\Psi}^{(0)}$  ilk öngörüsü ile klasik güç iterasyonu algoritmasıyla;

$$\underline{\tilde{\Psi}}^{(m)} = \underline{B}\underline{\Psi}^{(m-1)} \quad (44)$$

$$k^{(m)} = \frac{\underline{\tilde{\Psi}}^{(m)T} \underline{\tilde{\Psi}}^{(m)}}{\underline{\tilde{\Psi}}^{(m)T} \underline{\Psi}^{(m-1)}} \quad (45)$$

$$\underline{\Psi}^{(m)} = \frac{1}{k^{(m)}} \underline{\tilde{\Psi}}^{(m)} \quad (46)$$

şeklinde çözülebilir. Bu iterasyon,

$$\underline{k}^{(m)} = \min_i \frac{\underline{\tilde{\Psi}}_i^{(m)}}{\underline{\Psi}_i^{(m-1)}} \quad (47)$$

$$\bar{k}^{(m)} = \max_i \frac{\underline{\tilde{\Psi}}_i^{(m)}}{\underline{\Psi}_i^{(m-1)}}$$

özdeğer alt-limit ve üst-limit öngörülerıyla,

$$\frac{\bar{k}^{(m)} - \underline{k}^{(m)}}{2k^{(m)}} \leq \varepsilon \quad (48)$$

yakınsama kriteri gerçekleşene kadar sürdürülebilir.  $\underline{k}^{(m)}$  ve  $\bar{k}^{(m)}$  iterasyon öngörülleri

$$\underline{k}^{(m)} \leq \underline{k}^{(m+1)} \leq \dots \leq k_1 \leq \dots \leq \bar{k}^{(m+1)} \leq \bar{k}^{(m)}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{k}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{k}^{(m)} = k_1 \quad (49)$$

bağıntısını sağlarlar (Varga, 1962).

Klasik güç iterasyonu algoritmasında (44-46), yeni özvektör öngörüsü için sadece son hesaplanan özvektör kullanılmaktadır. Güç iterasyonunun yakınsama hızının artırılması için, yeni özvektör öngörüsünü  $a_{mp}$  katsayıları ile daha önce hesaplanmış özvektör öngörülerinin  $\underline{\Psi}^{(p)}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots, m$ ) bir lineer kombinasyonu,

$$\underline{\Theta}^{(m)} = \sum_{p=0}^m a_{mp} \underline{\Psi}^{(p)} \quad (50)$$

şeklinde yazılarak,  $a_{mp}$  katsayılarının yeni öngörünün gerçek özvektöre daha iyi bir yaklaşım olmasını sağlayacak şekilde seçilmesi uygun olacaktır. (46) ifadesi yerine, (50) ifadesinin kullanılması Chebyshev polinomsal hızlandırma tekniklerinin çıkış noktasıdır. (50)'deki  $\underline{\Psi}^{(p)}$  özvektör öngörülleri (44) ve (46) denklemlerinden,

$$\underline{\Psi}^{(p)} = \frac{1}{\prod_{r=0}^p k^{(r)}} \underline{B}^p \underline{\Psi}^{(0)} \quad (51)$$

eşitliği elde edilir. Özdeğer öngörülerinin aranan  $k_1 = k_{etk}$  değerine yeterince yakın olduğu varsayılırsa,

$$\underline{\Psi}^{(p)} \cong \left( \frac{1}{k_1} \underline{B} \right)^p \underline{\Psi}^{(0)} \quad (52)$$

eşitliği elde edilir, elde edilen son ifade (50)'de yerine yerleştirilirse,

$$\underline{\Theta}^{(m)} = \sum_{p=0}^m a_{mp} \left( \frac{1}{k_1} \underline{B} \right)^p \underline{\Psi}^{(0)} \quad (53)$$

elde edilir. Diğer taraftan (43) eşitliğindeki  $\underline{\Psi}$  özvektörlerinin  $N$  boyutlu vektör uzayında bir baz oluşturduğu varsayılırsa herhangi bir vektör baz vektörleri cinsinden,

