itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt: 10, Sayı: 3, 61-70
Haziran 2011

Doğrudan ayrık tasarım ile Hamiltonian sistemlerde bozucu bastırma

Yaprak YALÇIN*, Leyla GÖREN-SÜMER, Salman KURTULAN

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bozucu bastırma problemi pratik uygulamalar için önemli bir konudur. Literatürde, H_∞ yaklaşımı hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemlerin bozucu bastırma probleminin çözümünde kullanılan tekniklerden biridir. Kapı-kontrollü Hamiltonian (PCH, port-controlled Hamiltonian) yaklaşımı ise mekanik ve elektrik alt sistemlerden oluşan karmaşık doğrusal olmayan sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için önerilmiş güçlü bir tekniktir. Ayrıca, teknolojinin gelişim yönüne koşut olarak günümüzde mühendislik uygulamalarında bilgisayarlı kontrol sistemleri tercih edildiğinden, ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemler için modelleme ve kontrol yöntemleri geliştirmek önemli olmuştur. Bu çalışmada n-serbestlik dereceli Hamiltonian sistemler için ayrık zamanlı bozucu bastırma problemi ele alınmış ve bir doğrudan ayrık tasarım yöntemi önerilmiştir. Ele alınan problemin çözümüne ilişkin koşulları verebilmek için öncelikle, verilen Hamiltonian sistemin ayrık zamanlı dinamiklerini gradyan temeli bir ayrık zamanlı modelleme yöntemi ile türetmeye olanak sağlayan uygun bir ayrık-gradyan tanımlanmıştır. Ele alınan sistemler için bozucu bastırma problemi ayrık zamanda ifade edilmiş ve bir doğrusal olmayan durum geribesleme kontrol kuralı ile çözümün varlığına ilişkin yeter koşul bir teorem ile verilmiştir. Genel doğrusal olmayan sistemler için kısmı diferansiyel bir HJI (Hamilton-Jacobi-Isaacs) eşitsizliği olan yeter koşul bu çalışmada bir cebirsel HJI eşitsizliği olarak elde edilmiştir. Önerilen doğrudan ayrık tasarım yöntemi çift sarkaç sisteminin bozucu bastırma probleminin çözümünde kullanılmış ve benzetim yoluyla başarımı sınanmıştır. Benzetim sonuçları, bu çalışmada önerilen doğrudan ayrık tasarım ile elde edilen ayrık zamanlı bozucu bastırma kontrol kuralının emulatör kontrol kuralına göre daha yüksek başarıma sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca, önerilen kontrol kuralının hesap karmaşıklığı, emulatör kontrolün karmaşıklığı ile hemen hemen aynıdır.

Anahtar Kelimeler: *Hamiltonian sistemler, Ayrık-gradyan, Bozucu bastırma.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Yaprak YALÇIN. yalciny@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 69 88.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Programında tamamlanmış olan "Hamiltonian sistemler için ayrık-zamanlı dayanıklı kontrolör tasarımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 14.06.2010 tarihinde dergiye ulaşmış, 30.06.2010 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.08.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.
Bu makaleye "Yalçın, Y., Gören Sümer, L., Kurtulan, S., (2011) 'Doğrudan ayrık tasarım ile Hamiltonian sistemlerde bozucu bastırma', İTÜ Dergisi/D Mühendislik, 10: 3, 61-70" şeklinde atıf yapabilirsiniz.

Disturbance attenuation in Hamiltonian systems via direct digital design

Extended abstract

In last decades, there are many ongoing researches on the subject of the modelling and control of complex nonlinear systems. The port-controlled Hamiltonian (PCH) approach is an important modeling and control technique which has been proposed for complex nonlinear systems, especially where electrical and mechanical sub-systems have to be considered together. Besides, the disturbance attenuation problem and the design of controllers under parametric and/or structural uncertainties are important issues in practical applications. In the literature, the H_∞ approach has been used to solve the disturbance attenuation problem and to provide robust control for nonlinear systems. While the disturbance attenuation problem characterized by means of the so-called L_2 gain of a general non-linear system is required to solve the Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) partial differential inequality, the same problem for Hamiltonian systems can be reduced to solve an algebraic HJI. For this reason, in literature, some nonlinear H_∞ control problems for Hamiltonian systems have been defined and some sufficient conditions have been presented to solve the proposed problems.

On the other hand, it is well known that nowadays computer-controlled systems using industrial processors are preferred in engineering practice because of the simplicity and flexibility of their implementation. Therefore, it has been gained more importance to develop modeling and control techniques for discrete-time nonlinear systems. In literature, there are several studies on discrete time nonlinear systems, which can be classified, roughly, in two groups. While one group deals with the concepts of the losslessness, the feedback equivalence and the global stabilization of discrete-time non-linear systems, the other group works deriving the discrete-time counterpart of the H_∞ control techniques which are developed using the exact model of the system. It should be noted that a direct discrete-time PBC (Passivity Based Control) control method by using an approximate discrete-time Hamiltonian model has been developed by Astolfi and Laila (2005,2006b), recently.

In this study, the discrete-time counterpart of disturbance attenuation problem for a class of Hamiltonian systems (n-dof mechanical systems) is investigated and a sufficient condition for the solution of the problem is given To fulfill, firstly a discrete-time equation, which corresponds to the given Hamiltonian system, is derived by a gradient based discrete-time modeling technique. For this purpose an appropriate discrete gradient definition is presented. Afterwards, using this equation, the disturbance attenuation problem characterized by the means of L_2 gain is defined and the results are presented as a theorem, which provides a sufficient condition on the existence of the solution of the proposed problem.

