

Sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubukların titreşimlerinin incelenmesi

Öznur ÖZDEMİRCİ YİĞİT*, Ekrem TÜFEKÇİ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Eğri eksenli çubuk titreşimlerine ait genel denklemler, altı adet birinci dereceden lineer diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Denklemler aksenal uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içermektedir. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, çubuk eksen eğriliğinin ve kesitin eksen boyunca değişimi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözüm elde edilebilmektedir. Elde edilen birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğu ifade eder. Sabit eğrilik yarıçapı ve sabit kesit alanına sahip çubuk için bilinen kesin çözüm yöntemi, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşim problemlerinin çözümü için de uygulanabilir. Sürekli değişken kesitli, simetrik ve asimetrik geometriye sahip çubuklar, sabit kesit alanına sahip elemanlara ayrılarak çözüm yapılır. Eleman sayısı arttıkça doğru sonuca olan yakınsama da artmaktadır. Böylece aksenal uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal etmeden yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir. Bu çözüm, çubuk eksen eğrisi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belli olan herhangi bir çubuğun titreşimlerini incelemede uygulanabilecek genel bir çözümdür. Sürekli değişken kesite sahip çember, parabol ve spiral eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, çember eksenli sabit kesitli çubukların serbest titreşimlerini ifade eden denklemlerin kesin çözümü yardımıyla incelenmektedir. Literatürde verilen örnekler çözülmüş ve elde edilen sonuçlar tablolarla verilerek karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların, literatürdekilerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Eğri eksenli çubuk, sürekli değişken kesit, düzlem içi titreşim.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Öznur ÖZDEMİRCİ YİĞİT. oznur.ozdemirci@gmail.com; Tel: (262) 676 29 19.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "Eğri eksenli değişken kesitli çubukların statik ve dinamik problemleri " adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 10.12.2009 tarihinde dergiye ulaştı, 28.01.2010 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.08.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Bu makaleye "Yiğit, Ö. Ö., Tüfekçi, E., (2011) 'Sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubukların titreşimlerinin incelenmesi', İTÜ Dergisi/D Mühendislik, 10: 2, 129-138" şeklinde atıf yapabilirsiniz.

Investigation of vibrations of circular arches with varying cross-sections

Extended abstract

Arch elements are the most simple and the most commonly used structures due to their important applications in many industrial fields. In spite of the fact that considerable amount of attention has been devoted to the analysis of such elements in recent years, there is very limited number of studies available in the literature on the dynamic behavior of arches of continuously varying curvature and cross-sections. Most of works have been done within the scope of Bernoulli-Euler beam theory. This theory is recognized as adequate for common engineering problems. However, Timoshenko beam theory, which takes into account the rotatory inertia and the shear effects, gives a better approximation to the actual beam behavior for the arches having large cross-sectional dimensions in comparison with their span length and for arches in which higher modes of vibration are required. The most important effect on predicting the frequencies of the vibrations of an arch is the axial deformation effect. Only a few works have taken into account the foregoing effects. Almost all of them use the numerical methods and give approximate results.

Gutierrez et al. (1989) studied the in-plane vibration of non-circular arches by using polynomial functions and the Ritz method. The classical arch theory was employed. Auciello and Rosa (1994) applied the Euler-Bernoulli beam theory to investigate free dynamics of circular beams. The cross-section variations and different boundary conditions were considered. Liu and Wu (2001) applied the generalized differential quadrature rule based on Kirchhoff assumptions to solve in-plane free vibrations of circular arches with uniform, continuously varying and stepped cross-sections. Karami and Malekzadeh (2004) applied the differential quadrature method to solve free vibrations of circular arches with variable cross-sections by taking into account the effects of axial extension and rotatory inertia.

The governing equations of vibrations of arches are six simultaneous linear differential equations of the first order. However, it is more difficult to find general closed form solutions for the dynamic response of arches with arbitrarily varying cross-sections, since the governing equations of such arches possess variable coefficients. When the axial

extension, shear deformation and rotatory inertia effects are taken into account, the governing equations of motion become very complicated. Because of this complexity, most of the researchers calculated the natural frequencies of vibrations of arches, based on the classical theory in which the foregoing effects are neglected. The exact solution of the governing differential equations exists only for a circular arch of uniform cross-section. The equations of motion, which take into account axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects, have been solved exactly by Tufekci and Arpaci (1998). The same procedure can be used to obtain the solution for the arch with continuously varying curvature and cross-section. The boundary conditions may be arbitrary.

