

# Bulanık kontrol diyagramı modellerinin geliştirilmesi: Direkt bulanık yaklaşım

**Murat GÜLBAY\***, Cengiz KAHRAMAN

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Endüstri Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Klasik kontrol diyagramları, W.A. Shewhart tarafından 1920'lerde geliştirilmiş olmasına rağmen yeni uygulama alanları ile günümüzde hala gelişimini sürdürmektedir. Verilerin tam ve kesin olduğu durumlarda klasik kontrol diyagramlarının kullanılması uygundur; ancak subjektifliğin önemli bir rol oynadığı bazı durumlarda bu kadar kesin verilere sahip olmak neredeyse imkânsızdır. Belirsizlik altındaki durumlarda karar analizleri genellikle olasılık teorisi ve/veya bulanık kümeler teorisi kullanılarak yapılmaktadır. Bunlardan birincisi karar vermenin stokastik yapısını diğeri ise insanın düşüncesinin subjektifliğini temsil eder. Bulanık kümeler teorisi, ne rassal ne de stokastik olan insanın zihinsel yapısından kaynaklanan belirsizliğin modellenmesinde mükemmeldir. Belirsiz, kesin olmayan veya dilsel anlatımlar içeren durumlarda bulanık kümeler teorisinin kullanılması kaçınılmazdır. Bu çalışmada, bulanık kümeler teorisi kullanılarak belirsizlik içeren dilsel verilerle kontrol diyagramlarına yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir. Belirsizlik içeren dilsel veriler, bulanık sayılarla ifade edilmiştir. Dilsel veriler için bulanık kontrol diyagramları  $\alpha$ -kesim yaklaşımı kullanılarak geliştirilmiş ve bu suretle muayene sıklığı tanımlanmıştır. Veri ve kontrol limitlerinin temsili değerler ile klasik biçime (nümerik değerlere) dönüştürülmesi sonucu taşıdığı bilgiler yitirilmektedir. Bulanık kontrol diyagramlarının oluşturulmasında, bulanık verilerin taşıdığı bilgilerin kaybolmasını önlemek amacıyla "Direkt Bulanık Yaklaşım" geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda veriler bulanık sayılarla ifade edilmiş ve temsili değerler kullanılmadan kontrol limitleri de bulanık sayılar olarak hesaplanmıştır. Kontrol altında, kontrol dışında kararlarına ek olarak kısmen kontrol altında, kısmen kontrol dışında gibi ara kararlar geliştirilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık proses kontrol diyagramları, bulanık kümeler, dilsel veriler, normal olmayan davranış analizi, belirsizlik.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Murat GÜLBAY gulbaym@itu.edu.tr; Tel: (212) 293 13 00-2759.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Endüstri Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "Fuzzy process control and development of some models for fuzzy control charts" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.12.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 08.03.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 01.02.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Development of fuzzy process control charts: Direct fuzzy approach

### *Extended abstract*

Control charts have been widely used for monitoring process stability and capability. Control charts are based on data representing one or several quality-related characteristics of the product or service. If these characteristics are measurable on numerical scales, then variable control charts are used. If the quality-related characteristics cannot be easily represented in numerical form, then attribute control charts are useful. Even though the first classical control chart was proposed during the 1920's by W.A. Shewhart, today they are still subject to new application areas that deserve further attention.

Classical process control charts are suitable when the data are exactly known and precise; but in some cases, it is nearly impossible to have such strict data if human subjectivity plays an important role. It is not surprising that uncertainty exists in the human world. To survive in our world, we are engaged in making decisions, managing and analyzing information, as well as predicting future events. All of these activities utilize information that is available and help us try to cope with information that is not. A rational approach toward decision-making should take human subjectivity into account, rather than employing only objective probability measures. A research work incorporating uncertainty into decision analysis is basically done through the probability theory and/or the fuzzy set theory. The former represents the stochastic nature of decision analysis while the latter captures the subjectivity of human behavior. The fuzzy set theory is a perfect means for modeling uncertainty (or imprecision) arising from mental phenomena which is neither random nor stochastic. Many problems in scientific investigation generate nonprecise data incorporating nonstatistical uncertainty. A nonprecise observation of a quantitative variable can be described by a special type of membership function defined on the set of all real numbers called a fuzzy number or a fuzzy interval. A methodology for constructing control charts is proposed when the quality characteristics are vague, uncertain, incomplete or linguistically defined. The binary classification into conforming and nonconforming used in the p-chart might not be appropriate in many situations where product quality does not change abruptly from satisfactory to worthless, and

there might be a number of intermediate levels. Without fully utilizing such intermediate information, the use of the p-chart usually results in poorer performance than that of the x-chart. This is evidenced by weaker detectability of process shifts and other abnormal conditions such as unnatural patterns. To supplement the binary classification, several intermediate levels may be expressed by using linguistic terms. For example, the quality of a product can be classified into the following terms: 'perfect', 'good', 'medium', 'poor', or 'bad' depending on its deviation from specifications. Then, the continuous functions selected appropriately can be used to describe the quality characteristic associated with each linguistic term. In this study, the control charts for number of nonconformities are handled. The type of available data is the imprecise number of nonconformities such as "between 5 and 8" or "approximately 6". The statistical model is based on the classical Shewhart control charts.