In order to obtain the discrete-time version of disturbance attenuation problem for the Hamiltonian systems, a term corresponding to the discrete version of the gradient term in the continuous Hamiltonian model is needed. For separable Hamiltonian systems, the discrete gradient defined in this study satisfies both of the discrete-gradient conditions given in (Gonzales, 1996), but it does not satisfy the first condition precisely, for non-separable case. The main results of this study presented as a theorem is derived under the assumption such that, there exists a discrete gradient which satisfies the discrete-gradient conditions exactly. A detailed discussion is also given for the case where the conditions are not precisely satisfied. The given discussion should be taken into account while the condition HJ1in the theorem is used for the design of discrete-time control rule, especially when slow sampling is used.

The proposed direct discrete-time design method is utilized to solve the disturbance attenuation problem of the double pendulum system and tested by simulations. The simulation results have demonstrated that the controller obtained using the method developed in this paper has better performance than the emulator controller for sampled data Hamiltonian systems. It should be noted that the computational complexity of the discrete control rule obtained in this is nearly same as the computational complexity of the emulation controller. This property might provide an important advantage especially in industrial applications.

Keywords: *Hamiltonian Systems, Discrete-gradient, Discrete-time control, H_∞-optimal control, Disturbance Attenuation.*

Giriş

Son yirmi yıldır, özellikle mekanik ve elektrik alt sistemlerden oluşan doğrusal olmayan karmaşık sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için yapılan çalışmaların yoğunlaştığı görülmektedir. Pasiflik temelli kontrol (PBC, Passivity Based Control), hem Euler-Lagrange ve hem de Kapı-kontrollü Hamiltonian (PCH, Port-Controlled Hamiltonian) sistemlerin kararlı kılınması ve konum kontrolü için geliştirilmiş güçlü bir tasarım tekniğidir (Ortega vd., 1998). PCH sistem gösterilimi ise karmaşık doğrusal olmayan, özellikle elektrik ve mekanik alt sistemlerin birlikte bulunduğu, sistemler için önerilmiş önemli kontrol modellerinden biridir. Son yıllarda, literatürde bu konuda çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu modelin tercih edilmesinin en önemli nedeni, sisteme ilişkin Hamiltonian fonksiyonun, sistem için bir Lyapunov fonksiyonu olarak kullanılabilmesi ve bu yaklaşımın kontrol kuralı tasarımında kolaylık sağlamasıdır (Van der Schaft, 2000; Ortega vd., 2002; Ortega ve Garcia-Canseco, 2004).

Mühendislik uygulamalarında, gerçekleme kolaylıkları ve esneklikleri nedeni ile endüstriyel işlemcileri kullanan bilgisayar kontrollü sistemler tercih edilmektedir. Bu durum, doğrusal olmayan ayrık zamanlı sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için yöntemler geliştirmenin önemini giderek artırmaktadır.

H_∞ yaklaşımı, hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemler için önemli kontrol mühendisliği problemlerinden olan, bozucu bastırma ve belirsizlikler altında dayanıklı kontrol kuralı tasarımı problemlerini çözmek için kullanılmaktadır. Özellikle, sürekli doğrusal olmayan sistemlerin yerel bozucu bastırma problemi ayrıntılı olarak incelenmiştir (Isidori ve Astolfi, 1992; Isidori ve Kang, 1995; Shen ve Tamura 1995; Lu vd., 2000). L_2 kazancı ile karakterize edilen bozucu bastırma probleminin çözümü genel doğrusal olmayan sistemler için Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) kısmi diferansiyel eşitsizliğinin çözümünü gerektirirken, aynı problem Hamiltonian sistemler için cebirsel HJI'ya indirgenebilmektedir. Bu nedenle bazı çalışmalarda, sürekli Hamiltonian sistemler için H_∞ kontrol problemleri tanımlanmış ve önerilen problemler için yeter koşullar verilmiştir (Xi ve Cheng, 2000; Mei vd., 2005). Ancak, literatürde, Hamiltonian sistemlerin ayrık zamanlı bir kontrol kuralı ile bozucu bastırma problemi tanımı ve buna ilişkin çözüm önerisi bulunmamaktadır.

Bu çalışmada, bir sınıf Hamiltonian sistem için bozucu bastırma probleminin ayrık zamanlı karşılığının geliştirilmesi üzerinde çalışılmış ve problemin çözümü için bir yeter koşul verilmiştir. Bu amaçla, uygun bir ayrık-gradyan kullanılarak, verilen Hamiltonian sisteme ilişkin ayrık zamanlı denklemler elde edilmiştir. Sonra, bu denklemler kullanılarak, L_2 kazancı üzerinden tanımlanan bozucu bastırma problemi ifade edilmiş ve sonuçlar problemin çözümüne ilişkin bir yeter koşul sunan bir teorem ile verilmiştir. Önerilen doğrudan ayrık zamanlı tasarım yöntemi çift sarkaç sisteminin bozucu bastırma probleminin çözümü için kullanılmış ve benzetimlere ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Doğrudan ayrık tasarım yöntemi

