

Betonarme yapı sistemlerinin doğrusal olmayan hesabı için bir artımsal analiz yöntemi

Günhan AKSOYLU*, Erkan ÖZER

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, betonarme uzay çubuk sistemlerin dış yükler altındaki doğrusal olmayan davranışlarının incelenmesi, taşıma kapasitelerinin bulunması ve deprem performanslarının belirlenmesi amacıyla bir artımsal analiz yöntemi geliştirilmiştir. Yöntemde betonarmenin doğrusal olmayan davranışı ve geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi gözönüne alınmaktadır. Geliştirilen artımsal analiz yönteminde, doğrusal olmayan şekildeğiştirmelerin plastik kesit adı verilen ve sınırlı plastik şekildeğiştirme kapasitesine sahip olan belirli kesitlerde toplandığı, bunların dışındaki bölgelerde sistemin doğrusal-elastik davrandığı gözönünde tutulmaktadır. Böylece, basit eğilme etkisindeki sistemlere uygulanmakta olan plastik mafsal hipotezi, bileşik iç kuvvet durumunu da kapsayacak şekilde genelleştirilmiş olmaktadır. Ayrıca, plastik kesitlerdeki rijit-plastik davranış modeli, pekleşme ve gevşeme (ani dayanım kaybı) etkilerini içerecek şekilde genişletilmiştir. Doğrusal olmayan analizde, düşey işletme yüklerinin bu yükler için öngörülen bir yük katsayısı ile çarpımından oluşan belirli değerleri altında, aralarındaki oran sabit kalacak şekilde değişen yatay yüklere göre hesap yapılmaktadır. Uygulanan yöntemde, her plastik kesitin oluşumundan sonra o kesitteki plastik şekildeğiştirmeleri ifade eden plastik şekildeğiştirme parametresinin yeni bir bilinmeyen olarak alınması ve kesitteki iç kuvvet durumunun değişimi ile plastik şekildeğiştirme parametresi arasındaki bağıntıyı ifade eden yeni bir denklemin denklem takımına ilave edilmesi öngörülmüştür. Önerilen yöntemin pratik uygulamaları için bilgisayar programları hazırlanmıştır. Bu bilgisayar programlarından yararlanarak, betonarme yapı sistemlerinin malzeme ve geometri değişimleri bakımından doğrusal olmayan analizi etkin bir şekilde yapılabilir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan analiz, deprem performansı, artımsal analiz, pekleşen ideal elasto-plastik, gevşemeli ideal elasto-plastik.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Günhan AKSOYLU. gaksouly@ins.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 38 46.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Betonarme yapı sistemlerinde pekleşme etkisini gözönüne alan bir doğrusal olmayan artımsal analiz yöntemi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 13.06.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 17.07.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2008 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

An incremental method for non-linear static analysis of reinforced concrete structures

Extended abstract

The use of elastic-plastic analysis and design methods, which consider the non-linear behavior of reinforced concrete as well as the non-linearity caused by geometrical changes, may result in both more realistic and more economical solutions for reinforced concrete structures. Furthermore, by the use of these methods, the earthquake performance of existing reinforced concrete structures can also be evaluated.

In this study, an incremental method is developed for the analysis of materially and geometrically non-linear reinforced concrete structures subjected to factored constant gravity loads and proportionally increasing lateral loads. The classical plastic hinge concept, applicable to the case of simple bending, is extended to cover the case of combined biaxial bending. Also, strain-hardening and strain-softening behaviors are considered.

The investigation covers the actual internal force-deformation relationships, the yield conditions and the piecewise linear idealization of non-linear behavior of R/C structural elements. The non-linear behavior models for reinforced concrete and the idealized models used in this study are explained in detail. This investigation is based on three basic assumptions made for reinforced concrete, such as

- a- plane sections remain plane after bending,*
- b- full bond exists between concrete and reinforcing steel,*
- c- tensile strength of concrete is negligible after cracking.*

In the incremental analysis method developed herein, the structure is analyzed under factored constant gravity loads and monotonically increasing lateral loads. At the end of the analysis, the lateral load-lateral displacement relationship (capacity curve) is determined under factored gravity loads. When the gravity loads are known, the member axial forces can be easily estimated through the equilibrium equations. Thus, the second-order effects are linearized by calculating the elements of stiffness and loading matrices for the estimated constant axial forces.

In this method, the structure is analyzed for successive lateral load increments. At the end of each load increment, the state of internal forces at a certain critical section reaches the limit state defined by the yield condition, i.e. a plastic section forms. Since the yield vector is assumed to be normal to the yield surface, the plastic deformation components may be represented by a single plastic deformation parameter which is introduced as a new unknown for the next load increment. Thus, an equation is added to the system of equations to express the relationship between the change of the state of internal forces and the plastic deformations developed in the last formed plastic section. This equation is linear, because the yield and ultimate capacity surfaces are idealized as composed of planes.

Since the system of linear equations corresponding to the previous load increment has already been solved, the solution for the current load increment is obtained through the elimination of the new unknown.

In this study, two computer programs

- a- MKAPA*
- b- IMNOSA*

have been developed and coded in Fortran programming language.

For the numerical illustration of the method, the non-linear behaviors of two reinforced concrete structural systems are examined in detail. The reinforced concrete frames are analyzed by the second-order, elastic-plastic theory under constant factored gravity loads and monotonically increasing lateral forces. The analyses are carried out by means of the above computer programs. In each analysis, several numerical results, such as

- a- the second-order limit load (ultimate load carrying capacity),*
- b- base shear versus lateral top displacement diagram,*
- c- total number of plastic sections and the plastic hinge pattern,*
- d- lateral load parameters for the first plastic sections developed in beams and columns are obtained.*

Keywords: *Non-linear static analysis, earthquake performance, incremental analysis, strain-hardening, strain-softening.*

Giriş

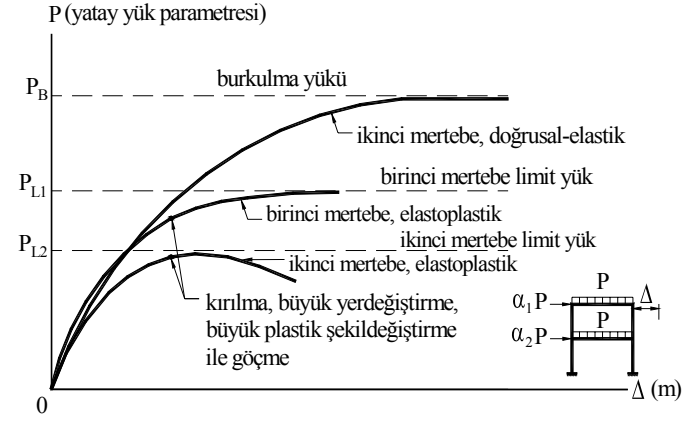
Mevcut yapı sistemlerinin deprem güvenlik ve performanslarının belirlenmesinde, çok kere ileri analiz ve değerlendirme yöntemlerine başvurulması gerekmektedir. Doğrusal olmayan teoriyi esas alan hesap ve boyutlandırma yöntemlerindeki gelişmelerden yararlanarak, yapı sistemlerinin dış etkiler altındaki gerçek davranışları daha yakından izlenebilmekte ve özellikle yerdeğiştirme ve şekildeğiştirmelere bağlı deprem performansının daha gerçekçi olarak değerlendirilmesi mümkün olmaktadır.

Diğer taraftan, yeni inşa edilecek olan binaları daha rasyonel ve daha ekonomik olarak boyutlandırmak için, yapı taşıyıcı sistemlerinin giderek daha narin yapılabilmesi isteği her geçen gün artmaktadır. Bunu sağlamak amacıyla malzemelerin oranı sınırı üstündeki taşıma kapasitelerini de gözönüne alan elastoplastik hesap yöntemlerinden yararlanılması uygun olmaktadır. Ancak, narin yapılarda yerdeğiştirmeler önem kazanmakta ve geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisinin de hesaba katılması gerekmektedir. Bunun sonucu olarak, gerek malzeme, gerekse geometri değişimleri bakımından doğrusal olmayan sistemlerin analiz ve boyutlandırma yöntemlerine gereksinim artmaktadır.