$$\underline{\Psi}^{(0)} = \sum_{i=1}^N c_i \underline{\Psi}_i \quad (54)$$

şeklinde yazılabilir.  $\underline{\Psi}^{(0)}$ , (53)'te yerine yerleştirilirse,

$$\underline{\Theta}^{(m)} = c_1 P_m(1) \underline{\Psi}_1 + \sum_{i=2}^N c_i P_m \left( \frac{k_i}{k_1} \right) \underline{\Psi}_i \quad (55)$$

haline gelir. Burada,

$k = k_1 > |k_i| \quad i \neq 1$  ve  $\left| \frac{k_i}{k} \right| < 1$ ,  $\underline{\Psi}_i$ 'ler özvektör,  $P_m(x)$  ler ise,

$$P_m(x) = \sum_{p=0}^m a_{mp} x^p \quad (56)$$

şeklinde tanımlı  $m$ 'inci derece bir polinomdur. (55) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim ne kadar küçük olursa gerçek özvektöre o kadar iyi bir yaklaşım yapılmış olunacaktır. Fakat  $c_i$  keyfi sabitleri ve  $\underline{B}$  matrisinin  $k_i$  özdeğerleri bilinmediğinden gerçek bir minimizasyon yapılması mümkün değildir. Bununla birlikte hata terimi için pratik bir optimizasyon yapılabilir.

$$\rho = \max_{i \neq 1} \frac{|k_i|}{k_1} \quad (57)$$

(57)'de verilen dominans oranının daha küçük olması halinde, güç iterasyonunun yakınsaması daha hızlı olacaktır. Bu durumda hata terimi için en iyi minimizasyonun,  $P_m(1)=1$  ve  $|P_m(x)|$  de-

ğerlerinin de  $[0, \rho]$  aralığında minimum olacak şekilde seçilmesi ile yapılması mümkündür (Alp, 1976). En iyi minimizasyonun, Chebyshev polinomları cinsinden,

$$P_m(x) = \frac{T_m \left( \frac{2x}{\rho} - 1 \right)}{T_m \left( \frac{2}{\rho} - 1 \right)} \quad (58)$$

şeklinde seçilmesi halinde gerçekleştirilebileceği gösterilebilir (Hagemann, 1963).  $m > 0$  olmak üzere  $m$ 'inci derece Chebyshev polinomları:

$$T_m(x) = \begin{cases} \cos(m \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(m \cosh^{-1} x) & x \geq 1 \end{cases} \quad (59)$$

İlk ikisi  $T_0(x)=1$  ve  $T_1(x)=x$  olan Chebyshev polinomları arasında

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) \quad m \geq 1 \quad (60)$$

şeklinde bir üç terimli rekürsif (tekrarlama) bağıntısı vardır (Mason ve Handscomb, 2003).  $T_m(x)$  tanımı (58) ve (60)'ta kullanılarak,

$$P_{m+1}(x) = 2 \frac{\cosh(m\sigma)}{\cosh[(m+1)\sigma]} \left( \frac{2x}{\rho} - 1 \right) P_m(x) - \frac{\cosh[(m-1)\sigma]}{\cosh[(m+1)\sigma]} P_{m-1}(x), \quad m \geq 1 \quad (61)$$

üç terimlik bir rekürsif bağıntısı yazılabilir (Hagemann, 1963). İlk iki polinom,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{\frac{2x}{\rho} - 1}{\frac{2}{\rho} - 1}, \quad \sigma = \cosh^{-1} \left( \frac{2}{\rho} - 1 \right) \quad (62)$$

ifadeleri ile belirtilmiştir. Chebyshev polinomsal hızlandırması için (61) rekürsif bağıntısı kullanılarak, (46)'daki  $\underline{\Psi}^{(m)}$  vektörleri yerine (53)'te verilen  $\underline{\Theta}^{(m)}$  vektörleri cinsinden ifade edilebilir