Bu bölümde, sürekli modeli aşağıda tanımlanmış Hamiltonian sistemler için bozucu bastırma problemi ayrık zamanda ifade edilecek ve çözümüne ilişkin yeter koşul verilecektir.
Dinamik denklemleri,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= (J - R(q,p))\nabla H(q,p) + G_1(q)\,w + G_2(q)\,u \\ y(t) &= G_1^T(q)\nabla H(q,p) \end{aligned} \tag{1}$$

biçiminde verilen Hamiltonian sistemi ele alınsın. Burada $(q,p) \in X \subset \Re^{2nx2n}$ genelleştirilmiş koordinatlar, $y, w \in \Re^{m_1}$ sırası ile bozucu girişi ve sistem çıkışı, $u \in \Re^{m_2}$ kontrol girişi, J standart ters-simetrik iç bağlantı matrisi ve $R(q,p) \in \Re^{2nx2n}$ yarı kesin pozitif simetrik bir matristir. Bu matrisler,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad R(q,p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1(q,p) \end{bmatrix}, \quad R_1(q,p) \in \Re^{nxn} \geq 0 \tag{2}$$

biçimindedir. $g_1(q) \in \Re^{nxm_1}$, $g_2(q) \in \Re^{nxm_2}$ olmak üzere, bozucu ve kontrol giriş matrisleri –kapı yapıları- ise,

$$G_1(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(q) \end{bmatrix},\; G_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(q) \end{bmatrix} \tag{3}$$

ile tanımlanır. Bu sistem genelleştirilmiş koordinatlarda tanımlanmış bozucu altında bir Kapı-kontrollü Hamiltonian sistemdir. Ayrıca, $H:\Re^{2n} \to \Re$ sistemin Hamiltonian fonksiyonu ya da sistemin enerji fonksiyonudur. $M(q) = M(q)^T > 0$ genelleştirilmiş kütle matrisi olmak üzere enerji fonksiyonu şu yapıdadır.

$$H(q,p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + P(q) \tag{4}$$

Eğer $M(q) = M \in \Re^{nxn}$ sabit matris ise sistem bir *doğrusal* (*separable*) *Hamiltonian* sistemdir ve eğer $m_2=n$ ise sistem *tam sürülmüş* (*fully-actuated*) denir. Burada sistemin *tam sürülmüş* olduğu kabul edilmiştir.

Doğrudan ayrık kontrolör tasarım yöntemi önerebilmek için sistemin ayrık modelinin varlığı gereklidir. Bu nedenle (1)'deki sürekli sistemin daha önce Yalçın ve Gören-Sümer, (2007), Gören-Sümer ve Yalçın, (2008) çalışmalarında önerilmiş olan gradyan temelli ayrık zamanlı modelleme yöntemi ile ayrık zamanlı denklemleri elde edilecektir. Bunun için, (1)'de yer alan gradyan ifadesinin ayrık karşılığının kullanılması gerekmektedir. Bu amaçla, (Gonzales ve Simo, 1996)'da verilmiş ve aşağıda alıntılanmış olan ayrık-gradyan tanımından yararlanılacaktır.

Tanım 1- $H(\mathrm{x})$, x'e göre türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))$ sürekli ise ve

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^T H(x(k), x(k+1))\left[x(k+1) - x(k)\right] \\ = H\left(x(k+1)\right) - H(x(k)) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\bar{\nabla} H(x(k), x(k)) = \nabla H(x(k)) \tag{6}$$

ilişkilerini sağlıyorsa bir ayrık-gradyandır.

Ayrıca belirtilmelidir ki, ileride bir teoremle sunulacak olan bozucu bastırma probleminin çözümü, Tanım 1'deki koşulları tam olarak sağlayan bir $\bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))$ ayrık- gradyanın varlığı kabulü altında türetilmiştir. Koşulların tam olarak sağlanmaması durumu için enerji ilişkileri üzerinden bir irdeleme de yapılacaktır.

Durum değişkenlerinin türevleri için,

$$\dot{q} = \frac{q_{k+1} - q_k}{T}, \quad \dot{p} = \frac{p_{k+1} - p_k}{T} \tag{7}$$

yaklaşıklığı yapılarak ve ayrık-gradyan $\bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))$, kullanılarak (1)'de verilen sistemin ayrık-zaman karşılığı, T örnekleme periyodu olmak üzere, aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} &= T\,(J - R(q_k, p_k))\bar{\nabla} H + T\,G_1(q_k) w \\ &\quad + T\,G_2(q_k)\, u \\ y_k &= G_1^T(q_k)\bar{\nabla} H \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde elde edilir. Sistem için bir ceza değişkeni (penalty signal),

$$z(q_k, p_k) = \begin{bmatrix} y_k \\ d_k(q_k, p_k) u_k \end{bmatrix} \tag{9}$$

şeklinde tanımlansın ve bozucu bastırma ölçütü ise,

$$\sum_{k=0}^{N} \{ y_k^T y_k + u_k^T D(q_k, p_k) u_k \} \le \gamma^2 \sum_{k=0}^{N} \left\| w_k \right\|^2 \tag{10}$$

seçilsin. Burada $d(q_k, p_k)$ tam ranklı bir matris olmak üzere $D(q_k, p_k) = d^T(q_k, p_k)\, d(q_k, p_k)$ verilmiş bir ağırlık matrisidir ve γ bozucu bastırma seviyesine karşı düşen gerçek değerli pozitif bir skalerdir. Bozucu bastırma problemi, sistem (8)'i asimptotik kararlı bırakan ve bozucu giriş w'nın, z ceza değişkeni üzerindeki etkisini, L_2 anlamında en az yapan $u_k = c(q_k, p_k)$ şeklinde bir geribesleme kontrol kuralı inşa etmek olarak tanımlanır.

(8-10) ilişkileri ile tanımlanan bozucu bastırma probleminin çözümüne ilişkin, bu çalışmada türetilen koşullar, Teorem 1'de verilmiştir.