In this study, the exact solution for in-plane free vibration of circular arches with continuously varying curvature and cross-section is presented. As an approximation, such an arch is divided into a number of stepped arches with constant curvature and cross-sections. The cross-section of each element is determined by averaging the dimensions of upper and lower bounds. The exact solution of free vibrations for each stepped arch can be obtained by using initial value method. Then overall solution can be expressed in terms of the initial values by satisfying the boundary conditions and the kinetic and kinematic continuity conditions between adjacent arch elements. For a non-trivial solution, the determinant of the matrix of coefficients must be zero. The solutions are also performed for the classical arch theory, which neglects all the aforementioned effects, and for the theory, which takes into account only each effect in order to emphasize their importance. As the number of the stepped arches increase, the fast convergence to the frequencies of the original arch is observed. Five different boundary conditions are also studied for different opening angles.

The examples in the literature solved and the results of several methods, such as the finite element, the Rayleigh-Ritz, the cell discretization and differential quadrature methods are compared with the results of this study. Solutions of circular, spiral and parabolic beams are studied in symmetric and asymmetric geometry. The agreement among all these examples is generally good, even if there are some theoretical discrepancies to be pointed out.

Keywords: Curved beam, continuously varying cross-section, free in-plane vibration.

Giriş

Eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışını inceleyen pek çok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğu eğrilik yarıçapı ve kesit alanı sabit çubukları ele almaktadır. Değişken kesitli ve değişken eğriliğe sahip çubuklar oldukça az çalışmaya konu olmuştur.

Elastisite teorisi kullanılarak yapılan araştırmalarda, problemi basitleştirmek için çubuk eksenli, çubuk kesiti ve çubuğa etkiyen dış kuvvetlerle ilgili varsayımlar ve kabuller yapılmaktadır. Böylece, sadece bazı özel hallerde uygulanabilecek çözümler elde edilmektedir. Çubuğun eğri eksenli olarak seçildiği, dinamik problemlerin büyük bir kısmında bu tür basitleştirmeler görmek mümkündür. Çalışmalarda genellikle eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmayan Euler-Bernoulli çubuk teorisinin esas alındığı görülür. Böylece, eşitlikler daha basit hale dönüşmekte, ancak, elastisite teorisinin sonuçlarından ve gerçek çubuk davranışından uzaklaşmaktadır. Bunun yanı sıra, literatürdeki çalışmalarda, teorisinin getirdiği denklemlerin çözümünde Ritz, Galerkin ve sonlu eleman gibi yaklaşık yöntemler kullanılarak sonuca ulaşılmıştır. Özellikle, sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, yaygınlaşan sonlu eleman yöntemi, çalışmaların büyük bölümünde uygulama alanı bulmuştur. Sadece basit problemler söz konusu olduğunda kesin çözüme başvurulmuştur.

Gutierrez ve diğerlerine (1989) ait olan çalışmada, kesiti kademeli ve sürekli değişen, farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların titreşimleri, polinom fonksiyonlar seçilerek Ritz yöntemiyle incelenmektedir. Çalışmada, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir. Auciello ve Rosa (1994), çember eksenli çubukların titreşimlerini Euler-Bernoulli teorisi yardımıyla incelemekte, sonuçları diğer yöntemlerinkine karşılaştırmaktadır. Çalışmada, kademeli ve sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar incelenmektedir. Liu ve Wu (2001), çember eksenli çubukların düzlemsel titreşimlerini, genelleştirilmiş dife-

ransiyel kuadratür yöntemiyle (generalized differential quadrature rule) incelemekte, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmektedir. Sabit kesitli, sürekli değişken ve kademeli değişken kesitli çubukların titreşimlerini inceleyerek literatürdeki diğer yöntemlerin sonuçlarıyla karşılaştırmıştır. Karami ve Malekzadeh (2004) de aynı geometrilerin titreşimini, diferansiyel kuadratür yöntemini (differential quadrature rule) kullanarak incelemiş, sonuçları Liu ve Wu (2001)'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Eğri eksenli çubuk statığının ve dinamiğinin genel denklemleri altı denklemden oluşan bir lineer denklem takımındadır. Denklemler, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içermektedir. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, çubuk eksen eğriliğinin ve kesitin eksen boyunca değişimi, mesnetleme şartları ve yükleme durumu belirli olan her çubuğa uygulanabilecek genel bir çözüm elde edilebilir. Elde edilen birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, sadece katsayıların sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğu ifade etmektedir. Herhangi bir basitleştirici varsayım yapılmadan, birinci dereceden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem takımının kesin çözümü verilir. Elde edilen bu çözüm yöntemi, dinamik davranışların çözümünde uygulanacak başka yöntemlerin oluşturulmasına olanak verir. Çözüm yöntemi Tufekci ve Arpacı (1998)'da ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

Aynı çözüm yöntemi, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşim problemlerinin çözümü için de uygulanabilmektedir. Çubuk, sabit kesit alanlarına sahip bölgelere ayrılarak her bölge, eğri eksenli çubuğun düzlemindeki titreşimlerini veren ifadeler ve çözüm yolu kullanılarak incelenebilir. Değişken eğrilik yarıçapına sahip olan çubuklarda, eğrilik yarıçapları, bölgenin sahip olduğu ortalama yarıçap alınarak belirlenir, başlangıç değerleri yöntemi kullanılır ve sonuca ulaşılır. Sabit eğrilikli ve kesitli her eleman için kesin çözüm yöntemi uygulanabilir.