(Varga, 1961). Chebyshev polinomları ile hızlandırılmış güç iterasyonu:

$$\underline{\tilde{\Psi}}^{(m)} = \underline{B}\underline{\Theta}^{(m-1)} \quad (63)$$

$$k^{(m)} = \frac{\underline{\tilde{\Psi}}^{(m)T} \underline{\tilde{\Psi}}^{(m)}}{\underline{\tilde{\Psi}}^{(m)T} \underline{\Theta}^{(m-1)}} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Theta}^{(m)} &= \underline{\Theta}^{(m-1)} + \alpha_m \left( \frac{1}{k^{(m)}} \underline{\tilde{\Psi}}^{(m)} - \underline{\Theta}^{(m-1)} \right) \\ &+ \beta_m \left( \underline{\Theta}^{(m-1)} - \underline{\Theta}^{(m-2)} \right) \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (65)$$

Chebyshev polinom metodu ile hızlandırmanın etkin olabilmesi için dominans oranının yeterli doğrulukta tahmin edilmesine ve bir  $k$  öngörüsüne ihtiyaç vardır. (65) eşitliğindeki  $\alpha_m$  ve  $\beta_m$  katsayıları,

$$1 - \alpha_m + \beta_m = -\frac{\rho}{2} \alpha_m, \quad \alpha_1 = \frac{2}{2 - \rho}, \quad \beta_1 = 0 \quad (66)$$

ve  $m \geq 2$  için,

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{4}{\rho} \left[ \frac{\text{Cosh}[(m-1)\sigma]}{\text{Cosh}(m\sigma)} \right] \\ \beta_m &= \frac{\text{Cosh}[(m-2)\sigma]}{\text{Cosh}(m\sigma)} \end{aligned} \quad (67)$$

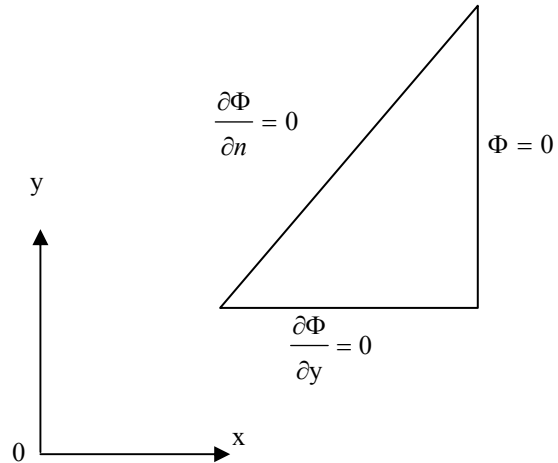
şeklinde tanımlanmıştır.

### Sayısal örnekler

BMG(L) programı, yetkinlik özdeğer problemini klasik fisyon kaynağı iterasyonu kullanarak çözer. Bu çalışma çerçevesinde geliştirilen BMGCH ve BMGLCH programları, sabit ve lineer sınır elemanı kullanarak formüle edilen yetkinlik özdeğer probleminin çözümünü Chebyshev polinomsal hızlandırması metodu kullanarak gerçekleştirmektedir. Programlar FORTRAN dilinde yazılmış olup, WINDOWS işletim sistemi altında koşturulmuştur.

Güç iterasyonunun hızlandırılmasında kullanılan Chebyshev polinomsal hızlandırması metodunun uygulanabilirliğinin saptanması için, yetkinlik özdeğer araması problemi teorik olarak ele alınıp MATHEMATICA programı yardımıyla sistem özdeğerleri hesaplanmıştır. BMG(L) çeşitli problemler için koşturulmuş, buradan elde edilen verilerle (43) denklemindeki özdeğer problemindeki tüm özdeğerlerin saptanması için MATHEMATICA programı kullanılmıştır. Bu şekilde sınır elemanları metodunda ortaya çıkan özdeğer spektrumuna bakılarak, Chebyshev hızlandırmasının uygulanabilirliği anlaşılacak istenmiştir.