Teorem 1- (8) ile verilen ayrık zamanlı kapı-kontrollü Hamiltonian sistemi ve (8-10) ile tanımlanan bozucu bastırma problemini ele alınsın. Aşağıdaki koşulların sağlandığı varsayılsın;

I. Sistem, y_k çıkışına göre sıfır-durum sezilebilirdir.
II. Ağırlık matrisi $d(q_k, p_k)$ tam sütün ranklıdır.
III. Denge noktası $x^* = 0$, $H(x)$'in bir (kesin) yerel minimumudur.
IV. Tanım 1'deki koşulları tam olarak sağlayan bir, $\bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))$, $x = \{q, p\} \in \Re^{2nx2n}$, ayrık-gradyan vardır.

Önceden verilmiş bir bozucu bastırma seviyesi γ için, eğer,

$$\begin{aligned}&\alpha^2\gamma^{-2}T^2 g_1(q_k)g_1^T(q) - \alpha^2 T^2 g_2(q_k)\{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k)\\&-2\alpha T R_1(q_k, p_k) + g_1(q_k)g_1^T(q_k) \le 0\end{aligned} \tag{11}$$

biçimindeki Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) eşitsizliğini sağlayan bir pozitif gerçek α sayısı var ise, giriş w'dan, çıkış **z**'ye L_2 kazancını en fazla γ yapan bir statik geribesleme kontrol kuralı vardır ve bu kontrol kuralı $u_k = c(q_k, p_k)$;

$$u_k = -\alpha T\{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k)\bar{\nabla}_p H \tag{12}$$

biçimindedir.

İspat- (11)'de verilen HJI eşitsizliğini verilen bir γ için sağlayan bir α var olsun. (8) ifadesi soldan $\bar{\nabla}^T H$ ile çarpılır ve ayrık-gradyan tanımının ilk koşulu kullanılırsa aşağıdaki ilişki elde edilir,

$$\begin{aligned}H(k+1) - H(k) &= \begin{bmatrix}\bar{\nabla}_q H\\ \bar{\nabla}_p H\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k\\ p_{k+1} - p_k\end{bmatrix}\\&= -\bar{\nabla}_p^T H\, T\, R_1(q_k, p_k)\bar{\nabla}_p H + \bar{\nabla}_p^T H\, T\, g_1(q_k)w_k\\&\quad + \bar{\nabla}_p^T H\, T\, g_2(q_k)u_k\end{aligned} \tag{13}$$

J, ters-simetrik bir matris olduğundan $\bar{\nabla}^T H\, J\, \bar{\nabla} H = 0$'dır. Kesin pozitif bir $V(k)$ fonksiyonu,

$$V(k) = \alpha H(k) \tag{14}$$

tanımlandığında, (10)'dan,

$$\begin{aligned}V(k+1) - V(k) &= -\alpha\bar{\nabla}_p^T H\, T\, R_1(q_k, p_k)\bar{\nabla}_p H\\&+\alpha\bar{\nabla}_p^T H\, T\, g_1(q_k)w_k + \alpha\bar{\nabla}_p^T H\, T\, g_2(q_k)u_k\end{aligned} \tag{15}$$

ilişkisi yazılabilir. Eşitsizlik (11)'den R_1 terimi çekildiğinde elde edilen eşitsizlik, (15) ilişkisi ile birlikte değerlendirildiğinde,

$$\begin{aligned}V(k+1) - V(k) \le &-\frac{\alpha^2\gamma^{-2}T^2}{2}\bar{\nabla}_p^T H\, g_1(q_k)g_1^T(q_k)\bar{\nabla}_p H\\&+\frac{\alpha^2 T^2}{2}\bar{\nabla}_p^T H\, g_2(q_k)\{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k)\bar{\nabla}_p H\\&-\frac{1}{2}\bar{\nabla}_p^T H\, g_1(q_k)g_1^T(q_k)\bar{\nabla}_p H + \alpha\bar{\nabla}_p^T H\, T g_1(q_k)w_k\\&+\alpha T \nabla_p^T H g_2(q_k)u_k\end{aligned} \tag{16}$$

yazılabilir ve bazı cebir işlemlerden sonra,

$$\begin{aligned}V(k+1) - V(k) \le &-\frac{1}{2}\left\|\frac{\alpha T}{\gamma} g_1^T(q_k)\bar{\nabla}_p H - \gamma w_k\right\|^2\\&+\frac{1}{2}\left\|\alpha\, T\{d_k^T d_k\}^{-\frac{1}{2}} g_2^T(q_k)\times\bar{\nabla}_p H + \{d_k^T d_k\}^{-\frac{1}{2}}u_k\right\|^2\\&+\frac{\gamma^2}{2}\|w_k\|^2 - \frac{1}{2}\{y_k^T y_k + u_k^T d_k^T d_k u_k\}\end{aligned} \tag{17}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ilişkinin sağ tarafındaki ilk terim her zaman negatiftir ve kontrol kuralı (12) ikinci terimde yerine yazıldığında bu terim sıfır olmaktadır. Sonuç olarak, bu eşitsizlikten,

$$V(k+1) - V(k) \le \frac{\gamma^2}{2}\|w_k\|^2 - \frac{1}{2}\{y_k^T y_k + u_k^T d_k^T d_k u_k\} \tag{18}$$

kayıplı olma eşitsizliği elde edilir. Burada, (9)'da verilen z_k tanımı kullanılırsa, bu eşitsizliğin,

$$V(k+1) - V(k) \le \frac{\gamma^2}{2}\|w_k\|^2 - \frac{1}{2}\|z_k\|^2 \tag{19}$$

eşitsizliğine eşdeğer olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece, (8-9) ile verilen sistem için (12) ile verilen kontrol kuralı kullanıldığında elde edilen kapalı çevrimli sistemin, belirli bir bozucu bastırma seviyesi γ ' yı, - L_2 kazancı anlamında bozucu bastırma ölçütünü - sağladığı gösterilmiş olur.