Çubuğun sınır şartları ve elemanların sınır noktalarında, kinetik ve kinematik şartlar sağlanmaktadır. Eleman sayısı arttıkça doğru sonuca olan yakınsama da artmaktadır.

Sonuçlar, ankastre-ankastre, ankastre-sabit, sabit-sabit, serbest-serbest ve ankastre-serbest olarak beş farklı sınır koşulu için elde edilmekte, literatürde yapılan benzer sayısal örneklerle karşılaştırmalar yapılmaktadır. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil eden ve etmeyen çözümler ayrı ayrı yapılmış, bunların sonuçlar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Analiz

Eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerine ait denklemler, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Tüfekçi ve Arpacı (1998)'da verilen bu denklemler;

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R}{EA} F_t \\
 \frac{du}{d\phi} &= -w + \frac{RF_n}{GA/k_n} + R\Omega_b \\
 \frac{d\Omega_b}{d\phi} &= \frac{R}{EI_b} M_b \\
 \frac{dM_b}{d\phi} &= -RF_n - R\mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_b \\
 \frac{dF_t}{d\phi} &= F_n - R\mu \omega^2 w \\
 \frac{dF_n}{d\phi} &= -F_t - R\mu \omega^2 u
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

şeklinindedir. Burada; u ve w normal ve teğetsel yerdeğiştirmeler; ϕ kiriş açıklığı, Ω_b binormal eksen üzerindeki dönme açısı, R şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı; F_n ve F_b normal ve teğetsel tekil iç kuvvetler; M_b binormal eksen üzerindeki tekil iç moment şeklinde tanımlanabilir.

Denklem 1'den faydalanarak, "i" indisi çubuğun bölündüğü sabit kesit alanına sahip eleman numarasını göstermek üzere denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{d\phi_i} = \mathbf{A} \mathbf{y}_i(\phi_i)
 \tag{2}$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{y}(\phi)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ifade etmek üzere, her eleman için,

$$\mathbf{y}_i(\phi) = \begin{bmatrix} w_i \\ u_i \\ \Omega_{b_i} \\ M_{b_i} \\ F_{t_i} \\ F_{n_i} \end{bmatrix}
 \tag{3}$$

şeklinde tanımlanabilir.

$\mathbf{A}(\phi)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisidir. Elde edilen \mathbf{A}_i katsayılar matrisi, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin gözönüne alınması durumunda kullanılan matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapıлып, doğal frekansları elde edilebilir (Tüfekçi ve Arpacı, 1998). $\mathbf{A}(\phi)$ matrisinin elemanları Denklem 4'deki şekilde tanımlanır.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R_i / EA_i & 0 \\ -1 & 0 & R_i & 0 & 0 & R_i k_n / GA_i \\ 0 & 0 & 0 & R_i / EI_{b_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_i \mu_i (I_{b_i} / A_i) \omega^2 & 0 & 0 & -R_i \\ -R_i \mu_i \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R_i \mu_i \omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{4}$$

A katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda, denklem takımının kesin çözümü;

$$\mathbf{y}_i(\phi_i) = e^{\mathbf{A}_i\phi_i} \mathbf{y}_i(\phi_{0i})$$

$$\mathbf{y}_i(\phi) = \mathbf{Y}(\phi, \phi_i) \mathbf{y}_{i0} \quad (5)$$

olarak elde edilir. $\phi_{0i}=0$ olarak belirlenen düşey doğrultu, sabit kesitli her kiriş elemanı için referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada, $\mathbf{y}_i(\phi_{i0})$, $\phi_i = \phi_{i0}$ koordinatındaki bilinen başlangıç değerleri vektörüdür. $e^{\mathbf{A}_i\phi_i}$ matematiksel olarak ifade edilebilmektedir (Tüfekçi ve Arpacı, 1998). $6 \times n$ bilinmeyen, çubuğun sınır şartları, sabit kesitli her kiriş elemanının iki ucu için yazılan geçiş şartları yardımıyla elde edilir.