Düşey ve yatay yükler etkisindeki bir yapı sisteminin doğrusal olmayan teorilere göre hesabı ile elde edilen yük parametresi-yerdeğiştirme ($P-\Delta$) diyagramları Şekil 1 de şematik olarak gösterilmişlerdir. Malzeme ve geometri değişimlerinin doğrusal olmayan etkilerinin birlikte gözönüne alındığı durumda, yani bir yapı sisteminin ikinci mertebe elastoplastik teoriye göre hesabında, oluşan plastik mafsallar nedeniyle rijitliği azalan sistemin burkulma yükü dış yük parametresinin altına düşer, diğer bir deyişle, $P-\Delta$ diyagramında artan yerdeğiştirmelere azalan yükler karşı gelir. Sistemde stabilite yetersizliğine neden olan bu yük parametresine *ikinci mertebe limit yük* denilmektedir.

Yapı sistemlerinin malzeme ve geometri değişimleri bakımından doğrusal olmayan teoriye göre analizini amaçlayan yöntemlerin geliştirilmesi (Powell ve Chen, 1986; Özer, 1987; İrtem,

1991; Attalla vd., 1995; Girgin, 1996; Graham, 2003) ve bu yöntemlerin mevcut betonarme yapı sistemlerinin deprem performanslarının belirlenmesine uygulanması (Chopra ve Goel, 1999; Aydınoglu, 2004) amacıyla yoğun araştırmalar yapılmaktadır.



Şekil 1. Birinci ve ikinci mertebe teorilerine göre yük parametresi-yerdeğiştirme bağıntıları

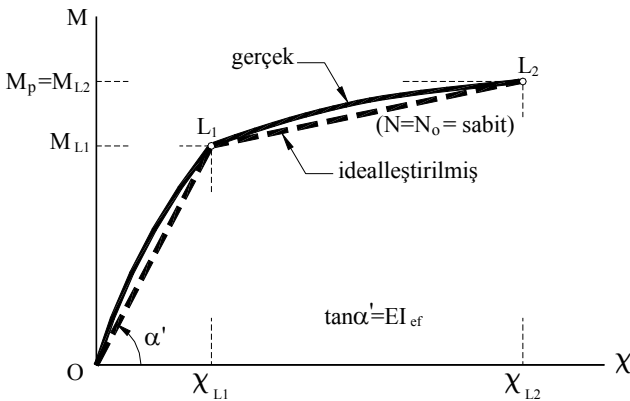
Bu çalışmada, betonarme yapı sistemlerinin değişen dış yükler altındaki doğrusal olmayan davranışlarının incelenerek statik itme analizlerinin yapılması, taşıma kapasitelerinin bulunması ve deprem performanslarının değerlendirilmesi amacıyla kullanılmak üzere, bir artımsal analiz yönteminin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Yöntemde betonarmenin doğrusal olmayan davranışı ve geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi gözönüne alınmaktadır.

Geliştirilen artımsal analiz yönteminde, doğrusal olmayan şekildeğiştirmelerin *plastik kesit* adı verilen ve sınırlı plastik şekildeğiştirme kapasitesine sahip olan belirli kesitlerde toplandığı, bunların dışındaki bölgelerde sistemin doğrusal-elastik davrandığı gözönünde tutulmaktadır. Böylece, basit eğilme etkisindeki sistemlere uygulanmakta olan plastik mafsallık hipotezi, bileşik iç kuvvet durumunu da kapsayacak şekilde genelleştirilmiş olmaktadır. Ayrıca, plastik kesitlerdeki rijit-plastik davranış modeli, pekleşme ve gevşeme (ani dayanım kaybı) etkilerini içerecek şekilde genişletilmiştir. Bu şekilde, plastik mafsallık hipotezini ve bu hipotezin geliştirilmesi ile oluşan plastik kesit kavramını da kapsayan bir genel yaklaşım oluşturulması amaçlanmaktadır.

Betonarme kesitlerde eğilme momenti- χ eğrilik (M- χ) bağıntıları ve bu bağıntıların idealleştirilmesi

Beton çeliğinin pekleşme etkisinin hesaba katıldığı bir betonarme kesitin gerçek eğilme momenti-eğrilik (M- χ) bağıntısı Şekil 2 de şematik olarak gösterilmiştir. M- χ bağıntısında, L_1 noktası kesitte plastik şekildeğıştirmelerin başlamasına karşı gelen durumu, L_2 noktası ise kesitin taşıma kapasitesine eriştiği durumu ifade etmektedir.

Şekil 2 üzerinde gösterilen idealleştirmede, M- χ bağıntısının O- L_1 - L_2 noktalarını birleştiren iki doğru parçasından oluştuğu varsayımı yapılmaktadır. Doğrusal olmayan şekildeğıştirmelerin sistem üzerinde sürekli olarak yayıldığı gözönüne alındığı ve/veya pekleşme etkisinin hesaba katıldığı hesap yöntemlerinde genellikle bu idealleştirmeden yararlanılmaktadır.



Şekil 2. Betonarme kesitlerde gerçek ve idealleştirilmiş M- χ diyagramları

Plastik kesitlerde idealleştirilmiş eğilme momenti-plastik dönme (M- θ_p) bağıntısı

Doğrusal olmayan şekildeğıştirmelerin plastik kesit adı verilen belirli kesitlerde yığıldığı, bunun dışındaki bölgelerdeki davranışın doğrusal-elastik olduğu varsayımına dayanan sistem hesaplarında, plastik kesitlerdeki idealleştirilmiş eğilme momenti-plastik dönme (M- θ_p) bağıntılarına gerek olmaktadır.

Sabit $N=N_0$ normal kuvveti ve tek eksenli eğilme momenti ile zorlanan bir plastik kesitteki eğilme momenti-plastik dönme (M- θ_p) bağıntısı, idealleştirilmiş M- χ diyagramından yararlanarak elde edilebilir. Örneğin, l_p plastik bölge uzunluğunu göstermek üzere, Şekil 2 üzerinde açıklanan idealleştirme için M- θ_p bağıntısı

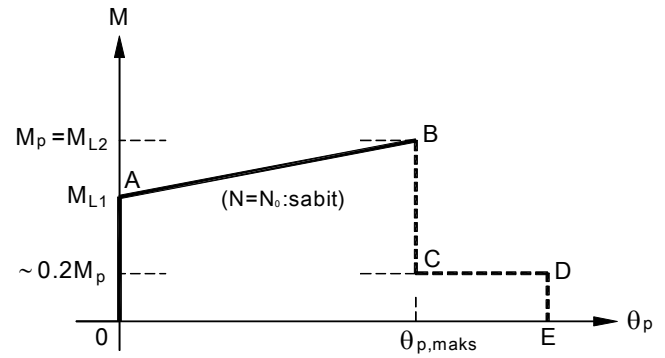
$$\theta_p = (\chi - \chi_{L1})l_p \quad (1)$$

$$\theta_{p,maks} = (\chi_{L2} - \chi_{L1})l_p \quad (2)$$

olmak üzere

$$M = M_{L1} + \frac{\theta_p}{\theta_{p,maks}} (M_p - M_{L1}) \quad (3)$$

şeklinde elde edilir, (Şekil 3).