In the literature, there exist few papers on fuzzy control charts, which use defuzzification methods such as fuzzy mod, fuzzy midrange, fuzzy median, and fuzzy average in the early steps of their algorithms. The use of defuzzification methods in the early steps of the algorithm makes it too similar to the classical analysis. Linguistic data in those works are transformed into numeric values before control limits are calculated. Thus both control limits as well as sample values become numeric. This transformation may cause biased results due to the loss of information included by the samples. For example, two fuzzy samples with the equal fuzzy mod may explain very different characteristics. A new approach called direct fuzzy approach to fuzzy control charts is modeled in order to prevent the loss of information of the fuzzy data during the construction of control charts. In this approach, linguistic or uncertain data are represented by means of triangular and/or trapezoidal fuzzy numbers. Using fuzzy arithmetics, control limits based on the fuzzy data are also determined as fuzzy numbers. The decision about the process control is based on the area measurement method. The proposed approach directly compares the linguistic data in fuzzy space without making any transformation. The percentage area of the fuzzy sample behind the fuzzy control limits is used in the decision and intermediate decision levels are defined.

**Keywords:** Fuzzy control charts, fuzzy sets, linguistic data, unnatural pattern analysis, uncertainty.

## Giriş

Kontrol diyagramları belirlenen niteliklerde ürün veya hizmet üretebilmek için prosesin istatistiksel olarak kontrol ve analiz edilmesinde kullanılmaktadır. Kontrol diyagramları, ilk uygulamaları 1920'lerde W.A. Shewhart tarafından başlatılmış olmasına rağmen günümüzde hala farklı disiplinlerde yeni uygulama alanları ile bütünleştirilmek suretiyle gelişimini sürdürmektedir.

Üretim tasarım aşamasında kalite spesifikasyonları için belirli kurallar çerçevesinde tolerans limitleri belirlenir. Boyut, uzunluk, çap, renk, şekil, performans v.b. gibi spesifikasyonların önceden belirlenmiş limitler arasında değişmesi normaldir. Bu değişimin belirlenen limitleri aşması, sürecin kontrol altına alınabilmesi için bir sinyaldir. Bunun yapılmasında istatistiksel proses kontrolü araçları arasında en çok kullanılanı ve en etkili olanı kontrol diyagramlarıdır.

Verilerin kesin ve tam olarak bilindiği durumlarda klasik kontrol diyagramlarının kullanılması uygundur. Ancak prosese ait verilerin kesin ve tam olarak saptanması her zaman mümkün olmayabilir. İnsan yaşamında belirsizliklerin olması şaşırtıcı değildir. Belirsizlik altındaki durumlarda karar analizleri genellikle olasılık teorisi ve/veya bulanık kümeler teorisi kullanılarak yapılmaktadır. Bunlardan birincisi karar vermenin stokastik yapısını; diğeri ise insanın düşüncesinin subjektifliğini temsil eder. Zadeh (1965) tarafından geliştirilen bulanık kümeler teorisi, ne rassal ne de stokastik olan insanın zihinsel yapısından kaynaklanan belirsizliğin modellenmesinde mükemmeldir. Belirsiz, kesin olmayan veya dilsel anlatımlar içeren durumlarda bulanık kümeler teorisinin kullanılması kaçınılmazdır.

Kontrol diyagramlarında bulanık kümeler teorisinin kullanılması Wang ve Raz (1990) ile önem kazanmış ve geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmayı, Raz ve Wang (1990) ile Taleb ve Limam (2002) izlemiştir. Wang ve Raz (1990) çalışmasında kontrol diyagramlarına probabilistik ve üyelik yaklaşımı sunmuştur. Bu çalışmalarda, modelin ilk aşamalarında bulanık veriler durulaştırılmak suretiyle klasik yaklaşıma geçiş yapılmıştır. Dolayısıyla bulanık verilerin taşıdığı belirsizliği ifade eden özellikler anlamını yitirmiş-

tir. Kanagawa ve diğerleri (2003) de üyelik fonksiyonları üzerine inşa ettikleri modellerini sunarak Wang ve Raz (1990) yaklaşımındaki problemleri dile getirmiştir. Veriler temsili değerleri kullanılarak durulaştırıldığından elde edilen kontrol limitleri de klasik yaklaşımdaki gibidir. Bu dönüştürme özellikle simetrik olmayan üyelik fonksiyonları ile kullanıldığında oldukça yanıltıcı sonuçlar elde edilmesine neden olmaktadır.