Sınır şartları ve elemanlar arasındaki geçiş şartlarından elde edilen $6 \times n$ denklem homojen denklem takımı oluşturduğundan, sistemin sıfırdan farklı tek bir çözümünün olması katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur.

Kiriş eleman için kiriş açısı aşağıdaki şekilde ifade edilir. i . kiriş eleman için;

$$\phi_{i-1} \leq \phi \leq \phi_i$$

Sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

Sabit mesnet:

$$w_i(\phi) = 0 \quad , \quad u_i(\phi) = 0 \quad , \quad M_{b_i}(\phi) = 0$$

Ankastre mesnet:

$$w_i(\phi) = 0 \quad , \quad u_i(\phi) = 0 \quad , \quad \Omega_{b_i}(\phi) = 0$$

Serbest uç:

$$M_{b_i}(\phi) = 0 \quad , \quad F_{t_i}(\phi) = 0 \quad , \quad F_{n_i}(\phi) = 0$$

İki uç nokta için sınır koşullarından gelen 6 adet eşitlik mevcuttur.

Kiriş elemanların sınır bölgelerinde süreklilik koşullarını sağlayan ifadeler aşağıda verilmektedir. Bu ifadeye göre, komşu çubuk elemanların sınır noktalarındaki büyüklükler birbirlerine eşit olmak zorundadır.

$$\mathbf{y}_i(-\phi_i) = \mathbf{y}_{i+1}(-\phi_i)$$

$$e^{-\mathbf{A}_i\phi_i} \mathbf{y}_i(\phi_{0i}) = e^{-\mathbf{A}_{i+1}\phi_i} \mathbf{y}_{i+1}(\phi_{0(i+1)}) \quad (6)$$

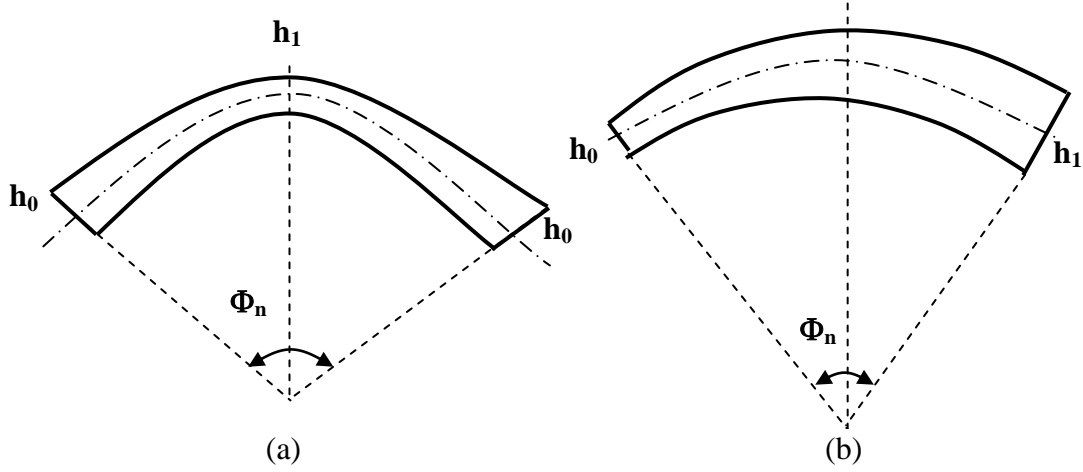
Komşu elemanlara ait asal matrisler arasında aşağıdaki ilişki bulunmaktadır.

$$\mathbf{Y}(\phi_{i+1}, \phi_i) = \mathbf{Y}(\phi_{i+1}, 0) \mathbf{Y}^{-1}(\phi_i, 0) \quad (7)$$

$\mathbf{Y}(\phi, 0)$ değeri hesaplanabilir. Eğri eksenli bir çubuk n adet elemana ayrılıp, Denklem 5 her eleman için uygulanırsa, her elemana ait n adet çözüm elde edilir. Böylece, sınır ve süreklilik şartlarından gelen $6 \times n$ adet eşitlik, matris formunda ifade edilir.