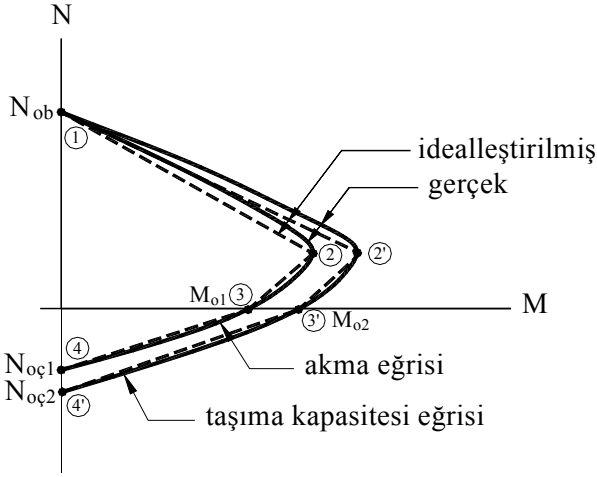


Şekil 3. Plastik kesitlerde idealleştirilmiş Eğilme Momenti-Plastik Dönme (M- θ_p) bağıntısı

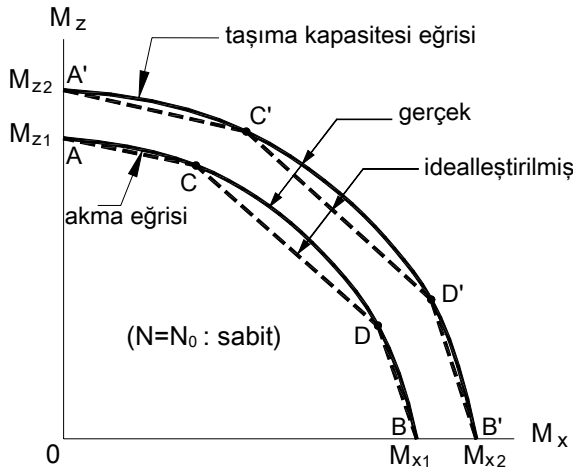
Karşılıklı etki diyagramları (akma ve taşıma kapasitesi eğrileri) ve bu diyagramların idealleştirilmesi

Bileşik eğilme etkisindeki bir betonarme kesitte plastik şekildeğıştirmelerin başlamasını (kesitin akmasını) ifade eden akma eğrisinin ve iç kuvvet durumunun kesitin taşıma kapasitesine ulaştığı duruma karşı gelen taşıma kapasitesi eğrisinin, doğru parçalarından oluşacak şekilde nasıl idealleştirilebileceği Şekil 4 üzerinde gösterilmiştir.

Benzer şekilde, N aksenal kuvveti ve M_x, M_z eğilme momentleri etkisindeki bir betonarme kesitte, $N=N_0$ sabit aksenal kuvveti için, gerçek ve idealleştirilmiş $M_x - M_z$ karşılıklı etki diyagramları Şekil 5 te şematik olarak verilmiştir.



Şekil 4. Gerçek ve idealleştirilmiş $M - N$ karşılıklı etki diyagramları

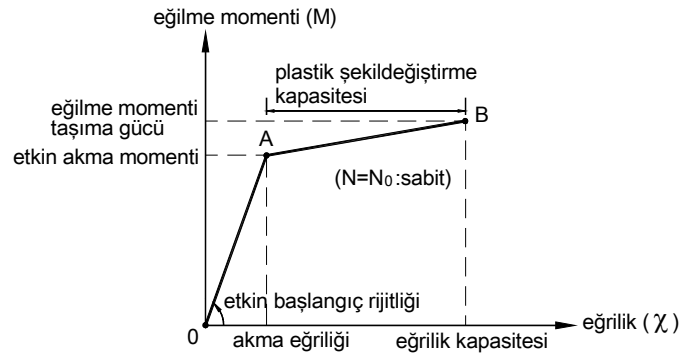


Şekil 5. Gerçek ve idealleştirilmiş $M_x - M_z$ karşılıklı etki diyagramları

Varsayımlar

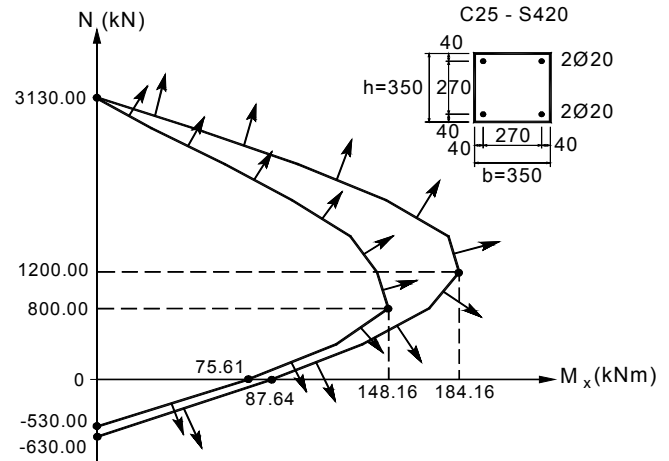
Artımsal analiz yönteminin geliştirilmesinde gözönünde tutulan başlıca varsayımlar aşağıda açıklanmıştır.

- Bileşik eğilme etkisindeki betonarme çubuk elemanlarda, sabit normal kuvvet altındaki eğilme momenti-eğrilik ($M - \chi$) bağıntılarının, Şekil 6'da gösterildiği gibi, iki doğru parçasından meydana gelecek şekilde idealleştirilebileceği varsayılmaktadır.
- Doğrusal olmayan eğilme ve uzama şekil değiştirmelerinin *plastik kesit* adı verilen belirli kesitlerde yığıldığı, bu kesitler dışındaki bölgelerde sistemin doğrusal-elastik davrandığı varsayımı yapılmıştır.



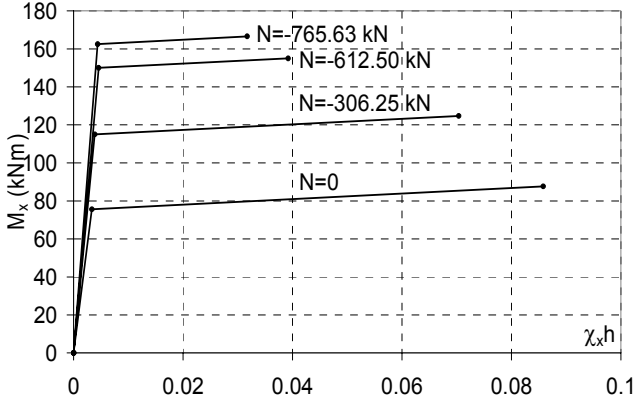
Şekil 6. İdealleştirilmiş eğilme momenti-eğrilik bağıntısı

- Kesme kuvvetlerinin ve burulma momentinin akma koşuluna ve kesitin taşıma kapasitesine etkileri terkedilmiştir.
- Akma vektörünün akma yüzeyine dik olduğu ve iç kuvvet durumunun değişimi sırasında doğrultusunun sabit kaldığı varsayılmaktadır. Bu varsayım betonarme kesitler üzerinde sayısal olarak irdelenmiştir, (Şekil 7).

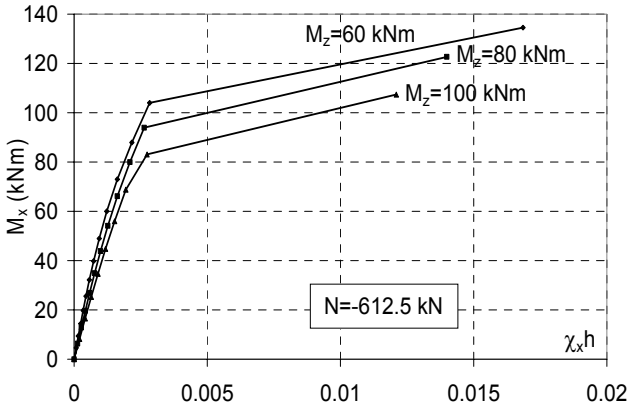


Şekil 7. Bileşik eğilmede akma vektörleri

- Bileşik eğik eğilme etkisindeki betonarme kesitlerde, her eğilme doğrultusu için ayrı ayrı olmak üzere, idealleştirilmiş $M - \chi$ bağıntısının AB parçasının eğiminin normal kuvvetten ve diğer doğrultudaki eğilme momentinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Bileşik eğilmede çeşitli normal kuvvet düzeyleri için ve bileşik eğik eğilmede çeşitli M_z eğilme momenti değerleri için çizilen eğilme momenti-eğrilik ($M_x - \chi_x$) diyagramları üzerinde bu varsayım sayısal olarak irdelenmiştir, (Şekil 8, Şekil 9).



Şekil 8. Çeşitli normal kuvvet düzeyleri için $(M_x - \chi_x h)$ diyagramları



Şekil 9. M_z Eğilme Momentinin çeşitli değerleri için $(M_x - \chi_x h)$ diyagramları

- f- Yapı sisteminin narinliğine ve normal kuvvetlerin büyüklüğüne bağlı olarak, birinci veya ikinci derece teorilerinden biri uygulanabilmektedir. İkinci derece teorisinde denge denklemleri şekil değiştirmiş eksen üzerinde yazılmaktadır.
- g- Çubukların asal düzlemleri içindeki yer değiştirmelerin denge denklemlerine etkisi gözönüne alınmakta, burulma yer değiştirmelerinden oluşan ikinci derece etkileri terk edilmektedir.
- h- Sistemi oluşturan çubuklar doğru eksenli, sabit enkesitlidir ve normal kuvvet çubuk boyunca sabittir. Bu koşulların sağlanmadığı çubuklar doğru eksenli, sabit enkesitli ve normal kuvveti sabit varsayılabilen yeter derecede küçük parçalara ayrılarak idealleştirilebilirler.