Aşağıdaki uyarı, Teorem 1'deki ayrık-gradyanın Tanım 1'de verilen koşullardan ilkini tam olarak sağlamadığı durumu irdelemek amacı ile verilmiştir.

Uyarı 1- Teorem 1'de kullanılan, $\bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))$, $x=\{q, p\} \in \Re^{2nx2n}$, ayrık-gradyanın Tanım 1 ile verilen koşulların ikincisini tam olarak sağladığı ancak birinci koşulu tam olarak sağlamadığı durum ele alınsın Bu durumda, ayrık enerji fonksiyonu sürekli sistemin enerji fonksiyonundan farklı olacaktır. Ayrık enerji fonksiyonu $\hat{H}(x_k)$ olmak üzere,

$$\bar{\nabla}^T H\left[J-R(x_k)\right]\bar{\nabla} H=-\bar{\nabla}^T H\, R(x_k)\bar{\nabla} H= =\frac{\hat{H}(x_{k+1})-\hat{H}(x_k)}{T} \qquad (20)$$

ilişkisi yazılabilir. Eğer bu enerji farkı sürekli sisteme ilişkin enerji fonksiyonu cinsinden,

$$\frac{\hat{H}(x_{k+1})-\hat{H}(x_k)}{T}=\frac{H(x_{k+1})-H(x_k)}{T}+\varepsilon(x_{k+1}, x_k) \qquad (21)$$

biçiminde ifade edilirse,

$$\bar{\nabla}^T H\left[J-\hat{R}(x_k)\right]\bar{\nabla} H=\frac{H(x_{k+1})-H(x_k)}{T} \qquad (22)$$

eşitliği sağlayan bir $\hat{R}(x_k)$ 'in var olduğu söylenebilir. Sonuç olarak, özellikle düşük örnekleme periyodu ile çalışıldığında, Teorem 1'deki HJI koşulu kullanılırken, bu irdeleme göz önünde bulundurulmalıdır. $T \rightarrow 0$ için (21) ilişkisindeki fazla terimin sıfıra gideceği açıktır- $\varepsilon(x_{k+1}, x_k) \rightarrow 0$ -.

Ayrık-gradyan

İzleyen bölümde, ayrık-gradyan ifadesi için aşağıda önerilmiş olan tanım kullanılacaktır.

Tanım 2- Sistem (1)'e ilişkin enerji fonksiyonunu,

$$H(q, p)=K(q, p)+P(q)=\frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p+P(q) \qquad (23)$$

olsun ve $P_{gr}(q)$ matrisi $\nabla P(q)=P_{gr}(q) q$ şeklinde tanımlansın. Enerji fonksiyonun aşağıdaki biçimde verilmiş olan gradyanını ele alalım.

$$\nabla H(q, p)=\begin{bmatrix} P_{gr}(q) & S(q, p) \\ 0 & M^{-1}(q) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}=Q(q, p)\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \qquad (24)$$

$$S(q, p)=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p^T \dfrac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p^T \dfrac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix} \\ \therefore \\ \begin{bmatrix} p^T \dfrac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

O halde $H(q, p)$ 'nin ayrık-gradyanı için,

$$\bar{q}_{k,k+1}=\frac{q_{k+1}+q_k}{2}, \quad \bar{p}_{k,k+1}=\frac{p_{k+1}+p_k}{2} \qquad (26)$$

ifadeleri ile,

$$\bar{\nabla} H=Q(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1})\begin{bmatrix} \bar{q}_{k,k+1} \\ \bar{p}_{k,k+1} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

tanımlaması yapılabilir.

Kolayca görülebilir ki, *doğrusal* (*seperable*) *Hamiltonian sistemler* için, yukarıda tanımlanmış olan ayrık-gradyan, Tanım 1'deki koşulların her ikisini de tam olarak sağlamakta, ancak, doğrusal olmayan (non-separable) durumda birinci koşulu tam olarak sağlamamaktadır.

İlerideki kullanım için ayrık-gradyan $\bar{\nabla} H$ ifadesinden $\bar{\nabla}_q H$ ve $\bar{\nabla}_p H$ ilişkilerini aşağıdaki gibi ayrıştırmak uygun olacaktır.

$$\bar{\nabla} H=\begin{bmatrix} P_{qr}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) & S(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \\ 0 & M^{-1}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \end{bmatrix} \times\begin{bmatrix} \bar{q}_{k,k+1} \\ \bar{p}_{k,k+1} \end{bmatrix} \qquad (28)$$

$$\bar{\nabla}_q H = \bar{\nabla}_q K + \bar{\nabla}_q P = P_{qr}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1})\bar{q}_{k,k+1} + S(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1})\bar{p}_{k,k+1} \quad (29)$$

$$\bar{\nabla}_p H = \bar{\nabla}_p K = M^{-1}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1})\bar{p}_{k,k+1} \quad (30)$$

Nedensellik sorunundan kaçınmak için birinci dereceden tutucu mekanizmasından esinlenilerek, q_{k+1} ve p_{k+1}'nin hesabında,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k + (p_k - p_{k-1}) = 2p_k - p_{k-1} \\ q_{k+1} &= q_k + (q_k - q_{k-1}) = 2q_k - q_{k-1} \end{aligned} \quad (31)$$

yaklaşıklıkları kullanılmıştır. Bu ilişkiler (26-30)' da kullanıldığında,

$$\bar{p}_{k,k+1} = \frac{3p_k - p_{k-1}}{2}, \bar{q}_{k,k+1} = \frac{3q_k - q_{k-1}}{2} \quad (32)$$

$$\bar{\nabla}_p H = M^{-1}\left(\frac{3q_k - q_{k-1}}{2}, \frac{3p_k - p_{k-1}}{2}\right)\left(\frac{3p_k - p_{k-1}}{2}\right) \quad (33)$$

elde edilir. Son ifade, gelecek bölümde verilecek örnekte kontrol kuralı (12)'nin gerçeklemesi sırasında $\bar{\nabla}_p H$ terimi için kullanılacaktır.