Bu çalışmada, belirsizlik içeren dilsel verilerle ifade edilen verilerin kontrol diyagramlarına yeni yaklaşımlar geliştirilmiştir. Belirsizlik içeren dilsel veriler, bulanık sayılarla ifade edilmiştir. Mevcut modeller  $\alpha$ -kesim ile geliştirilerek muayene sıklığı tanımlanmıştır. Bulanık kontrol diyagramları için "Direkt Bulanık Yaklaşım (DBY)" geliştirilmiştir. Bu yaklaşımda bulanık verilerin taşıdığı özelliklerin kaybolmaması için veriler bulanık ortamda değerlendirilmiştir. Geliştirilen yaklaşımda, klasik kontrol diyagramlarından elde edilen "kontrol altında" veya "kontrol dışında" şeklindeki sert geçişlere ek olarak "kısmen kontrol altında" ve "kısmen kontrol dışında" gibi ara karar mekanizmaları da tanımlanmıştır.

Kontrol diyagramlarında bütün verilerin tanımlanan limitler altında olması da sürecin tam olarak kontrol altında olduğunu söylemek için yeterli değildir. Verilerin kontrol diyagramı üzerindeki bölgelerde normal bir desen sergilemesi gerekmektedir. Kontrol diyagramları üzerinde izlenmesi gereken en önemli hususlardan biri de normal dışı davranış testleridir. Verilerin diyagram üzerinde oluşturduğu desenlerin olasılıkları dikkate alınarak gerçekleşme şansı oldukça düşük, önceden tanımlanmış durumlarda da sürecin kontrol dışında olduğu rahatlıkla söylenebilir. Literatürdeki klasik kontrol diyagramları için anormal davranış testleri çalışmalarına oldukça yer verilmiştir (Western Electric, 1956; Nelson, 1984, 1985; Duncan, 1986; Grant ve Leavenworth, 1996). Bu çalışmada geliştirilen direkt bulanık yaklaşımı temel alınarak bulanık kontrol diyagramları için anormal davranış testleri Gülbay ve Kahraman (2006) tarafından geliştirilmiştir. Gülbay ve Kahraman (2006) bulanık anormal davranış testlerinde bulanık olayların olasılığını kullanmış ve anormallik üyelik derecesi tanımlamıştır.

### $\alpha$ -kesim bulanık $p$ kontrol diyagramları

Klasik  $p$  kontrol diyagramlarında “kusurlu”, “kusursuz” olarak tanımlanan kesin ayırım bulanık  $p$  kontrol diyagramlarında “kusursuz”, “az kusurlu”, “standart”, “çok kusurlu”, veya “kusurlu” gibi tanımlarla esnetilerek insan subjektifliği dikkate alınabilir. Tanımlanan bu kategorilerin her birine kusurlu olma üyelik derecesi belirlenir. Her bir örnek grubunun ortalama değeri aşağıdaki denklem ile hesaplanır.

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^t k_{ij}r_i}{m_j} \quad (1)$$

Burada,  $t$  tanımlanan kategori sayısı,  $k$  her bir kategoriye ayrılan örnek sayısı,  $r$  kategorinin temsili değeri ve  $m$  gruptaki örnek sayısıdır.

Bu veriler için kontrol diyagramının merkez çizgisi (CL) ise örnek gruplarının ortalama değerlerinin ortalaması olarak hesaplanır:

$$CL = \bar{M}_j = \frac{\sum_{j=1}^n M_j}{n} \quad (2)$$

Burada  $n$  toplam örnek grubu sayısıdır. (1) ve (2) numaralı denklemlerdeki  $k$  ve  $r$  değerleri insan subjektifliğini içermektedir. Bir örnek bir kalite kontrolcü tarafından az kusurlu grubuna dahil edilebileceği gibi standart veya kusursuz olarak da değerlendirilebilir. Buradaki belirsizliğin modellenmesinde, CL bulanık mod değeri CL değerine denk gelen üçgensel bulanık sayı (TFN) olarak tanımlanabilir (Şekil 1).

Şekil 1’de gösterilen  $L_j(\alpha)$  ve  $R_j(\alpha)$  değerleri (3) ve (4) numaralı denklemler ile hesaplanır.

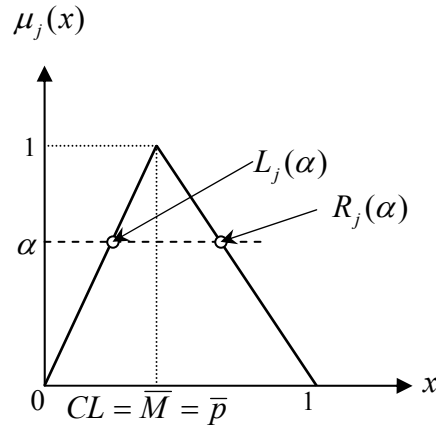
$$R_j(\alpha) = 1 - [(1 - M_j)\alpha] \quad (3)$$

$$L_j(\alpha) = M_j\alpha \quad (4)$$

Buradan CL’nin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_{M_j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x \leq 0 \\ \frac{x}{\bar{M}}, & \text{eğer } 0 \leq x \leq \bar{M} \\ \frac{1-x}{1-\bar{M}}, & \text{eğer } \bar{M} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{eğer } x \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

Merkez çizgisine (CL) üyelik fonksiyonunun sol ve sağ destek kısımları dikkate alınarak  $\alpha$ -kesim uygulandığında, kontrol limitlerinin  $\alpha$  değerine bağlı olarak üyelik fonksiyonu (6) numaralı denklemde belirtildiği gibi hesaplanır (Gülbay vd., 2004).