Yük artımı yönteminin esasları

Bu çalışmada, yapı sisteminde plastik kesitlerin oluşumunu ve plastik kesitlerdeki iç kuvvet durumlarının değişimini izleyen bir artımsal analiz yöntemi geliştirilmiştir.

Yöntemde, düşey işletme yüklerinin bu yükler için öngörülen bir katsayı ile çarpımından oluşan sabit düşey yükler altında, aralarındaki oran sabit kalacak şekilde monoton olarak değişen yatay yükler için hesap yapılmaktadır.

Tek ve iki eksenli bileşik eğilme etkisindeki betonarme çubuk elemanlar için, sırasıyla doğru ve düzlem parçalarından oluşan idealleştirilmiş akma ve taşıma kapasitesi bağıntılarının kullanılması öngörülmektedir. Böylece, betonarme sistemlerde akma ve taşıma kapasitesi koşullarının doğrusal denklemlere dönüştürülmesi sağlanabilmektedir.

Artan dış yükler altında plastik kesitlerdeki iç kuvvetler akma ve taşıma kapasitesi sınır durumları arasında değişmekte, buna paralel olarak iç kuvvetler doğrultularında sonlu plastik şekil değiştirmeler meydana gelmektedir. Bir veya iki eksenli bileşik eğilme etkisindeki bir plastik kesitte oluşan plastik şekil değiştirmeler, akma vektörünün diklik özelliği nedeniyle, *plastik şekil değiştirme parametresi* adı verilen tek bir plastik şekil değiştirme bileşenine bağlı olarak ifade edilebilirler.

Uygulanan artımsal analiz yönteminde, her plastik kesitin oluşumundan sonra, o kesitteki plastik şekil değiştirmeleri temsil eden plastik şekil değiştirme parametresinin yeni bir bilinmeyen olarak alınması ve plastik kesitteki iç kuvvet durumunun değişimi ile plastik şekil değiştirme parametresi arasındaki bağıntıyı ifade eden yeni bir denklemin denklem takımına ilave edilmesi öngörülmüştür. Bir önceki adıma ait denklem takımı indirgenmiş olduğundan, sözkonusu adıma ait çözüm sadece yeni bilinmeyen ve yeni denklemin indirgenmesi ile elde edilebilmektedir.

Özellikle betonarme yapı sistemlerinde, dış yükler yapı sisteminin taşıma kapasitesine erişme-

den önce, büyük yerdeğiştirmeler ve plastik kesitlerdeki büyük plastik şekildeğiştirmeler nedeniyle sistem işletme dışı olarak geçebilmektedir. Diğer taraftan, betonarme yapı sistemlerinin deprem etkileri altındaki performansı, plastik kesitlerdeki plastik şekildeğiştirmelere veya bunlardan yararlanarak hesaplanan beton ve donatı çeliği boydeğişmelerine bağlı olarak belirlenmektedir. Uygulanan artımsal analiz yönteminde, düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerinin yanında, plastik kesitlerdeki plastik şekildeğiştirmeler de (örneğin, plastik mafsal dönmeleri) bilinmeyen olarak seçildiklerinden, yapı sisteminin göçme yükünün ve deprem performansının belirlenmesi için bu büyüklüklerin ayrıca hesabına gerek kalmamaktadır.

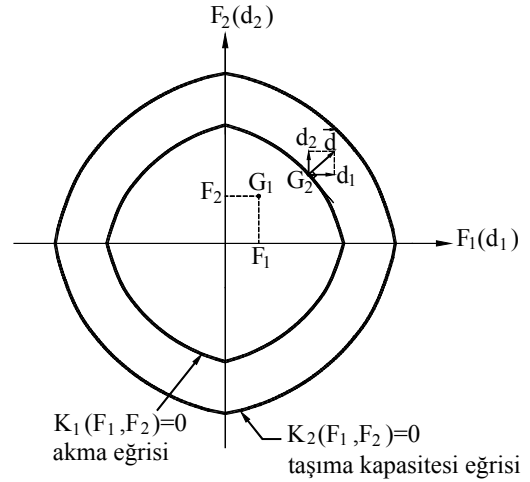
Akma koşulu, akma vektörü ve akma sırasındaki iç kuvvet değişimleri

F_1 , F_2 iç kuvvetleri etkisindeki bir kesite ait akma ve taşıma kapasitesi eğrileri ile akma sırasında bu iç kuvvetler doğrultularında oluşan d_1 , d_2 plastik şekildeğiştirmelerini içeren *akma vektörü* Şekil 10'da şematik olarak gösterilmiştir. $F_1(d_1)$ - $F_2(d_2)$ dik koordinat sisteminde, verilen bir iç kuvvet durumu, koordinatları F_1 ve F_2 olan bir G noktası ile temsil edilebilir. İç kuvvet durumunun $K_1(F_1, F_2)=0$ akma koşulunun belirlediği akma eğrisinin içinde bulunması (G_1 noktası), kesitin doğrusal-elastik davrandığını ve plastik şekildeğiştirmelerin oluşmadığını ifade eder.

İç kuvvet durumunun akma eğrisi üzerinde bulunması halinde (G_2 noktası) kesitin doğrusal-elastik davranışı sona erer ve iç kuvvetler doğrultularında sonlu plastik şekildeğiştirmeler meydana gelebilir.

Kesitteki plastik şekildeğiştirmeler $\vec{d}(d_1, d_2)$ plastik şekildeğiştirme (akma) vektörü ile tanımlanır. Artan dış etkiler altında, G noktası akma ve taşıma kapasitesi eğrileri arasında hareket edebilir. Ancak iç kuvvet durumu taşıma kapasitesi eğrisinin dışına çıkamaz.

İdeal elasto-plastik malzemeden yapılan kesitlerde akma vektörünün akma yüzeyine (veya akma eğrisine) dik olduğu bilinmektedir.



Şekil 10. Betonarme kesite ait iç kuvvet durumları ve akma vektörü

Bileşik eğik eğilme etkisindeki betonarme kesitlerde ise, söz konusu özellik bazı koşullar altında ve yaklaşık olarak sağlanmaktadır, (Çakıroğlu vd., 1999).

Doğrusal-elastik davranışın sona erdiği durumu tanımlayan akma koşulu, uzay çubuk sistemlerde genel olarak altı tane iç kuvvet bileşeni cinsinden

$$K(M_x, M_z, M_y, N, T_x, T_z) = 0 \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu bağıntıda M_x ve M_z sırasıyla çubuk elemanın x ve z eksenleri doğrultularındaki eğilme momentlerini, M_y burulma momentini, N normal kuvveti, T_x ve T_z kesme kuvvetlerini, $K(M_x, M_z, M_y, N, T_x, T_z)$ ise malzeme karakteristikleri ile enkesit ve donatı özelliklerine bağlı olarak belirlenen doğrusal olmayan bir fonksiyonu göstermektedir.

Kesme kuvvetlerinin ve burulma momentinin etkilerinin terkedilerek akma koşulunun eğilme momentlerine ve normal kuvvete bağlı olarak ifade edilmesi halinde (4) bağıntısı

$$K(M_x, M_z, N) = 0 \quad (5)$$

şeklini alır.

Bileşik eğik eğilme etkisindeki kesitlerde, (5) bağıntısı ile verilen akma koşulundaki iç kuvvetlerden bazılarının sıfır veya terkedilebilir mertebede olması halinde, akma koşulu diğer iç kuvvetlere bağlı olarak ifade edilir.

Örneğin, M_z eğilme momenti ile N normal kuvvetinin sıfır olduğu plastik kesitler için

$$K(M_x) = M_x - M_{L1} = 0 \quad (6)$$

akma koşulu yazılabilir. Burada M_{L1} , kesitin x eksenini doğrultusundaki akma momentini göstermektedir.