Eşitlik (43)'te elde edilen klasik özdeğer-özvektör probleminin çözümü ve ele alınan sayısal örnekler için Şekil 1'de gösterildiği gibi kare bir sistemin simetrisinden faydalanılarak, sistemin sadece sekizde biri ele alınmıştır.



Şekil 1. Nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemleri için çözümlenen 1/8'lik geometri

Sistem kenar uzunluğu 100 cm olan tek grup difüzyon problemi kenar başına 5 sabit sınır elemanı kullanılarak formüle edilmiş ve ortaya çıkan (43) denkleminde tanımlanan özdeğer probleminin tüm özdeğerleri MATHEMATICA yazılımı ile hesaplanmıştır. Tablo 1'de tek gruplu özdeğer problemi için nükleer sabitler verilmiştir.

Tablo 1. Tek gruplu difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler

$D(cm)$	1.77764
$\Sigma_f(cm^{-1})$	0.0104869
$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	0.0262173
$\Sigma_a(cm^{-1})$	0.0143676
$\omega_f(J)$	$3.2042 \cdot 10^{-11}$
$P(Wcm^{-1})$	4000

Tablo 1'deki veriler kullanılarak analitik çözüm sonucu  $k_{eff}=1.46657782$  olan bu problemin yukarıda belirtilen ızgara ile özdeğerleri MATHEMATICA programından:

Özdeğerler:

$$k_i = \{1.45624, 0.725562, 0.479504, 0.314095, 0.242842, 0.170018, 0.152014, 0.125302, 0.0979662, 0.0779552, 0.0691879, 0.0500436, 0.0418231, 0.0183741, 0.0123523, 0.00194851, 4.00932 \cdot 10^{-17}, 0., 0., 0., 0.\}$$

olarak hesaplanmıştır. Görüldüğü gibi, simetrik olmayan matris yapısına rağmen sınır elemanları formülasyonu sonucu oluşan özdeğer problemindeki tüm özdeğerler nonnegatiftir. Bu da Chebyshev polinomsal hızlandırmasının uygulanabilirliğinin bir göstergesidir. Ayrıca bu sonuçlarla eşitlik (57)'den ikinci büyük özdeğer, en büyük özdeğere bölünerek dominans oranı,

$$\rho = \frac{k_2}{k_1} = \frac{0.725562}{1.45624} = 0.498244$$

olarak saptanabilir. Ayrıca MATHEMATICA programı her özdeğere karşılık gelen özvektörü de üretebilmektedir. En büyük özdeğer olan 1.45624'e karşılık gelen özvektör aşağıda verilmiştir.

$$\underline{\Psi}_1 = \{0.416488, 0.396161, 0.336763, 0.244119, 0.128056, 0.0327058, 0.377873, 0.323277, 0.234453, 0.123314, 0., 0.277602, 0.201709, 0.106066, 0.,$$

$$0.154018, 0.0790456, 0., 0.0514954, 0., 0.00552621\}$$

Beklendiği gibi en büyük özdeğere karşılık gelen özvektör nonnegatiftir.

Yukarıda ele alınan örnekte kenar başına 5 sınır elemanı kullanılmıştı. Bu örnekteki kenar başına sınır elemanı sayısı 5 dışında 10, 20, ve 40 alınarak Chebyshev hızlandırmazsız BMG ve Chebyshev hızlandırılmış BMGCH programları ile çözüm üretilmiştir. BMGCH programı Chebyshev hızlandırması sırasında dominans oranı,  $\rho$ , tahminini kendi üretmektedir. Tablo 2'de bu koşullarda elde edilen sonuçlar özet halinde verilmiştir.