Denklem 8'de, **X1** ve **Xn**, 3×6 boyutunda eğri eksenli çubuğun A ve B ucundaki sınır şartlarından elde edilen matris; **01**, 3×6 boyutunda ve **02**, 6×6 boyutunda sıfır matrisleridir. $\mathbf{y}_{0i} = \mathbf{y}_i(\phi_{0i})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen $6 \times n$ eşitlik, homojen denklem takımı oluşturduklarından, \mathbf{y}_{0i} 'nin sıfırdan farklı çözümleri ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω ile simgelenen doğal frekansa bağlı bir ifadedir. Böylece doğal frekanslar elde edilir. Aynı çözüm yolu diğer kabuller için de uygulanabilir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X1} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \dots & \mathbf{01} & \mathbf{01} \\ e^{\mathbf{A}_1\phi_1} & -e^{\mathbf{A}_2\phi_1} & \mathbf{02} & \dots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\ \mathbf{02} & e^{\mathbf{A}_2\phi_2} & -e^{\mathbf{A}_3\phi_2} & \dots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{02} & \mathbf{02} & \mathbf{02} & \dots & e^{\mathbf{A}_{n-1}\phi_{n-1}} & -e^{\mathbf{A}_n\phi_{n-1}} \\ \mathbf{01} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \dots & \mathbf{01} & \mathbf{Xn} \end{bmatrix}_{6n \times 6n} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{01} \\ \mathbf{y}_{02} \\ \mathbf{y}_{03} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{0(n-1)} \\ \mathbf{y}_{0n} \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]_{6n \times 1} \quad (8)$$



Şekil 1. Lineer değişken kesitli çubuklar (a) simetrik, (b) asimetrik

Sayısal örnekler ve sonuçlar

Yukarıda verilen çözüm yöntemi uygun olarak, Şekil 1 (a)'da gösterilen lineer değişken kesitli simetrik çubuk, referans geometri olarak ele alınmış ve bu çubuğa ait boyutsuz frekans,

$$c = \omega R^2 \sqrt{\frac{\mu}{EI_b}} \quad (9)$$

değerlerinin değişimi incelenmiştir. Simetrik ve asimetrik olarak iki farklı geometriye sahip sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar (Şekil 1) incelenmektedir. Kesit alanı dikdörtgen olup, kesit genişliği eğri boyunca sabittir. Kesit yüksekliği aşağıda verilen ifadelerle bağlı olarak değişir.

Şekil 1 (a) için;

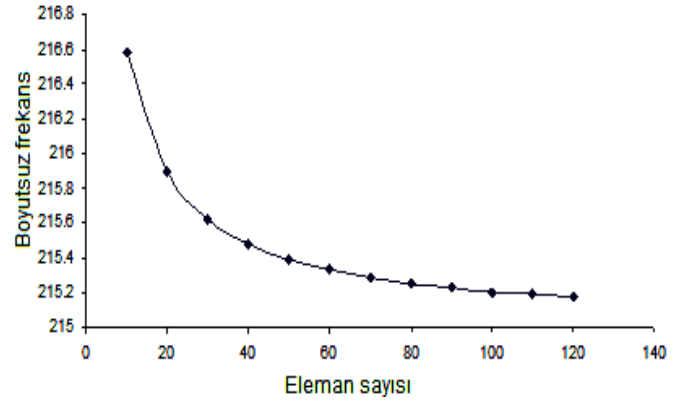
$$\begin{aligned} h(\phi) &= h_o(1 - 2\eta\phi/\phi_n), & -\phi_n/2 \leq \phi \leq 0, \\ h(\phi) &= h_o(1 + 2\eta\phi/\phi_n), & 0 \leq \phi \leq \phi_n/2 \end{aligned} \quad (10)$$

Şekil 1 (b) için;

$$h(\phi) = h_o(1 + 2\eta\phi/\phi_n), \quad -\phi_n/2 \leq \phi \leq \phi_n/2 \quad (11)$$

Kiriş açısı $\phi_n=30^\circ$ ve $\eta=0.1$ olan geometriye ait, ankastre-ankastre sınır şartında, farklı eleman sayılarında, çubuğun ilk doğal frekans

değerleri elde edilmiştir. İncelenen geometriye ait Şekil 2'de verilen grafikte, yatay eksen, sabit kesitli kiriş elemanlarının sayısını, dikey eksen frekans değerini göstermektedir.



Şekil 2. Ankastre-ankastre simetrik çubuğun birinci boyutsuz doğal frekans değerinin eleman sayısı ile değişimi

Çubuklar, Şekil 3'de gösterildiği gibi sabit kesitli kiriş elemanlara bölünmüştür. Her kiriş elemana ait eğrilik yarıçapı ve kesit değerleri, o elemanın sahip olduğu en büyük ve en küçük değerlerin ortalaması alınarak hesaplara dahil edilmiştir. Bu yöntemle, doğal frekansları hesaplanan çubuklar, ankastre-ankastre, sabit-sabit, sabit-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olarak beş farklı sınır şartı gözönünde bulundurulmuş ve incelenmişlerdir.