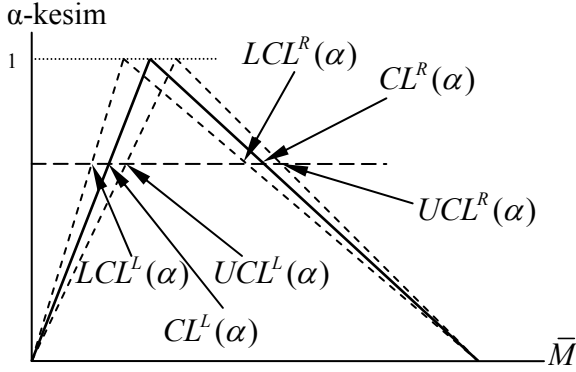
Şekil 1.  $\bar{M}$  ve  $M_j$  değerlerinin üçgensel bulanık sayı olarak gösterimi

Kontrol Limitleri( $\alpha$ )=

$$\left\{ \begin{array}{l} CL^L = \bar{M}\alpha \\ LCL^L = \max \left\{ CL^L - 3\sqrt{\frac{(CL^L)(1-CL^L)}{n}}, 0 \right\} \\ UCL^L = \min \left\{ CL^L + 3\sqrt{\frac{(CL^L)(1-CL^L)}{n}}, 1 \right\} \end{array} \right\}, \text{ eğer } 0 \leq M_j \leq \bar{M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CL^R = 1 - [(1 - \bar{M}\alpha)\alpha] \\ LCL^R = \max \left\{ CL^R - 3\sqrt{\frac{(CL^R)(1-CL^R)}{n}}, 0 \right\} \\ UCL^R = \min \left\{ CL^R + 3\sqrt{\frac{(CL^R)(1-CL^R)}{n}}, 1 \right\} \end{array} \right\}, \text{ eğer } \bar{M} \leq M_j \leq 1 \quad (6)$$

$\alpha$ -kesim kontrol limitleri Şekil 2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.  $\alpha$ -kesim kontrol limitleri (UCL: üst kontrol limiti; LCL: alt kontrol limiti)

Prosesin kontrol altında olup olmadığına ise (7) numaralı denkleme göre karar verilebilir.

Proses Kontrol =

$$\begin{cases} 1, & \text{eğer } LCL^L(\alpha) \leq L_j(\alpha) \leq UCL^L(\alpha) \\ & \wedge LCL^R(\alpha) \leq L_R(\alpha) \leq UCL^R(\alpha) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (7)$$

### $\alpha$ -kesim bulanık c kontrol diyagramı:

#### Direkt bulanık yaklaşım

Klasik c kontrol diyagramlarında kontrol limitleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$CL = \bar{c} \quad (8)$$

$$LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \quad (9)$$

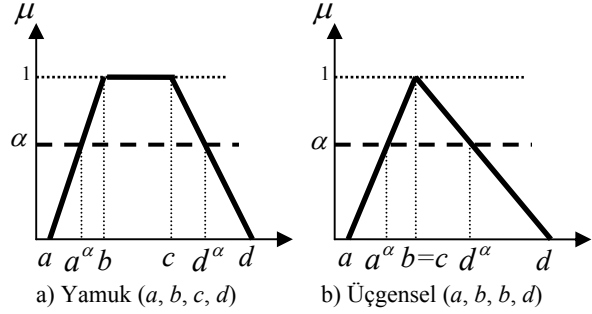
$$UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \quad (10)$$

$$\tilde{CL} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = (CL_1, CL_2, CL_3, CL_4) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L\tilde{CL} &= \tilde{CL} - 3\sqrt{\tilde{CL}} \\ &= (CL_1 - 3\sqrt{CL_4}, CL_2 - 3\sqrt{CL_3}, CL_3 - 3\sqrt{CL_2}, CL_4 - 3\sqrt{CL_1}) \\ &= (LCL_1, LCL_2, LCL_3, LCL_4) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U\tilde{CL} &= \tilde{CL} + 3\sqrt{\tilde{CL}} \\ &= (CL_1 + 3\sqrt{CL_1}, CL_2 + 3\sqrt{CL_2}, CL_3 + 3\sqrt{CL_3}, CL_4 + 3\sqrt{CL_4}) \\ &= (UCL_1, UCL_2, UCL_3, UCL_4) \end{aligned} \quad (14)$$

Burada  $\bar{c}$  ortalama kusur sayısıdır. Bulanık ortamda kusur sayısının gözlemlenmesindeki subjektiflik dikkate alındığında “10 ile 14 arasında” veya “yaklaşık olarak 12” şeklindeki kusur sayılarını Şekil 3’te gösterildiği gibi üçgensel ya da yamuk bulanık sayılar ile tanımlamak mümkündür.