Tablo 2. Tek gruplu difüzyon yetkinlik teorisi özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı-ızgara	$k_{eff}$ % hata	is	isky	$\rho$	$\rho$ % hata
BMG-5	0.7051	18	33.33		
BMGCH-5	0.7050	12		0.6131	23.051
BMG-10	0.1902	20	30.00		
BMGCH-10	0.1901	14		0.7047	28.988
BMG-20	0.0552	21	28.57		
BMGCH-20	0.0551	15		0.7640	37.155
BMG-40	0.0194	21	19.05		
BMGCH-40	0.0193	17		0.8010	

is: İterasyon Sayısı

isky: İterasyon Sayısı Kazanç Yüzdesi

$$= \left[ \frac{\text{BMG}(\text{iterasyon sayısı}) - \text{BMGCH}(\text{iterasyon sayısı})}{\text{BMG}(\text{iterasyon sayısı})} \right] \times 100$$

$$\rho : \% \text{ hata} = \left( \frac{\rho_{MAT} - \rho_{PROG}}{\rho_{MAT}} \right) \times 100$$

Tablo 2'den ızgara incelidikçe elde edilen  $k_{eff}$  değerlerinin analitik özdeğere yakınsadığı görülmektedir. Aynı tablo Chebyshev polinomsal hızlandırması metodunun iterasyon sayısını en kaba ızgarada %33, en ince ızgarada %19 azalttığını göstermektedir. Yani Chebyshev metodu hızlandırma sağlamaktadır. Aynı tablodaki BMGCH dominans oranları tahminlerinin en

kaba ızgarada %23, en ince ızgarada %37 hata içerdiği görülmektedir. Büyük olasılıkla dominans oranı tahminindeki ızgara inceltilmesine bağlı hata yükselmesi ince ızgaralarda Chebyshev metodunun kaba ızgaralardaki kadar etkin olmasını önlemektedir. Bunun doğru olup olmadığı için BMGCH programının kendi dominans oranı tahminini üretmesi engellenmiş, bunun yerine MATHEMATICA tarafından hesaplanmış “gerçek” dominans oranları dışarıdan girilerek BMGCH’nin bu değerlerle çalışması sağlanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3’te sunulmuştur.

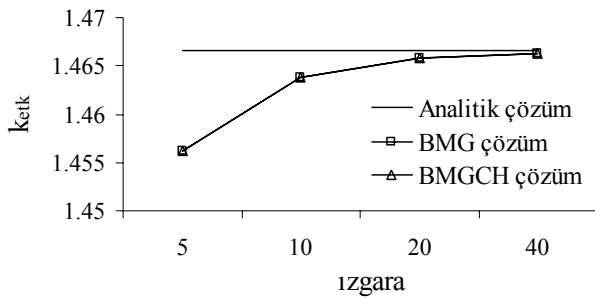
Tablo 3. Gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girdilmesi

ızgara	BMGCH-5	BMGCH-10	BMGCH-20
is	11	12	12
isky	38.89	40.00	42.86
$\rho_{MAT}$	0.4982	0.5464	0.5571

$\rho_{MAT}$ : MATHEMATICA sonuçları

Burada görüldüğü gibi doğru dominans oranı ile ızgara inceldikçe Chebyshev hızlandırmasının sağladığı kazanç azalmamakta hatta artmaktadır.

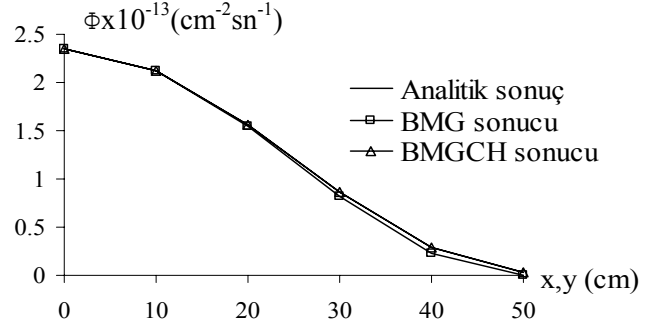
Şekil 2’de hızlandırmasız BMG ve Chebyshev hızlandırmalı BMGCH programlarından elde edilen kenar başına eleman sayılarına göre sayısal  $k_{etk}$  değerleri ile analitik  $k_{etk}$  değerinin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 2. Tablo 2’de verilen sayısal  $k_{etk}$  değerleri ile analitik  $k_{etk}$  değerinin karşılaştırılması