Tanım 2'de yapılan ayrık-gradyan tanımı kullanılarak elde edilen kontrol kuralının hesap karmaşıklığının, emulatör kontrolün hesap karmaşıklığı ile yaklaşık aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu özellik endüstriyel uygulamalarda önemli bir yarar sağlar.

Örnek ve benzetim sonuçları

Önerilen doğrudan ayrık tasarım yönteminin başarımını inceleyebilmek için kapı-kontrollü sürekli Hamiltonian modeli aşağıdaki gibi olan çift sarkaç sistemi ele alınmıştır.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J - R(q,p))\nabla H(q,p) + \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(q) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(q) \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & g_1^T(q) \end{bmatrix} \nabla H(q,p)$$

$$g_1(q) = I_2,\ g_2(q) = I_2,\ R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 I_2 \end{bmatrix}$$

Bu sisteme ilişkin Hamiltonian fonksiyonu,

$$M = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 m_2) \end{bmatrix}$$

$$P(q) = -\left[m_2 g l_2 \cos q_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1\right]$$

olmak üzere,

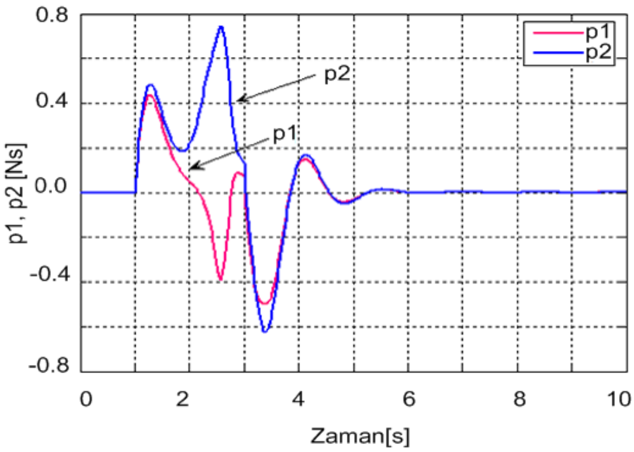
$$H(q,p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + P(q)$$

biçimindedir ve burada $m_1 = m_2 = 1kg$, $l_1 = 0.2m$, $l_2 = 0.3m$ ve $g = 0.98ms$'dır.

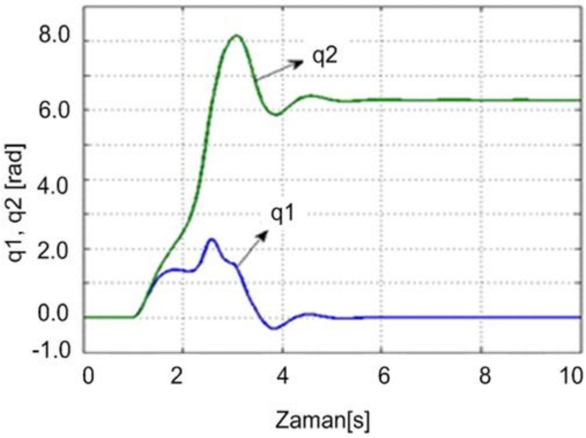
Kontrol kuralını türetebilmek için, ceza değişkenindeki (penalty signal) ağırlık katsayıları $d_k = I_2$ ve $T = 0.04$ seçilmiştir, bu koşullarda (11)'deki HJI'yi sağlayan $\alpha = 28$ olarak bulunmuştur. Son olarak kontrol kuralı $u_k = -1.12\bar{\nabla}_p H$ biçiminde elde edilmiştir.

Benzetimlerde sistem denge durumunda iken *1-3*sn aralıklarında bozucu olarak $w = 3.5N$ genlikli basamak işareti uygulanmıştır. Açık çevrimli sistemin momentum ve konum değişkenlerinin bozucu atındaki zamana göre değişimi, Şekil 1 ve Şekil 2'de verilmiştir.

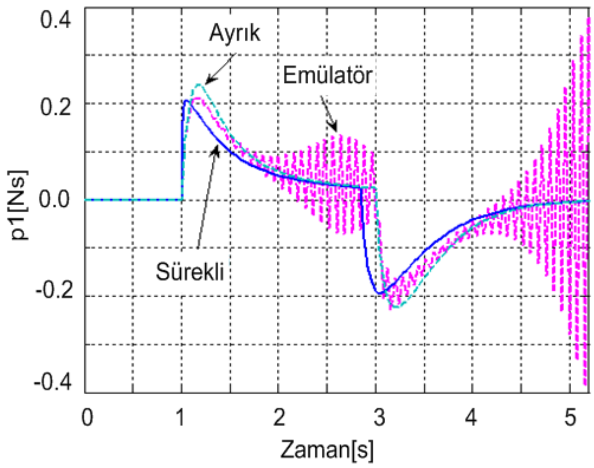
Doğrudan ayrık tasarımla elde edilen kontrol kuralı, sürekli kontrol kuralı ve emulator kontrol kuralı kullanılarak elde edilen kapalı çevrimli sistemin değişkenlerinin zamana göre değişimi, Şekil 3-Şekil 6'da topluca verilmiştir.