Şekil 3. Kusur sayısının yamuk (a) veya üçgensel (b) bulanık sayılar ile gösterilmesi

Bu çalışmada üçgensel veya yamuk bulanık sayılarla ifade edilen bulanık verilerin kontrol diyagramlarına durulaştırma yapılmadan direkt bulanık yaklaşım önerilmektedir. Merkez çizgisi bulanık sayıların ortalaması olarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \tilde{CL} &= \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^n c_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^n d_j}{n} \right) \\ &= (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) \end{aligned} \quad (11)$$

Bulanık aritmetik yardımıyla (Chen ve Hwang, 1992) LCL ve UCL (12, 13 ve 14) numaralı denklemlerdeki gibi elde edilir.

Kontrol limitlerine  $\alpha$ -kesim uygulandığında, örnek değerleri için  $a^\alpha$  ile  $d^\alpha$  ve merkez çizgisi için de  $CL_1^\alpha$  ve  $CL_4^\alpha$  değerleri 15 ve 16. eşitlikler yardımıyla hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} a^\alpha &= a + \alpha(b - a) \\ CL_1^\alpha &= CL_1 + \alpha(CL_2 - CL_1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} d^\alpha &= d - \alpha(d - c) \\ CL_4^\alpha &= CL_4 - \alpha(CL_4 - CL_3) \end{aligned} \quad (16)$$

$\alpha$ -kesim gösterimi ile bulanık kontrol limitleri 17-19 numaralı eşitliklerde olduğu gibi yazılabilir (Gülbay ve Kahraman; 2006, 2007)

$$\tilde{CL}^\alpha = (CL_1^\alpha, CL_2, CL_3, CL_4^\alpha) \quad (17)$$

$$L\tilde{CL}^\alpha = (LCL_1^\alpha, LCL_2, LCL_3, LCL_4^\alpha) \quad (18)$$

$$U\tilde{CL}^\alpha = (UCL_1^\alpha, UCL_2, UCL_3, UCL_4^\alpha) \quad (19)$$

Hesaplanan bulanık kontrol limitleri Şekil 4'te gösterilmiştir. Her bir bulanık örneğin bulanık kontrol limitleri ile kıyaslanmasında alan ölçümüne dayalı bir kıyaslama yapılmıştır. Eğer bulanık örnek tamamıyla bulanık kontrol limitleri içinde yer alıyorsa proses kontrol altında, tamamıyla dışında kalıyorsa kontrol dışında sonucu elde edilir. Bulanık örnek ile bulanık kontrol limitleri arasındaki olası durumlar Şekil 5'de gösterilmiştir. Her bir olası durum için alan hesaplamaları ise ekte sunulmuştur. Bulanık örneğin belirli bir kısmının bulanık kontrol limitleri dışında kaldığı durumlarda dışarıda kalan alan yüzdesine ( $\beta_j$ ) göre karar verilir. Kalite kontrolcü bu aşamada belirli yüzdeler için ara karar mekanizmalarını proses özelliklerine göre subjektif olarak tanımlayabilmektedir.  $S_j^\alpha$ ,  $j$  örneğinin  $\alpha$ -kesim seviyesindeki alanı,  $A_{out,j}^\alpha$  örneğin  $\alpha$ -kesim seviyesindeki dışarıda kalan alanı olmak üzere, örneğin bulanık kontrol limitleri dışında kalan yüzdesi 20 numaralı eşitlikte gösterildiği gibidir. Bu hesaplama için bir akış şeması Şekil 6'da verilmiştir.

rildiği gibidir. Bu hesaplama için bir akış şeması Şekil 6'da verilmiştir.

$$\beta_j^\alpha = \frac{S_j^\alpha - A_{out,j}^\alpha}{S_j^\alpha} \quad (20)$$

Bu yaklaşım ile karar verme işlemi  $\beta_j$  değerine göre yapılabilir. Bunun bir örneği 21 numaralı denklemde verilmiştir.

$$\text{Proses Kontrol} = \begin{cases} \text{kontrol altında,} & \text{eğer } 0.85 \leq \beta_j \leq 1 \\ \text{kısmen kontrol altında,} & \text{eğer } 0.60 \leq \beta_j < 0.85 \\ \text{kısmen kontrol dışında,} & \text{eğer } 0.10 \leq \beta_j < 0.60 \\ \text{kontrol dışında,} & \text{eğer } 0 \leq \beta_j < 0.10 \end{cases} \quad (21)$$