Yeterli sünekliğe sahip olan yapı sistemlerinde, bir kesitteki iç kuvvet durumunun akma yüzeyi üzerinde bulunması halinde plastik kesit oluşmakta ve iç kuvvetler doğrultularında sonlu plastik şekildeğştirmeler meydana gelebilmektedir.

Değişen dış etkiler altında, akma ve taşıma kapasitesi yüzeyleri arasındaki bir iç kuvvet durumunun sonlu değişimi ΔK potansiyel fonksiyonu ile ifade edilir. Bu fonksiyon bileşik eğik eğilme durumunda

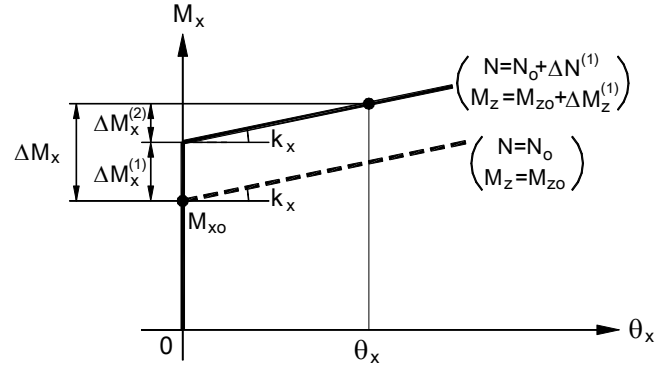
$$\Delta K = \frac{\partial K}{\partial M_x} \Delta M_x + \frac{\partial K}{\partial M_z} \Delta M_z + \frac{\partial K}{\partial N} \Delta N \quad (7)$$

şekindedir. Bilindiği gibi, rijit-plastik davranış gösteren plastik kesitlerde $\Delta K = 0$ olmakta, diğer bir deyişle, akma ve taşıma kapasitesi yüzeyleri çakışmaktadır.

Bileşik eğik eğilme durumunda, plastik kesitlerde toplandığı varsayılan plastik şekildeğştirmeler $\vec{d}(\theta_x, \theta_z, \Delta)$ akma vektörü ile tanımlanırlar. Akma vektörünün θ_x , θ_z ve Δ bileşenleri sırasıyla M_x , M_z eğilme momentleri ve N normal kuvveti doğrultularındaki sonlu plastik şekildeğştirmeleri göstermektedir.

M_{x0} , M_{z0} , N_0 kesit zorları altında oluşan bir plastik kesitteki $M_x - \theta_x$ bağıntıları Şekil 11 de şematik olarak gösterilmiştir. Şekilde kesik çiz-

gi ile belirtilen diyagram plastik kesitin olduğu durumdaki ($N = N_0, M_z = M_{z0}$) eğilme momenti-plastik dönme bağıntısını, dolu çizgi ile belirtilen diyagram ise, iç kuvvet durumunun akma yüzeyini terkettiği duruma ait ($N = N_0 + \Delta N^{(1)}, M_z = M_{z0} + \Delta M_z^{(1)}$) $M_x - \theta_x$ bağıntısını ifade etmektedir.



Şekil 11. Plastik kesitte $M_x - \theta_x$ bağıntıları

Bileşik eğik eğilme etkisindeki plastik kesitlerde, pekleşen rijit-plastik olarak idealleştirilen eğilme momenti-plastik dönme bağıntısının eğiminin normal kuvvetten ve diğer doğrultudaki eğilme momentinden bağımsız olduğunun gözönünde tutulması halinde, eğilme momenti değişimleri ile plastik dönmeler arasındaki doğrusal bağıntılar;

$$\Delta M_x = \Delta M_x^{(1)} + \Delta M_x^{(2)} = \Delta M_x^{(1)} - k_x \theta_x \quad (8a)$$

$$\Delta M_z = \Delta M_z^{(1)} + \Delta M_z^{(2)} = \Delta M_z^{(1)} - k_z \theta_z \quad (8b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada k_x ve k_z , x ve z eksenleri doğrultularında, eğilme momenti-plastik dönme bağıntılarındaki pekleşme bölgelerini oluşturan doğru parçalarının eğimleridir. Formüllerdeki (-) işaretleri ise, plastik şekildeğştirmelerin pozitif yönlerinin iç kuvvetlerin pozitif yönleri ile ters seçilmesinden kaynaklanmaktadır. Diğer taraftan, plastik kesitteki normal kuvvet-boy değişmesi bağıntısının ideal elasto-plastik olarak varsayılması nedeniyle;

$$\Delta N = \Delta N^{(1)} + \Delta N^{(2)} = \Delta N^{(1)} \quad (8c)$$

değerini alır.

(8) denklemleri ile tanımlanan iç kuvvet değişimleri (7) de yerlerine konur ve $\Delta M_x^{(1)}, \Delta M_z^{(1)}, \Delta N^{(1)}$ iç kuvvet değişimlerinin

$$\frac{\partial K}{\partial M_x} \Delta M_x^{(1)} + \frac{\partial K}{\partial M_z} \Delta M_z^{(1)} + \frac{\partial K}{\partial N} \Delta N^{(1)} = 0$$

koşulunu sağladığı gözönünde tutulursa;

$$\Delta K = - \left(\frac{\partial K}{\partial M_x} k_x \theta_x + \frac{\partial K}{\partial M_z} k_z \theta_z \right) \quad (7a)$$

denklemini elde edilir.

Akma vektörünün akma yüzeyine dik olduğu varsayımı altında, plastik şekil değiştirme bileşenleri

$$\theta_x = \theta \frac{\partial K}{\partial M_x}, \quad \theta_z = \theta \frac{\partial K}{\partial M_z}, \quad \Delta = \theta \frac{\partial K}{\partial N} \quad (9)$$

şeklinde tek bir θ plastik şekil değiştirme parametresine bağlı olarak ifade edilebilirler.

Bu çalışmada, $K(M_x, M_z, N) = 0$ bağıntısı ile tanımlanan akma yüzeyinin düzlem parçalarından oluşacak şekilde idealleştirilmesi öngörülmektedir. Buna göre, akma koşulu için;

$$K(M_x, M_z, N) \cong A_1 M_x + A_2 M_z + \dots + A_3 N + B = 0 \quad (10)$$

doğrusal bağıntısı yazılabilir.

İç kuvvetler doğrultularında oluşan $\theta_x, \theta_z, \Delta$ plastik şekil değiştirme bileşenleri ise;

$$\theta_x = \theta \frac{\partial K}{\partial M_x} = \theta A_1, \quad \theta_z = \theta \frac{\partial K}{\partial M_z} = \theta A_2, \quad \Delta = \theta \frac{\partial K}{\partial N} = \theta A_3 \quad (11)$$

şeklinde ifade edilirler.

Bileşik eğik eğilme etkisindeki betonarme kesitlerde, kesitin akma ve taşıma kapasitesi yüzeyleri arasındaki plastik davranışını ifade etmek üzere, yukarıda verilen bağıntılar kullanılarak

$$\Delta K = \frac{\partial K}{\partial M_x} \Delta M_x + \frac{\partial K}{\partial M_z} \Delta M_z + \dots + \frac{\partial K}{\partial N} \Delta N = -\theta (A_1^2 k_x + A_2^2 k_z) \quad (12)$$

denklemini elde edilir. Eşitliğin sağ tarafının sıfır olması istendiğinde, (12) denklemini;

$$\frac{\partial K}{\partial M_x} \Delta M_x + \frac{\partial K}{\partial M_z} \Delta M_z + \dots + \frac{\partial K}{\partial N} \Delta N + \theta (A_1^2 k_x + A_2^2 k_z) = 0 \quad (12a)$$

şeklinde de yazılabilir.

Tek eksenli bileşik eğilme etkisindeki kesitlerde ise, (12a) bağıntısı;

$$\frac{\partial K}{\partial M_x} \Delta M_x + \frac{\partial K}{\partial N} \Delta N + A_1^2 k_x \theta = 0 \quad (13)$$

şeklini almaktadır.