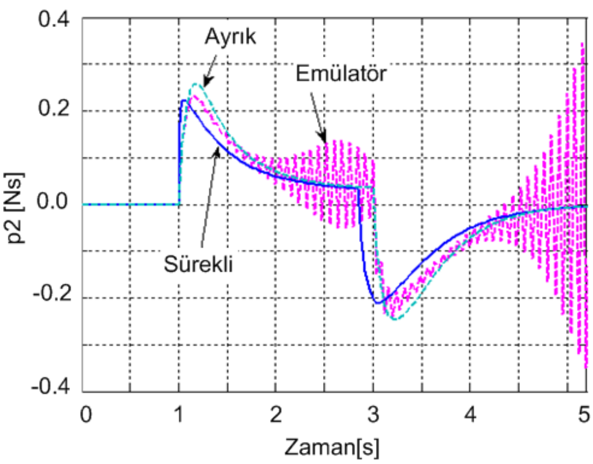
Şekil 1. Bozucunun açık çevrimli çift sarkaç sisteminin momentum değişkenlerindeki etkisi



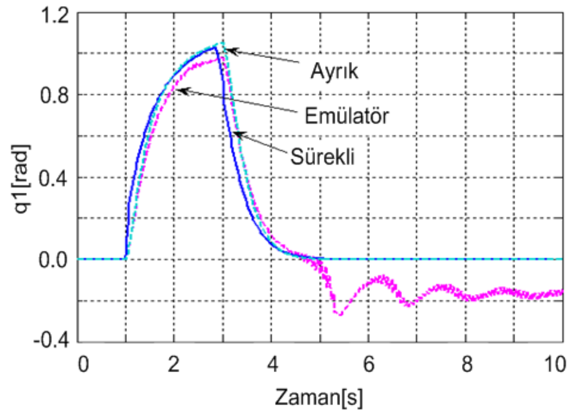
Şekil 2. Bozucunun açık çevrimli çift sarkaç sisteminin konum değişkenlerindeki etkisi



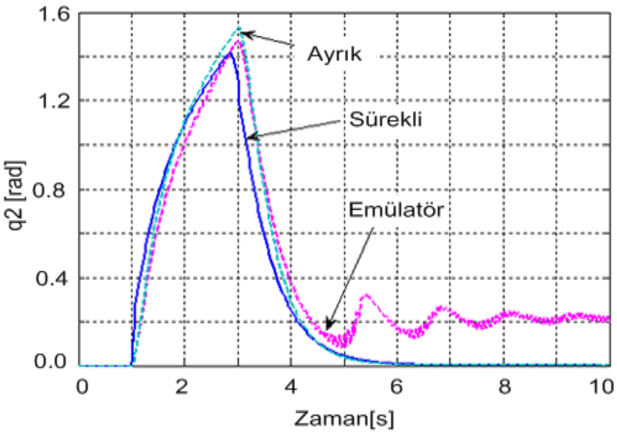
Şekil 3. Kontrol edilmiş çift sarkaç sisteminin p_1 durum değişkenin zaman göre değişimi



Şekil 4. Kontrol edilmiş çift sarkaç sisteminin p_2 durum değişkenin zamana göre değişimi



Şekil 5. Kontrol edilmiş çift sarkaç sisteminin q_1 durum değişkenin zaman göre değişimi

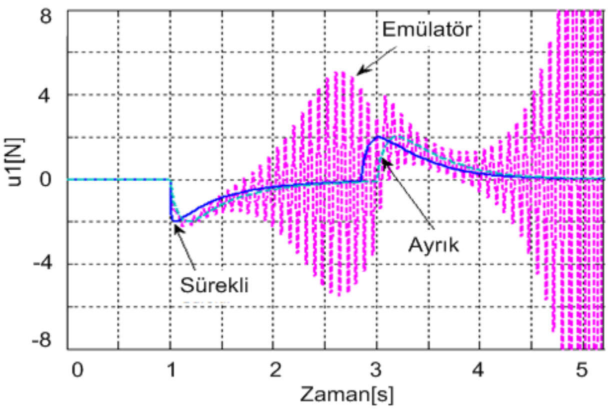


Şekil 6. Kontrol edilmiş çift sarkaç sisteminin q_2 durum değişkenin zaman göre değişimi

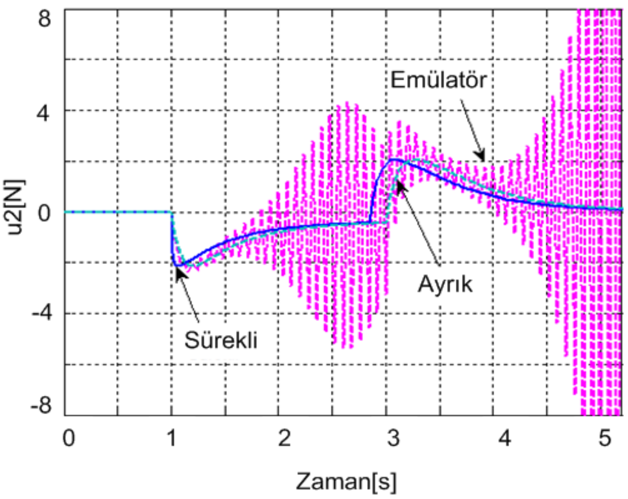
Şekil 3-6'da görüldüğü gibi bu tezde geliştirilen yöntem kullanılarak elde edilen ayrık zamanlı kontrolör, sürekli-zamanlı kontrolörle yakın bir başarıma sahip iken, seçilen örnekleme zamanında emulatör kontrolör sistemi kararsız kılmaktadır. Kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi Şekil 7 ve Şekil 8'de görülebilir.