Simetrik ve asimetrik değişken kesitli eğri eksenli çubuklar için literatürde yapılan çalışmalarda örnekler benzer olarak çember, spiral ve parabol



Şekil 3. Sabit kesitli kiriş elemanı ile modellenen asimetric çubuk

eksenli çubuklar üzerinde çalışılmış, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalarda çubuklar 70 elemana bölünerek incelenmiştir. Analiz $\eta=0.1$ değerleri için, $\phi_n = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ ve 40° olmak üzere dört farklı kiriş açısında ve beş farklı sınır koşulunda gerçekleştirilmiştir.

Yapılan çalışmalarda, dikdörtgen kesitli çubuklar gözönüne alınmaktadır. Şekil 1(a)'da gösterilen simetrik sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubukta, h_0 ve h_1 sırasıyla çubuğa ait en büyük ve en küçük yükseklik değerlerini gösterirken, Şekil 1(b)'de gösterilen asimetric sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubukta, h_0 ve h_1 çubuğun iki uç nok-

tasına ait, en küçük ve en büyük yükseklik değerlerini vermektedir. Kesit genişliği b sabittir ve eksen boyunca değişmez. i 'nci elemana ait olan kesit alanı ve binormal eksene göre alan eylemsizlik momentleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_i = bh_i \quad I_{bi} = bh_i^3 / 12 \quad (12)$$

Simetrik ve asimetric çember eksenli çubuğa ait sonuçlar, ankastre-ankastre (AA), sabit-sabit (SS), sabit-ankastre (SA), ankastre-serbest (ASr), serbest-serbest (SrSr) sınır şartları için. Tablo 1'de verilmektedir. Kolon (1) aksenal uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içeren; (2), tüm bu etkileri ihmal eden; (3), sadece kayma deformasyonu etkisini içeren; (4), sadece dönme eylemsizliği etkisini içeren; (5) ise sadece aksenal uzama etkisini içeren çözümün sonuçlarını vermektedir.

Auciello ve Rosa (1994) değişken kesitli çember eksenli simetrik çubukların titreşimlerini Rayleigh-Ritz (RR) ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemleri yardımıyla incelemiştir. Geometri, Denklem 10'da verilen eşitlik

Tablo 1. Simetrik sürekli değişken kesitli çubuğun doğal frekansları ($c=\omega R^2(\mu/EI_b)^{1/2}$)

Açı	Simetrik çember eksenli çubuk					Asimetric çember eksenli çubuk					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
AA	10	431.10	2237.55	887.33	1693.54	812.81	443.09	2493.40	903.37	1793.89	897.51
	20	162.94	557.23	361.30	512.20	206.64	172.83	620.95	376.88	560.07	229.43
	30	89.21	246.08	193.64	236.77	98.70	95.22	274.22	206.31	261.45	108.10
	40	62.26	137.19	118.23	134.27	64.93	65.67	152.88	127.75	148.84	69.45
SS	10	285.57	1431.60	828.99	1119.47	360.79	302.77	1595.96	857.03	1189.34	400.37
	20	94.00	355.84	290.98	330.82	99.99	100.71	396.69	312.01	362.50	108.92
	30	58.66	156.64	141.81	151.54	59.84	61.13	174.62	154.71	167.55	62.76
	40	49.51	86.94	82.01	85.36	49.93	50.42	96.92	90.22	94.71	50.99
SA	10	363.85	1822.21	858.94	1403.78	576.24	385.23	2051.10	880.47	1511.44	658.99
	20	128.95	453.48	327.33	419.40	149.59	140.77	510.48	346.34	464.50	169.56
	30	72.58	200.02	168.24	193.02	76.56	78.49	225.20	182.10	215.63	84.35
	40	54.49	111.33	100.24	109.14	55.56	57.43	125.37	109.98	122.36	59.03
ASr	10	100.37	112.80	102.96	108.79	112.79	97.14	110.21	100.25	105.37	110.21
	20	27.34	28.25	27.58	27.99	28.25	26.64	27.61	26.92	27.29	27.61
	30	12.41	12.60	12.46	12.54	12.60	12.11	12.31	12.17	12.25	12.31
	40	7.06	7.12	7.07	7.10	7.12	6.89	6.96	6.91	6.93	6.96
SrSr	10	548.00	813.59	638.04	605.58	809.67	577.59	912.59	682.58	643.79	887.95
	20	175.60	202.72	188.59	185.15	202.48	191.23	227.40	207.99	203.36	227.05
	30	83.46	89.61	86.67	85.94	89.52	92.12	100.53	96.43	95.42	100.40
	40	47.99	50.03	49.09	48.87	49.99	53.30	56.13	54.81	54.50	56.07

gözönüne alınarak oluşturulmuştur. Tablo 2’de, ankastre-ankastre ve sabit-sabit sınır koşullarına sahip simetrik değişken kesitli çubuk için, iki yönteme de ait sonuçlara yer verilmektedir. Mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri (Tablo 2, kolon (2)) ile literatürdeki sonuçlar oldukça yakındır.