Matematik formülasyon

Bu çalışmada geliştirilen artımsal analiz yönteminin her adımında, üzerinde plastik kesitler bulunan bir sistemin bir yük artımı için hesabı öngörülmektedir. Matris Yerdeğiştirme Yönteminden yararlanarak ve plastik kesitleri hesaba katmak üzere yöntemde gerekli değişiklikleri yaparak, bilinmeyenlerin iki gruptan oluştuğu gözönünde tutulabilir:

a) düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri,
b) plastik kesitlerdeki doğrusal olmayan eğilme ve uzama şekil değiştirmelerini temsil eden plastik şekil değiştirme parametreleri.
Bilinmeyenleri hesaplamak için kullanılan denklemler de iki gruptan oluşurlar:

a) düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri doğrultularında yazılan denge denklemleri,
b) plastik kesitlerdeki iç kuvvet değişimleri ile plastik şekil değiştirmeler arasındaki ilişkiyi ifade eden iç kuvvet-şekil değiştirme bağıntıları.

Düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri doğrultularında yazılan moment ve izdüşüm

denge denklemlerinin sistem eksen takımındaki matris gösterimi;

$$[S_{dd}][d] + [S_{d\theta}][\theta] = [q] \quad (14)$$

şeklinindedir.

Bu denklemdeki matrislerin tanımları ve nasıl elde edilecekleri aşağıda açıklanmıştır.

$[S_{dd}]$: üzerinde plastik kesitler bulunmayan sistemin rijitlik matrisidir. n adet düğüm noktası içeren bir uzay çubuk sistemde $[S_{dd}]$ matrisi $6n \times 6n$ boyutundadır. *Betti Karşılıklı Teoremi* uyarınca $[S_{dd}]$ matrisi esas köşegenine göre simetriktr. İkinci mertbe teorisine göre hesapta $[S_{dd}]$ matrisinin elemanları, yerel ikinci mertbe etkilerinin terkedilmesi halinde, çubukların;

$$\psi_x = l \sqrt{\frac{|N|}{EI_x}}, \quad \psi_z = l \sqrt{\frac{|N|}{EI_z}} \quad (15)$$

büyükliklerine bağlı olarak tayin edilirler. Burada N aksenal basınç kuvvetini, l çubuk boyunu, EI_x ve EI_z çubuk enkesitinin eğilme rijitliklerini göstermektedir.

$[d]$ matrisi, düğüm noktalarının bilinmeyen yerdeğiştirme bileşenlerinden oluşan $6n$ elemanlı bir kolon matristir. $[\theta]$ matrisi, plastik kesitlerdeki m adet bilinmeyen plastik şekildeğiştirme parametresini içeren bir kolon matristir.

$[S_{d\theta}]$: plastik kesitlerdeki birim plastik şekildeğiştirmelerin denge denklemlerine etkisini ifade eden bir dikdörtgen matristir. Üzerinde m sayıda plastik kesit bulunan n düğüm noktalı bir uzay çubuk sistemde, bu matrisin boyutu $6n \times m$ 'dir. $[S_{d\theta}]$ matrisinin k sayılı kolonu, k sayılı plastik kesitteki plastik şekildeğiştirme parametresinin $\theta_k = 1$ değeri için, diğer plastik kesitlerdeki plastik şekildeğiştirme parametreleri ve düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri sıfır iken, düğüm noktalarına etkiyen uç kuvvetlerinden oluşmaktadır.

$[q]$ dış yük matrisi, düğüm noktalarına etkiyen dış yüklerin sistem eksen takımındaki bileşenlerinden meydana gelen $6n$ elemanlı bir kolon matristir.

Plastik kesitlerdeki iç kuvvet-plastik şekildeğiştirme bağıntıları, artımsal analizin bir adımında, plastik kesitlerdeki iç kuvvetlerin ve plastik şekildeğiştirmelerin (12a) denklemini sağladığını ifade eden bağıntılardır. Bu bağıntılar tüm sistem için matris formunda yazılırsa

$$[S_{od}][d] + [\bar{S}_{o\theta}][\theta] = [0] \quad (16)$$

şeklini alır. Burada,

$[S_{od}]$: dış yüksüz sistemde plastik şekildeğiştirmeler sıfır iken, yalnız düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenlerinden dolayı plastik kesitlerde oluşan iç kuvvetlerin akma koşuluna etkisini içeren bir matristir. Üzerinde m sayıda plastik kesit bulunan n düğüm noktalı bir uzay çubuk sistem için bu matris $m \times 6n$ boyutundadır. Bu matrisin β sayılı kolonu, sistemdeki β sayılı yerdeğiştirme bileşeni bir, diğerleri sıfır iken bileşik eğik eğilme etkisindeki plastik kesitlerde;

$$A_1 \Delta M_x + A_2 \Delta M_z + A_3 \Delta N \quad (17)$$

iç kuvvet değişimlerini ifade eden terimlerin alt alta yazılması ile elde edilmektedir. Akma vektörünün akma yüzeyine dik olması veya dik olduğunun varsayılması durumunda, Betti karşılık teoremi uyarınca;

$$[S_{od}] = [S_{d\theta}]^T \quad (18)$$

olduğundan, $[S_{od}]$ matrisinin ayrıca hesaplanmasına gerek yoktur, (Özer, 1987).

$[\bar{S}_{o\theta}]$: $[S_{o\theta}] + [R]$ şeklinde tanımlanan, $m \times m$ boyutunda bir matristir. Bu matrisi oluşturan $[S_{o\theta}]$ ve $[R]$ alt matrislerinin elemanları aşağıda açıklanmıştır.

$[S_{\theta\theta}]$: $m \times m$ boyutunda bir matristir. Bu matrisin k sayılı kolonu, dış yüksüz sistemde düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri sıfır iken, k sayılı plastik kesitteki plastik şekildeğiştirme parametresinin birim değeri için, tüm plastik kesitlerdeki;

$$A_1 \Delta M_x + A_2 \Delta M_z + A_3 \Delta N \quad (19)$$

iç kuvvet değişimlerini göstermektedir. Betti karşılık teoremine göre, $[S_{\theta\theta}]$ matrisi esas köşegenine göre simetriktir. Sistemi oluşturan çubukların herbirinde birden fazla plastik kesit bulunmadığı sürece $[S_{\theta\theta}]$ matrisinin sadece esas köşegeni üzerindeki terimleri sıfırdan farklıdır.

$[R]$: $m \times m$ boyutunda bir köşegen matristir. Bu matrisin k sayılı köşegen elemanı, dış yüksüz sistemde düğüm noktalarının yerdeğiştirme bileşenleri sıfır iken, k sayılı plastik kesitteki plastik şekildeğiştirme parametresinin birim değeri için, bu plastik kesitteki

$$A_1^2 k_x + A_2^2 k_z \quad (20)$$

iç kuvvet değişiminden oluşmaktadır.

Yukarıda açıklanan denge denklemleri ve plastik kesitlerdeki iç kuvvet-plastik şekildeğiştirme bağıntıları birarada yazıldığında, sisteme ait genişletilmiş denklem takımı;

$$\begin{bmatrix} [S_{dd}] & [S_{d\theta}] \\ [S_{\theta d}] & [\bar{S}_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [d] \\ [\theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [q] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (21)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi $(6n + m) \times (6n + m)$ boyutundadır ve esas köşegenine göre simetriktir.

Hesapta izlenen yol

Geliştirilen artımsal analiz yönteminin, sabit düşey yükler ve monoton olarak değişen yatay yükler etkisindeki betonarme yapı sistemlerinin doğrusal olmayan hesabına uygulanmasında izlenen yol şu adımlardan oluşmaktadır.

i. Düşey işletme yükleri, bu yükler için öngörülen bir yük katsayısı ile çarpılarak düşey hesap yükleri elde edilir.

ii. Düşey hesap yüklerinden oluşan çubuk normal kuvvetleri tahmin edilir.

iii. Sistem düşey hesap yükleri için ikinci meritebe teorisine göre hesaplanır. Bu yükler altında sistemde plastik kesit oluşması halinde, oluşan her plastik kesit için v-vii sayılı adımlar tekrarlanır.

iv. Sistem yatay yük parametresinin birim değeri için ikinci meritebe teorisine göre hesaplanır. Tüm kritik kesitlerdeki iç kuvvet durumları akma koşullarının belirlediği sınır durumlarla karşılaştırılarak yatay yüklerden oluşan ilk plastik kesit belirlenir.

v. Yeni oluşan plastik kesitteki plastik şekildeğiştirme parametresi bilinmeyen olarak alınır ve bu bilinmeyene karşı gelen yeni bir denklem, denklem takımına eklenir. Sadece yeni bilinmeyen ve yeni denklem indirgenir.

vi. Denklem takımı çözülerek sözkonusu adıma ait bilinmeyenler hesaplanır.

vii. Sistemde bir sonraki plastik kesitin oluşumuna veya daha önce oluşan bir plastik kesitteki iç kuvvet durumunun taşıma kapasitesi sınır durumuna ulaşmasına neden olan yük parametresi değişimi bulunarak bu adıma ait toplam yük parametresi elde edilir. Herhangi bir kesitteki iç kuvvet durumunun taşıma kapasitesi sınır durumuna erişmesi halinde hesaba son verilir; aksi halde v-vii sayılı adımlar yeterince tekrarlanır.