## Sonuçlar

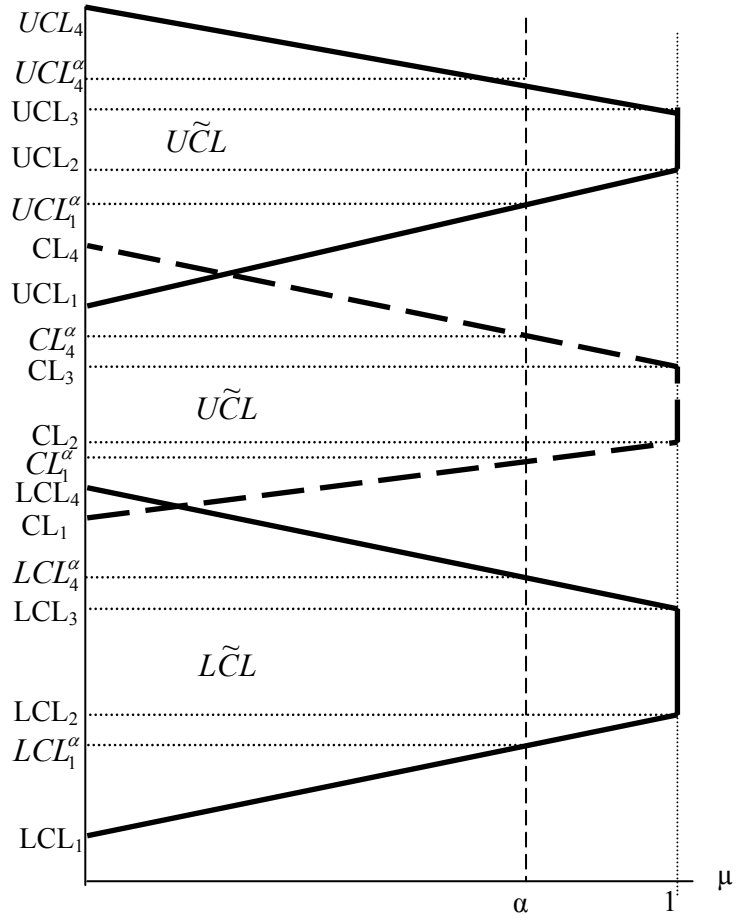
Bu çalışmada:

- Mevcut bulanık kontrol diyagramları  $\alpha$ -kesim uygulanarak geliştirilmiş ve etkili sonuçlar elde edilmiştir.
- Bulanık yaklaşım nedeniyle kontrol altında veya kontrol dışında durumlarına ek olarak ara geçiş kararlarını sunulmuştur.
- Durulaştırma ve temsili değerler kullanmak suretiyle karşılaşılan bilgi kaybını önlemek amacıyla direkt bulanık yaklaşımı geliştirilmiş ve  $c$  kontrol diyagramlarına uygulanmıştır.

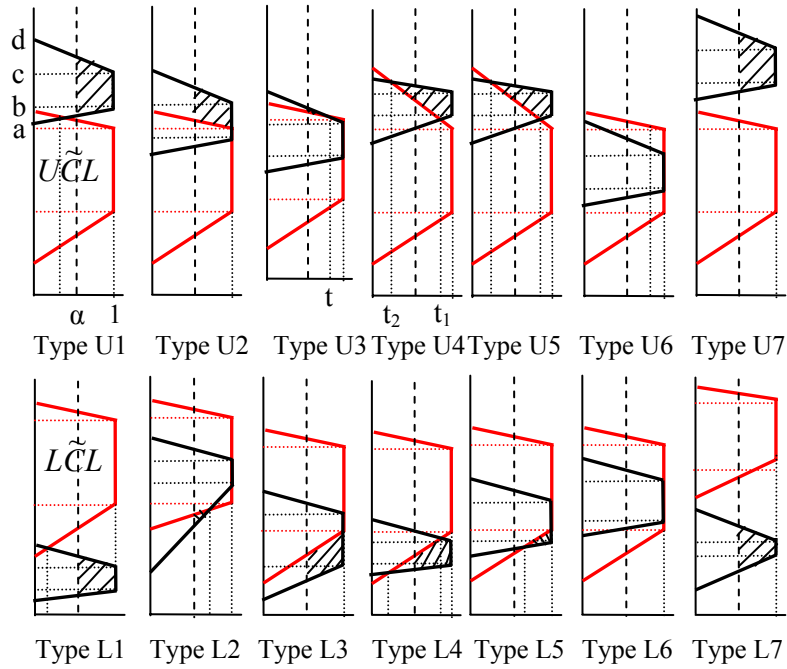
## Kaynaklar

- Chen, S-J ve Hwang, C-L., (1992). *Fuzzy multi attribute decision making: Methods and applications*, Springer-Verlag, Germany.
- Duncan, A.J., 1986, *Quality Control and Industrial Statistics*, 5<sup>th</sup> ed., Irwin Book Company, Illinois.
- Gülbay, M., Kahraman, C., ve Ruan, D., (2004).  $\alpha$ -cut fuzzy control charts for linguistic data, *International Journal of Intelligent Systems*, **19**, 1173-1196.
- Gülbay, M., ve Kahraman, C., (2007). An Alternative Approach to Fuzzy Control Charts: Direct Fuzzy Approach, *Information Sciences*, **177**, 6, 1463-1480.