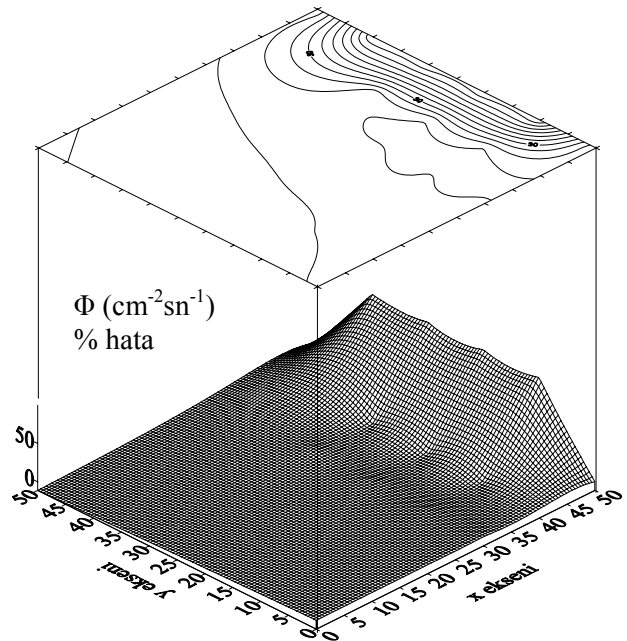
Şekil 2’de görüldüğü gibi BMG ve BMGCH programlarından elde edilen  $k_{etk}$  değerleri ızgara inceldikçe analitik  $k_{etk}$  değerine yaklaşmaktadır.

Şekil 3’te kenar başına 5 eleman örneği için BMGCH programından elde edilen köşegen akı dağılımları ile analitik akı değerlerinin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 3. Kenar başına 5 eleman örneği için BMG-BMGCH programından elde edilen köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması

Şekil 3’te görüldüğü gibi sayısal sonuçlar ile analitik sonuç hemen hemen çakışmaktadır. Şekil 4’te BMGCH programından kenar başına 5 eleman örneği için elde edilen akı dağılımlarının yüzde hatalarının 2 ve 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.



Şekil 4. Kenar başına 5 eleman örneği için BMGCH programından elde edilen akı dağılımlarının yüzde hatalarının 2-3 boyutlu gösterimi

Şekil 4 incelenirse, boşluk sınır şartının uygulandığı kenarda akı dağılımlarının yüzde hatalarının giderek büyüdüğü görülmektedir.

Aynı problemin sabit yerine lineer sınır elemanları ile çözümüne gidilmiş, yine kenar başına eleman sayısı 5, 10, 20 ve 40 alınarak çözümler üretilmiştir. Tablo 2’de sabit elemanlar için verilen sonuçların tümünün lineer seçilmesi halindeki durumu Tablo 4’te sunulmaktadır.

*Tablo 4. Tek gruplu difüzyon yetkinlik teorisi özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları*

Program adı-ızgara	$k_{\text{eff}}$ % hata	is	isky	$\rho$	$\rho$ % hata
BMGL-5	1.8369	19	36.84		
BMGLCH-5	1.8368	12		0.5220	0.672
BMGL-10	0.5120	20	40.00		
BMGLCH-10	0.5119	12		0.6155	12.33
BMGL-20	0.1362	21	33.33		
BMGLCH-20	0.1361	14		0.7034	26.32
BMGL-40	0.0354	21	28.57		
BMGLCH-40	0.0353	15		0.7596	