Bilgisayar programları

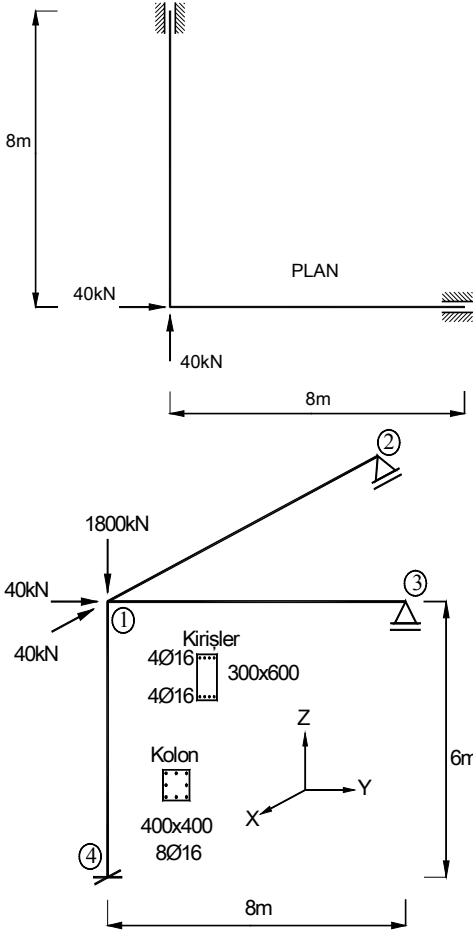
Geliştirilen yöntemin pratik uygulamalarına olanak sağlamak amacıyla, MKAPA ve IMNOSA isimli bilgisayar programları hazırlanarak FORTRAN dilinde kodlanmıştır. Bu programlardan yararlanarak, betonarme uzay çubuk sistemlerin doğrusal olmayan statik itme analizi yapılarak yatay yük parametresi-yatay yerdeğiştirme bağıntıları (kapasite eğrileri) elde edilebilmektedir.

Sayısal örnekler

Sayısal incelemeler, seçilen iki örnek yapı sistemi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu yapı sistemleri sabit düşey yükler ve orantılı olarak değişen yatay kuvvetler altında malzeme ve geometri değişimleri bakımından doğrusal olmayan teoriye göre hesaplanarak yük parametresi-yerdeğiştirme diyagramları (kapasite eğrileri) elde edilmiştir.

Örnek 1

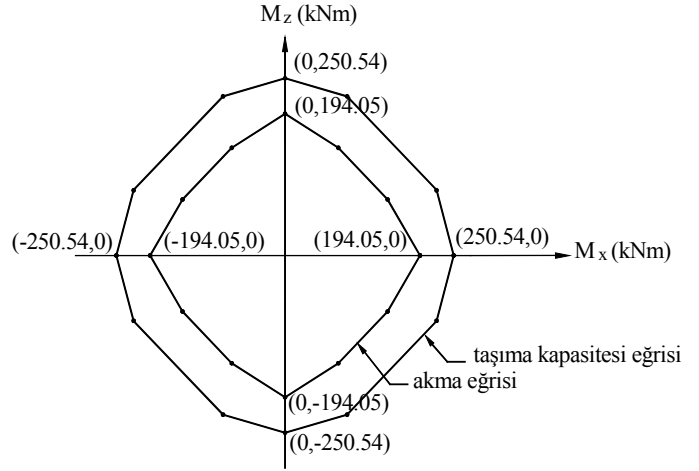
Geometrisi, enkesitleri ve işletme yükleri Şekil 12’de verilen tek katlı uzay çubuk sistemin ikinci mertbe elastoplastik hesabı yapılacaktır. Sistemin C25 betonarme betonu ve S420 beton çeliğinden yapıldığı göz önünde tutulmaktadır.



Şekil 12. Tek katlı betonarme uzay çerçeve ve işletme yükleri

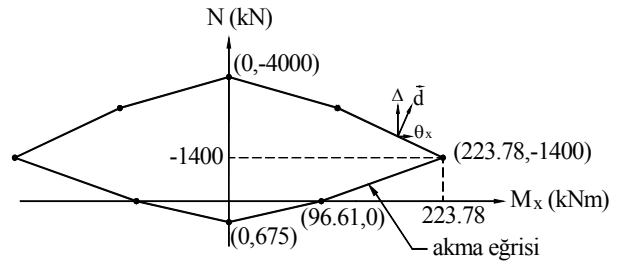
Örnek olmak üzere, iki eksenli bileşik eğilme ile zorlanan 4-1 kolonu için, doğru parçalarından oluşacak şekilde idealleştirilen $M_x - M_z$ karşılıklı etki diyagramları Şekil 13’te verilmiştir. Burada, akma diyagramını oluşturan doğru parçaları betonun $\varepsilon_{co} = 0.002$ birim kışalmasına veya beton çeliğinin $\varepsilon_{sy} = 0.0021$ birim uzamasına, taşıma kapasitesi diyagramını oluşturan doğru parçaları ise betonun $\varepsilon_{cu} = 0.01$ birim kışalmasına veya beton çeliğinin $\varepsilon_{su} = 0.10$ birim uzamasına karşı gelmektedir. Kolon kesiti-

nin akma ve taşıma kapasitesi diyagramları, normal kuvvetin $N = -1800$ kN değeri için elde edilmişlerdir.



Şekil 13. 4-1 Kolonunun idealleştirilmiş $M_x - M_z$ karşılıklı etki diyagramları

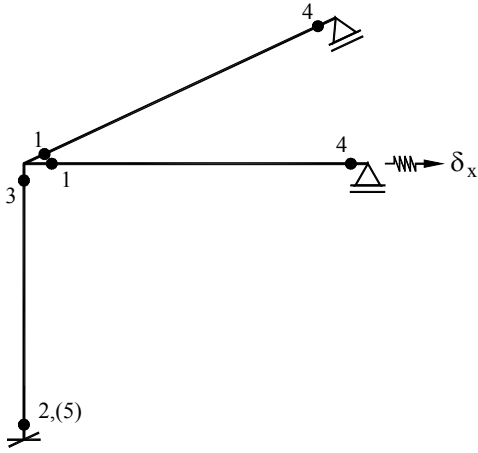
4-1 kolonunda eğilme ve uzama şekil değiştirmeleri arasındaki bağıntı, Şekil 14’te verilen idealleştirilmiş $M_x - N$ akma bağıntısı kullanılarak hesaplanmıştır.



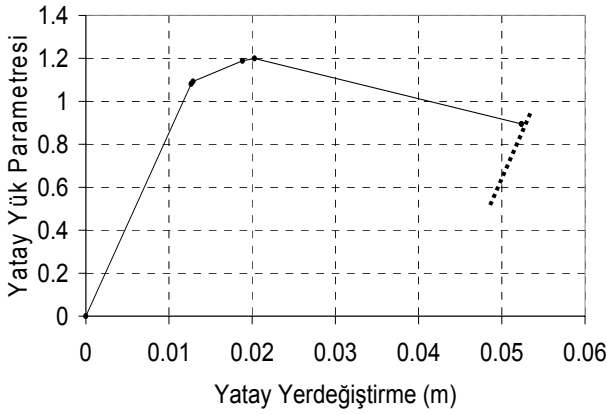
Şekil 14. 4-1 Kolonunun idealleştirilmiş $M_x - N$ akma diyagramı

Her iki bakımdan doğrusal olmayan teoriye göre yapılan statik itme analizi sonucunda meydana gelen plastik kesitlerin sistem üzerindeki dağılımı ve bunların oluşum sırası Şekil 15’te görülmektedir.