- Gülbay, M. ve Kahraman, C., (2006). Development of fuzzy process control charts and fuzzy unnatural pattern analyses, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 1, 434-451.
- Grant, E.L, Leavenworth R.S, (1996). *Statistical Quality Control: 7<sup>th</sup> ed.*, McGraw-Hill, New York, NY.
- Kanagawa, A., Tamaki, F. ve Ohta, H., (1993). Control charts for process average and variability based on linguistic data, *International Journal of Production Research*, **31**, 913–922.
- Nelson, L.S., 1984, The Shewhart control chart-tests for special causes, *Journal of Quality Technology*, **16**, 237-239.
- Nelson, L.S., 1985, Interpreting Shewhart x-bar control charts. *Journal of Quality Technology*, **17**, 114-116.
- Raz, T. ve Wang, J-H., (1990). Probabilistic and membership approaches in the construction of control charts for linguistic data, *Production Planning and Control*, **1**, 147-157.
- Taleb H., Limam M., (2002). On fuzzy and probabilistic control charts, *International Journal of Production Research*, **40**, 2849-2863.
- Wang, J-H. ve Raz, T., (1990). On the construction of control charts using linguistic variables, *International Journal of Production Research*, **28**, 477-487.
- Western Electric, 1956, *Statistical Quality Control Handbook*, Western Electric, New York.
- Zadeh, L.A., (1965). Fuzzy set. *Information and Control*, **8**, 338–353.

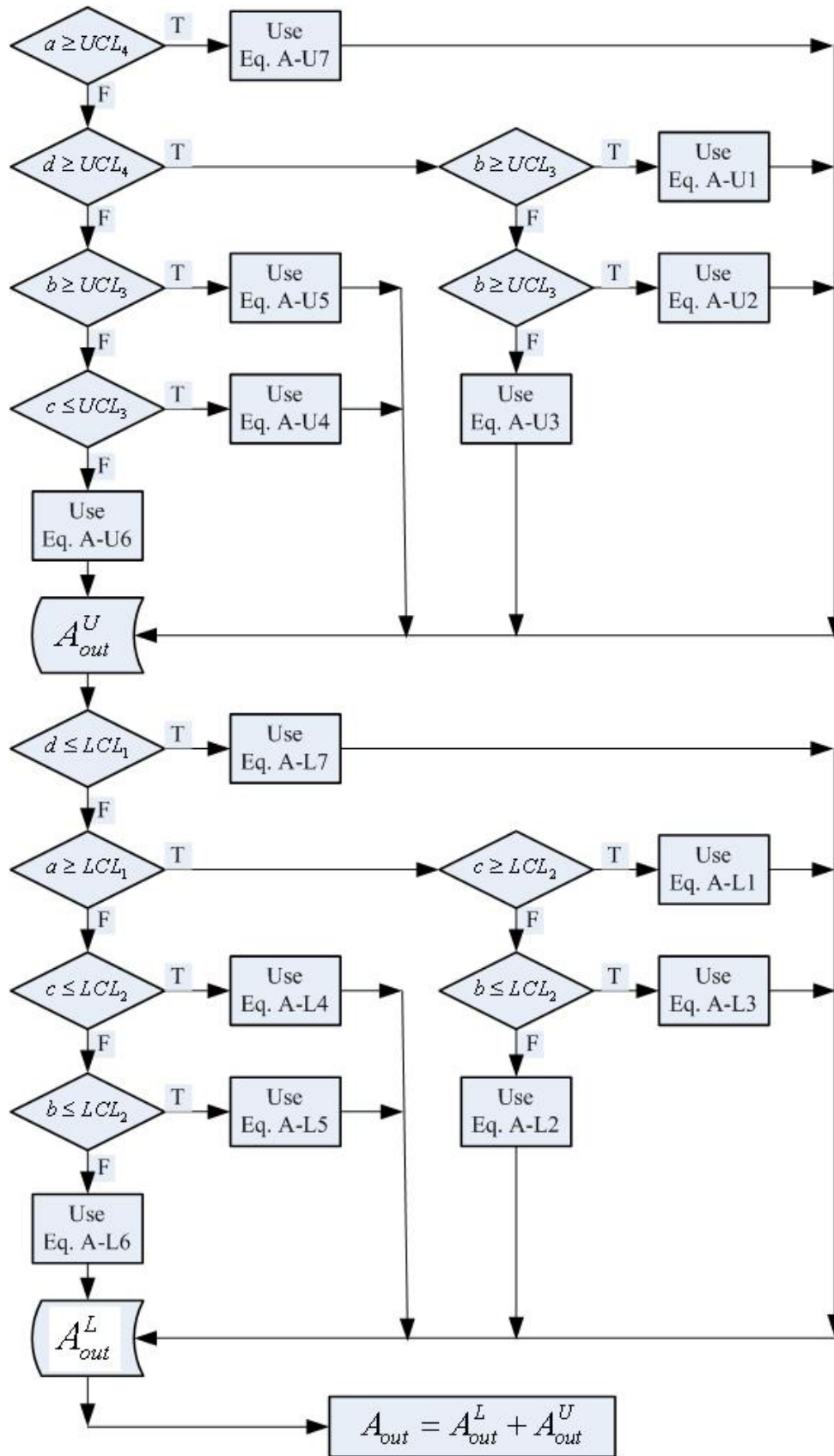


Şekil 4. Bulanık kontrol limitlerinin şekilsel gösterimi



Şekil 5. Bulanık örnek ile bulanık kontrol limitleri arasındaki olası durumların şekilsel gösterimi