Tablo 4 incelenirse lineer sınır elemanlarının tıpkı sabit sınır elemanları gibi  $k_{\text{eff}}$ ’de analitik değere yakınsadığı görülmektedir. Ancak lineer elemanlar ile elde edilen % hatalar biraz fazladır. Bu durum daha önce yapılan bir çalışmada da gözlemlenmişti Ozgener (1998) ve şaşırtıcı değildir. Bu durum büyük olasılıkla lineer elemanlarda köşe nodlardaki akı türevinden kaynaklanmaktadır (Brebbia, 1989). Bu sorun köşe nodlarda çift nod tanımı yöntemi ile aşılabilmektedir, ancak bizim çalışmamızda buna yer verilmemiştir. Tablo 4, Tablo 2 ile karşılaştırılırsa, iterasyon sayısı kazanç oranlarının, lineer elemanlarda sabit elemanlara göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Bunun nedeni ise lineer elemanlardaki program tarafından üretilen dominans oranı tahminlerinin sabit sınır elemanlardakine göre daha az hata içermesidir. Ancak lineer elemanlarda dahi ızgara inceldikçe dominans oranı tahmini kötüleşmektedir. Sabit

sınır elemanlardakine benzer şekilde lineer elemanlarda da MATHEMATICA’nın ürettiği “gerçek” dominans oranları dışardan girdilerek koşullar yapılmıştır. Bu koşulların sonuçları Tablo 5’te sunulmaktadır.

*Tablo 5. Gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girdilenmesi*

Izgara	BMGLCH-5	BMGLCH-10	BMGLCH-20
is	11	12	12
isky	42.11	40.00	42.86
$\rho_{\text{MAT}}$	0.5185	0.5480	0.5569

Tablo 5’te görüldüğü gibi gerçek dominans oranlarının girilmesi halinde iterasyon sayıları düşmekte ve Chebyshev hızlandırması çok etkin olmaktadır. Tablo 3 ile Tablo 5 bir arada incelendiği takdirde doğru dominans oranının girilenlenmesi halinde Chebyshev hızlandırmasının sabit ve lineer elemanlarda hemen hemen aynı derecede etkin olduğu görülmektedir.

## Sonuç

Bu çalışmada, sınır elemanlarının nötron difüzyon denkleminde uygulanmasında ortaya çıkan özdeğer probleminin çözümünün Chebyshev polinomsal yöntemiyle hızlandırılması formüle edilerek incelenmiş ve hızlandırmanın gerçekleştirildiği saptanmıştır. Ayrıca Chebyshev polinomsal yönteminin hızlandırmadaki etkinliğinin gerçeğe yakın bir dominans oranı tahmini yapılmasına bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Bundan sonraki araştırmalarda daha iyi dominans oranı tahminine yönelik algoritma geliştirilmesi konusuna ağırlık verilmesi yerinde olacaktır.

## Kaynaklar

- Alp, C., (1976). Dama tahtası biçiminde yeni bir havuz tipi araştırma reaktörünün nötron fizik dizayn hesapları, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- Brebbia, C.A., (1989). *Boundary elements: An introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Avon.
- Hagemann, L.A., (1963). Numerical methods and techniques used in two-dimensional neutron diffusion program, PDQ-5, (Bettis Atomic Power Laboratory report WAPD-TM-364, 1963).

- Mason, J.C., Handscomb, D.C., (2003). *Chebyshev polynomials*, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, Fla.
- Ozgener, B. ve Ozgener, H.A., (1994). The application of the multiple reciprocity method to the boundary element formulation of the neutron diffusion equation, *Annals of Nuclear Energy*, **21**, 11, 711-723.
- Ozgener, B., (1998). A boundary integral equation for boundary element applications in multigroup neutron diffusion theory, *Annals of Nuclear Energy*, **25**, 6, 347-357.
- Özgener B., Kabadayı, Y., (1996). Difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümünde Chebyshev polinomsal hızlandırması, *VII. Ulusal Nükleer Bilimler ve Teknolojileri Kongresi*, İTÜ, Nükleer Enerji Enstitüsü, 1-6 Eylül.
- Ozgener B. and Ozgener, H.A., (2001). A multi-region boundary element method for multigroup neutron diffusion calculations, *Annals of Nuclear Energy*, **28**, 6, 585-616.
- Varga, R.S., (1961). Numerical methods for solving multigroup diffusion equations. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Nuclear Reactor Theory, **11**, 164-189. *American Mathematical Society*, Providence, Rhode Islands.
- Varga, R.S., (1962). *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.