Sistemin ikinci mertbe teorisine göre hesabı ile elde edilen yatay yük parametresi-yatay yerdeğiştirme ($P_y - \delta_y$) diyagramı Şekil 16’da verilmiştir.



Şekil 15. Statik itme analizinde meydana gelen plastik kesitler ve oluşum sırası



Şekil 16. Yatay yük parametresi-yatay yerdeğiştirme ($P_y-\delta_y$) diyagramı

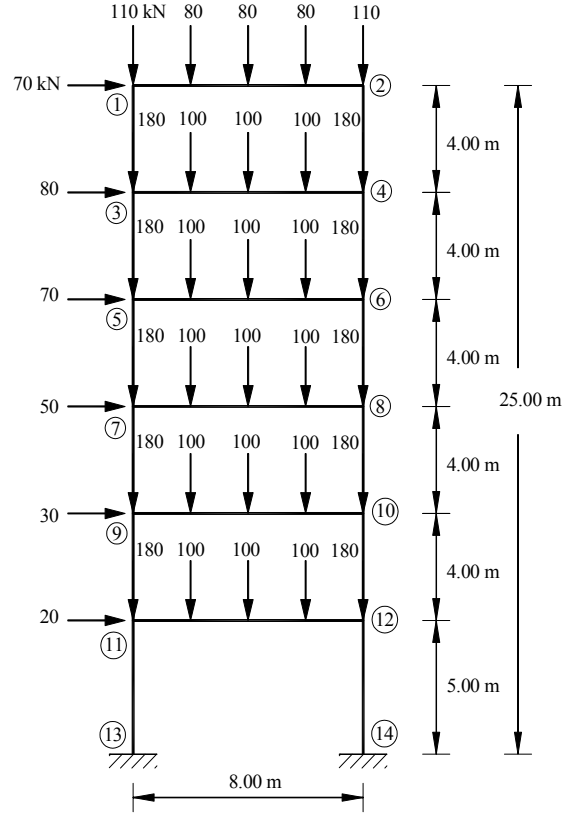
Örnek 2

Geometrisi ve düşey, yatay işletme yükleri Şekil 17'de verilen altı katlı betonarme düzlem çerçeve sisteminin birinci ve ikinci mertebeye teorilerine göre doğrusal olmayan analizleri yapılacaktır ve elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılacaktır.

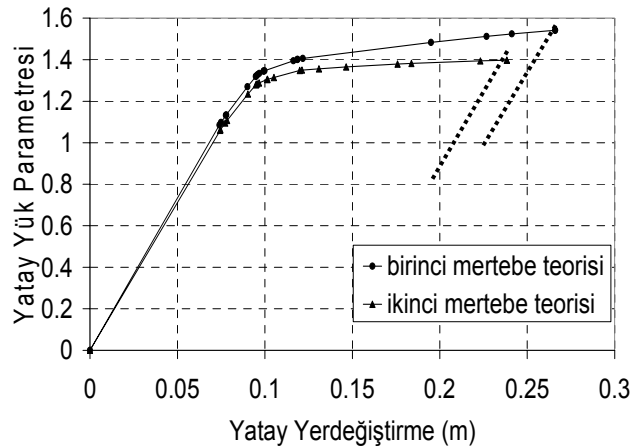
Betonarme çerçeve sisteminin beton ve beton çeliği sınıfları, sırasıyla C30 ve S420'dir. Yukarıda açıklanan sistem ve yükleme özellikleri esas alınarak, yapı sisteminin doğrusal olmayan statik itme analizleri yapılmıştır.

Bu çalışma kapsamında geliştirilen IMNOSA bilgisayar programı ile yapılan analizler sonunda elde edilen yatay yük parametresi-yatay yerdeğiştirme diyagramları Şekil 18'de verilmiştir.

İkinci mertebe teorisine göre hesapta, sistemin taşıma kapasitesinin sona erdiği $P_{G2}=1.397$ yatay yük parametresi için sistemde oluşan plastik kesitler ile kiriş ve kolonlarda oluşan ilk plastik kesitler ve taşıma kapasitesine ulaşan plastik kesit Şekil 19'da gösterilmiştir.

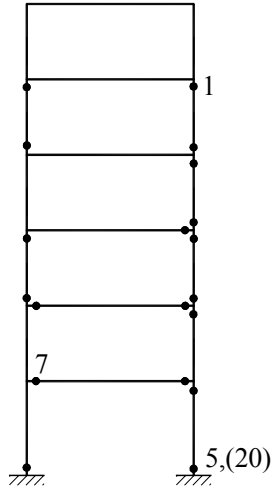


Şekil 17. Altı katlı betonarme düzlem çerçeve sistem ve işletme yükleri



Şekil 18. Birinci ve ikinci mertebe teorilerine ait yatay yük parametresi-yatay yerdeğiştirme diyagramları

Yapı sisteminin birinci ve ikinci merteye teorilerine göre itme analizi sonucunda elde edilen başlıca sayısal bilgiler Tablo 1 üzerinde özetlenmiştir.



Şekil 19. İkinci merteye teorisi için plastik kesitlerin dağılımı

Tablo 1. Yatay yük taşıma kapasiteleri ve plastik kesitlerin oluşumu

Yatay Yük Parametresi	Plastik Kesit Sayısı		İlk Plastik Kesitin Oluştugu Yatay Yük Parametresi		
	Toplam	Kirişte Kolonda	Kirişte	Kolon- da	
$P_{G1} = 1.542$	19	6	13	1.319	1.085
$P_{G2} = 1.397$	19	5	14	1.280	1.059

Sonuçlar

Bu çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar aşağıda açıklanmıştır.

Betonarme yapı sistemlerinin dış yükler altındaki doğrusal olmayan davranışlarının incelenmesi, taşıma kapasitelerinin bulunması ve deprem performanslarının değerlendirilmesi amacıyla kullanılmak üzere, bir artımsal analiz yöntemi geliştirilmiştir. Yöntemde betonarme yapı elemanlarının doğrusal olmayan davranışı ve geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi gözönüne alınmaktadır.

Doğrusal olmayan şekildeğiştirmelerin *plastik kesit* adı verilen ve sınırlı plastik şekildeğiştirme kapasitesine sahip olan belirli kesitlerde toplandığının gözönünde tutulduğu çalışmada, basit eğilme etkisindeki sistemlere uygulanmakta olan plastik mafsal hipotezi, bileşik iç kuvvet durumunu ve pekleşme, gevşeme (ani dayanım kaybı) etkilerini kapsayacak şekilde genelleştirilmiştir.

Kaynaklar

- Attalla, M.R., Deierlein, G.G. ve McGuire, W., 1995. Spread of plasticity: quasi-plastic hinge approach, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **120**, 2451-2473.
- Aydınöğlü, M.N., (2004). Incremental response spectrum analysis (IRSA) procedure for multi-mode pushover including p-delta effects, *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C., Canada, August 1-6, 1-15.
- Chopra, A.K. ve Goel, R.K., (1999). Capacity demand - diagram methods based on inelastic design spectrum, *Earthquake Spectra*, **15**, 637-656.
- Çakıroğlu, A., Özer, E. ve Girgin, K., (1999). Yield conditions and yield vector for combined biaxial bending of rectangular R/C sections, *Proceedings of the Uğur Ersoy Symposium on Structural Engineering*, METU Press, Ankara, July 1-2, 121-135.
- Girgin, K., (1996). Betonarme yapı sistemlerinde ikinci merteye limit yükün ve göçme güvenliğinin belirlenmesi için bir yük artımı yöntemi, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Graham, J., (2003). An elastic-plastic (second-order) plane frame analysis method for design engineers, *The Structural Engineer*, **81**, 31-35.
- İrtem, E., (1991). Uzay çubuk sistemlerde ikinci merteye limit yükün hesabı için bir yük artımı yöntemi, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özer, E., (1987). Determination of second-order limit load by a method of load increments, *Bulletin of the Technical University of Istanbul*, **40**, 815-836.
- Powell, G.H. ve Chen, P.F., (1986). 3D Beam-column element with generalized plastic hinges, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **112**, 627-641.