Tablo 2. Simetrik kiriş için elde edilen boyutsuz frekans değerleri ($c=\omega R^2(\omega EI_b)^{1/2}$)

		$h(\phi) = h_o(1 - 2\eta\phi / \phi_n) \quad -\phi_n / 2 \leq \phi \leq 0,$ $h(\phi) = h_o(1 + 2\eta\phi / \phi_n) \quad 0 \leq \phi \leq \phi_n / 2$			
		Bu çalışma		Auciello, Rosa (1994)	
Açı		(1)	(2)	R-R	CDM
AA	10	431.10	2237.55	2034.00	2138.30
	20	162.94	557.23	506.54	532.59
	30	89.21	246.08	223.70	235.26
	40	62.26	137.19	124.73	131.20
SS	10	285.57	1431.60	1299.00	1354.40
	20	94.00	355.84	322.86	336.70
	30	58.66	156.64	142.15	148.25
	40	49.51	86.94	78.89	82.31

Liu ve Wu (2001) ve Karami ve Malekzadeh (2004), simetrik geometriye sahip çubukların ilk doğal frekans değerlerini genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini (generalized quadrature method-DQM) kullanılarak elde etmiştir. $\eta=0.1$ için elde edilen frekans değerleri, Tablo 3’de bu çalışmadaki sonuçlarla karşılaştırmalı olarak verilmektedir.

Asimetrik değişken kesitli çubuk (Şekil 1-b) için de benzer hesaplamalar yapılmış, sonuçlar literatürde yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Auciello ve Rosa (1994), değişken kesitli çember eksenli asimetrik çubukların titreşimlerini de simetrik geometriye benzer şekilde, Rayleigh-Ritz (R-R) ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization method-CDM) yöntemleri yardımıyla incelemiştir. Tablo 4’de, ankastre-ankastre ve sabit-sabit sınır koşullarına sahip asimetrik değişken kesitli çubuk için, iki yönteme de ait sonuçlara yer verilmektedir

Liu ve Wu (2001) ve Karami ve Malekzadeh (2004) asimetrik geometriye sahip, değişken kesitli çubukların ilk doğal frekans değerlerini

genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (generalized quadrature method-DQM) kullanılarak elde etmiştir. Ankastre-ankastre, sabit-sabit ve ankastre-serbest sınır koşullarında farklı kiriş açılarında hesaplamalar yapılmıştır. Mevcut çalışmadaki etkilerin ihmal edilmesi durumunda elde edilen frekans değerleri ile referans çalışmalarda elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

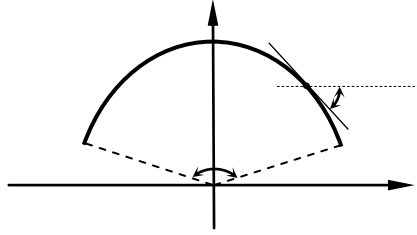
Tablo 3. Liu ,Wu (2001) ve Karami, Malekzadeh (2004)’de simetrik kiriş için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu EI_b)^{1/2}$)

		$h(\phi) = 1 + \eta - 2\eta\phi \quad -\phi_n / 2 \leq \phi \leq 0,$ $h(\phi) = 1 - \eta + 2\eta\phi \quad 0 \leq \phi \leq \phi_n / 2$			
		Bu çalışma		Liu ,Wu (2001)	Karami, Malek.(2004)
Açı		(1)	(2)	(2001)	
AA	10	433.27	2146.61	2149.75	2149.80
	20	161.36	534.67	535.45	535.45
	30	88.05	236.17	236.51	236.52
	40	61.68	131.72	131.90	131.91
	50	50.84	83.39	83.50	83.51
SS	10	273.03	1355.27	1357.21	1357.20
	20	89.70	336.91	337.38	337.89
	30	57.35	148.34	148.54	148.55
	40	49.23	82.36	82.47	82.47
	50	46.46	51.84	51.90	51.91

Tablo 4. Auciello ve Rosa (1994)’da asimetrik kiriş için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=\omega R^2(\mu EI_b)^{1/2}$)

		$h(\phi) = h_o(1 - 2\eta\phi / \phi_n)$			
		Bu çalışma		Auciello, Rosa (1994)	
Açı		(1)	(2)	R-R	CDM
AA	10	419.29	2039.34	1999.90	2000.50
	20	155.11	512.17	498.33	499.44
	30	85.17	228.07	220.06	220.56
	40	60.29	128.20	122.70	122.97
	50	50.08	81.79	77.63	77.81
	60	45.21	56.48	53.17	53.30
SS	10	269.54	1304.61	1286.50	1287.80
	20	88.98	327.02	319.09	320.11
	30	57.07	145.16	141.05	140.92
	40	48.97	81.24	78.07	78.22
	50	46.11	51.53	49.12	49.22
	60	34.16	35.34	33.43	33.48