Sonuçlar

n-serbestik dereceli mekanik sistemler için bozucu bastırma problemi ele alınmıştır. Problemin ayrık zamanlı statik durum geribesleme kontrol kuralı kullanıldığında çözümünün varlığına ilişkin yeter koşul verilmiştir. Kontrol kuralı çift sarkaç sistemine uygulanarak benzetim yoluyla başarımı sınanmıştır. Benzetim sonuçları, bu çalışmada önerilen doğrudan ayrık tasarım ile elde edilen ayrık zamanlı bozucu bastırma kontrol kuralının emulatör kontrol kuralına göre daha yüksek başarıma sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca önerilen kontrol kuralının hesap karmaşıklığı, emulatör kontrolün karmaşıklığı ile hemen hemen aynıdır. Bu özellik önerilen yöntemin endüstriyel uygulamalarda kullanımı açısından önemlidir.



Şekil 7. Kontrol girişi u_1'in zaman göre değişimi



Şekil 8. Kontrol girişi u_2'nin zaman göre değişimi

Kaynaklar

Byrnes, C.I. ve Lin, W., (1994). Losslessness, feedback equivalence, and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems, *IEEE Trans. Automatic and Control*, **39**, 1, 83–98.

Gonzalez, O. ve Simo, J.C., (1996). On the stability of symplectic and energy-momentum algorithms for non-linear Hamiltonian systems with symmetry, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **134**, 3-4, 197-222.

Göknar, I. C. ve Sengör, N. S., (1998). Discrete-time version of Kalman-Yacubovitch-Popov Lemma for Nonlinear Systems, *Proc. ICECS*, Lisbon, Portugal, 1054-1056.

Gören-Sümer, L., ve Yalçın, Y., (2008). Gradient Based Discrete-Time Modeling and Control of Hamiltonian Systems, *17th IFAC World Congress*, Korea, Seoul.

Isidori, A. ve Astolfi, A., (1992). Disturnabce Attenuation and H_∞-Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **37**, 9, 1283-1293.

Isidori, A. ve Kang, W., (1995). H_∞-Control via Measurement Feedback for General Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**, 3, 466-472.

Laila, D. S. ve Astolfi, A., (2005). Discrete-time IDA-PBC design for separable Hamiltonian systems, *Proc. 16th IFAC World Congress*, Prague.

Laila, D. S. ve Astolfi, A., (2006a). Direct Discrete-time Design for Sampled-data Hamiltonian Control Systems, *3rd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, Nogoya.

Laila, D. S. ve Astolfi, A., (2006b). Discrete-time IDA-PBC design for separable Hamiltonian systems, *American Control Conference*.

Lin, W. ve Byrnes, C.I., (1995). Discrete-time Nonlinear H_∞ Control wih Measurement Feedback, *Automatica*, **31**, 3, 419-434.

Lin, W. ve Byrnes, C.I., (1996). H_∞ Control of Discrete Time nonlinear Ssytems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**, 4, 494-510.

Lu, G., Y. Zheng, ve Ho, D.W.C., (2000). Nonlinear robust H_∞-Control via Dynamic Output Feedback, *Systems & Control Letters*, **39**, 193-202.

McLachlan, I. R., Quispel, G. R. W. ve Robidoux, N., (1998). Unified Aprproach to Hamilto ian Systems, Poisson Systems, Gradient Systems, and Systems with Lyapunov Functions or First Integrals, P*hysical Review Letters*, **81**, 32, 2399-2403.

Mei ,S., Shen, T., Hu, W., Lu, Q. ve Sun, L., (2005). Robust H_∞-Control of a Hamiltonian system with uncertainty and its application to a multi-machine power system, *IEE proc.-Control Theory Appl.*, **152,** 2, 202-210.

Navarro-López, E.M., (2002a). Dissipativity and Passivity-Related Properties in Nonlinear Discrete-Time Systems, *Ph.D. Thesis*, Institute of Industrial and Control Engineering.

Navarro-López, E.M., Sira-Ramírez H. ve Fossas-Colet, E., (2002b). Dissipativity and feedback dissipativity properties of general nonlinear discrete-time systems, *European Journal of Control*, **8**, 3, 265–274.

Nesic, D. ve Teel, A.R., (2004). A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, 7, 1103-1122.

Ortega, R., van der Schaft, A.J., Maschke, B., ve Escobar, G., (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems, *Automatica*, **38**, 585-596.

Ortega, R. ve Garcia-Canseco, E., (2004). Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control, *European Journal of Control*, **10**, 5, 432-450.

Sengör, N.S., (1995). Energy related concepts in nonlinear systems, *Ph.D. Thesis,* Istanbul Technical University, Institute of Science and Technology.

Shen, T. ve Tamura, K., (1995). Robust H_∞ Control Of Uncertain Nonlinear System via State feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, 4, 766-768.

Xi, Z., ve Cheng, D., (2000). Passivity-Based Stabilization and H_∞ Control of the Hamiltonian Control Systems with Dissipation and Its Applications to Power Systems, *International Journal of Control*, **73**,18, 1686-1691.

Van der Schaft, A.J., (2000). *L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer, London.

Yalçın, Y. ve Gören-Sümer, L., (2007). Hamiltonian Sistemlerin Ayrık-zamanlı Modellenmesi için Bir Yöntem, *TOK 07.*