Şekil 6. Dışarıda kalan alanın hesaplanmasına ait akış şeması (Denklemler ekte verilmiştir)

**Ek:**

Şekil 6’da belirtilen denklemler.

$$A_{out}^U = \frac{1}{2} \left[ (d^\alpha - UCL_4^\alpha) + (d^t - UCL_4^\alpha) \right] (\max(t - \alpha, 0)) + \frac{1}{2} \left[ (d^z - a^z) + (c - b) \right] (\min(1 - t, 1 - \alpha)) \quad (\text{A-U1})$$

$$t = \frac{UCL_4^\alpha - a}{(b - a) + (c - b)} \quad \text{ve} \quad z = \max(t, \alpha)$$

$$A_{out}^U = \frac{1}{2} \left[ (d^\alpha - UCL_4^\alpha) + (c - UCL_3) \right] (1 - \alpha) \quad (\text{A-U2})$$

$$A_{out}^U = \frac{1}{2} (d^\alpha - UCL_4^\alpha) (\max(t - \alpha, 0)) \quad (\text{A-U3})$$

$$t = \frac{UCL_4 - d}{(UCL_4 - UCL_3) - (d - c)}$$

$$A_{out}^U = \frac{1}{2} \left[ (c - UCL_3) + (d^z - UCL_4^z) \right] (\min(1 - t, 1 - \alpha)) \quad (\text{A-U4})$$

$$t = \frac{UCL_4 - d}{(UCL_4 - UCL_3) - (d - c)} \quad \text{ve} \quad z = \max(t, \alpha)$$

$$A_{out}^U = \frac{1}{2} \left[ (d^{z_2} - UCL_4^{z_2}) + (d^{t_1} - UCL_4^{t_1}) \right] (\min(\max(t_1 - \alpha, 0), t_1 - t_2)) + \frac{1}{2} \left[ (d^{z_1} - a^{z_1}) + (c - b) \right] (\min(1 - t_1, 1 - \alpha)) \quad (\text{A-U5})$$

$$t_1 = \frac{UCL_4 - a}{(b - a) + (UCL_4 - UCL_3)}, \quad t_2 = \frac{UCL_4 - d}{(UCL_4 - UCL_3) - (d - c)}$$

$$z_1 = \max(\alpha, t_1) \quad \text{ve} \quad z_2 = \max(\alpha, t_2)$$

$$A_{out}^U = 0 \quad (\text{A-U6})$$

$$A_{out}^U = \frac{1}{2} [(d^\alpha - a^\alpha) + (c - b)] (1 - \alpha) \quad (\text{A-U7})$$

$$A_{out}^L = \frac{1}{2} [(LCL_1^\alpha - a^\alpha) + (LCL_1^t - a^t)] (\max(t - \alpha, 0)) + \frac{1}{2} [(d^z - a^z) + (c - b)] (\min(1 - t, 1 - \alpha)) \quad (\text{A-L1})$$

$$t = \frac{d - LCL_1}{(LCL_2 - LCL_1) + (d - c)} \quad \text{ve} \quad z = \max(\alpha, t)$$

$$A_{out}^L = \frac{1}{2} [(d^\alpha - a^\alpha) + (c - b)] (1 - \alpha) \quad (\text{A-L2})$$

$$A_{out}^L = [(LCL_1^\alpha - a^\alpha) + (LCL_2 - b)] (1 - \alpha) \quad (\text{A-L3})$$

$$A_{out}^L = \frac{1}{2} [(LCL_1^{z_2} - a^{z_2}) + (LCL_1^{t_1} - a^{t_1})] (\min(\max(t_1 - \alpha, 0), t_1 - t_2)) + \frac{1}{2} [(d^{z_1} - a^{z_1}) + (c - b)] (\min(1 - t, 1 - \alpha)) \quad (\text{A-L4})$$

$$t_1 = \frac{d - LCL_1}{(LCL_2 - LCL_1) + (d - c)}, \quad t_2 = \frac{a - LCL_1}{(LCL_2 - LCL_1) - (b - a)}$$

$$z_1 = \max(\alpha, t_1) \quad \text{ve} \quad z_2 = \max(\alpha, t_2)$$

$$A_{out}^L = \frac{1}{2} [(LCL_1^z - a^z) + (LCL_2 - b)] (\min(1 - t, 1 - \alpha)) \quad (\text{A-L5})$$

$$t = \frac{a - LCL_1}{(LCL_2 - LCL_1) - (b - a)} \quad \text{ve} \quad z = \max(\alpha, t)$$

$$A_{out}^L = 0 \quad (\text{A-L6})$$

$$A_{out}^L = \frac{1}{2} [(d^\alpha - a^\alpha) + (c - b)] (1 - \alpha) \quad (\text{A-L7})$$