Şekil 1(a)'daki eğri eksenli simetrik çubuğun eksen eğrisinin spiral ve parabol olması durumlarında frekans değerleri incelenmiştir. Gutierrez ve diğerlerine (1989) ait çalışmada kullanılan, giriş geometrisine ait formülasyon kullanılmıştır. Φ açısı, herhangi bir noktada eğriye çizilen normal doğrultudaki vektörün, referans doğrultusu ile yaptığı açığı ifade eder (Şekil 4).



Şekil 4. Spiral ve parabol eksenli girişte geometrik büyüklükler

Eğrilik yarıçapı spiral için,

$$R = \frac{R_0}{\cos\phi} \quad (13)$$

Parabol için,

$$R = \frac{R_0}{\cos^3\phi} \quad (14)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda verilen yöntemle elde edilen frekans değerleri, Tablo 5'de, referans çalışma ile karşılaştırılmaktadır. En yüksek hata oranı, ankastre-ankastre mesnet şartı için gerçekleşmektedir. Sabit-ankastre mesnet şartında sonuçlar oldukça uyumludur.

Tablo 5. Gutierrez ve diğerlerine (1989) ait çalışmada spiral ve parabol eksenli çubuk için elde edilen frekans değerlerinin mevcut çalışma ile karşılaştırılması ($c=(\rho A_0/EI_b)^{1/2} \omega R^2 \phi^2$)

	Açı	Simetrik spiral eksenli çubuk			Asimetrik spiral eksenli çubuk		
		(1)	(2)	Gutierrez vd.(1989)	(1)	(2)	Gutierrez vd.(1989)
AA	10	16.14	65.23	61.81	15.47	61.37	60.79
	20	21.90	64.49	61.10	20.75	60.67	60.13
	30	26.99	63.28	59.93	25.80	59.50	58.99
	40	35.39	61.59	58.31	34.36	57.89	57.55
SS	10	9.12	41.18	39.47	8.92	39.27	39.09
	20	12.27	40.64	38.08	12.04	38.74	38.57
	30	19.54	39.75	36.08	19.33	37.88	37.73
	40	31.37	38.52	36.88	31.05	36.69	36.55
SA	10	12.55	52.27	52.00	11.86	49.01	48.74
	20	16.49	51.64	51.45	15.51	48.41	48.16
	30	22.24	50.59	50.43	21.36	47.40	47.15
	40	32.16	49.15	49.07	31.37	46.02	45.86
		Simetrik parabol eksenli çubuk			Asimetrik parabol eksenli çubuk		
	Açı	(1)	(2)	Gutierrez vd.(1989)	(1)	(2)	Gutierrez vd.(1989)
AA	10	16.08	64.90	61.49	15.41	61.06	60.53
	20	21.54	63.19	59.86	20.40	59.43	59.05
	30	26.13	60.39	57.18	24.99	56.76	56.49
	40	33.93		53.53	32.98	53.14	52.91
SS	10	9.082	40.98	39.27	8.88	39.07	38.88
	20	12.09	39.83	38.15	11.87	37.95	37.73
	30	19.13	37.95	36.33	18.92	36.14	36.00
	40	30.46	35.41	33.87	30.13	33.68	33.46
SA	10	12.51	52.01	51.76	11.81	48.76	48.49
	20	16.22	50.59	50.43	15.26	47.41	47.15
	30	21.64	48.27	48.16	20.79	45.21	45.07
	40	30.99	45.12	45.07	30.25	42.22	42.14

Sonuçlar

Çalışmada, sabit eğrilik yarıçapı ve sabit kesit alanına sahip çubuk için elde edilen kesin çözüm yöntemi, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşim problemlerinin çözümü için uygulanmıştır. Sürekli değişken kesitli, simetrik ve asimetrik geometriye sahip çubuklar, sabit kesit alanına sahip elemanlara ayrılarak çözüm yapılmış, eleman sayısı arttıkça doğru sonuca olan yakınsamanın da arttığı görülmüştür. Böylece, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmeden, değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubuklar için, yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir. Bu çözüm, çubuk eksen eğrisi, kesit değişimi, mesnet şartları ve yükleme durumu belli olan herhangi bir çubuğun titreşimlerini incelemede uygulanabilecek genel bir çözümdür.

Çember eksenli, simetrik ve asimetrik çubuklar için beş farklı mesnet tipinde incelemeler yapılmış, dört farklı giriş açısı için çubuğun ilk doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Ankastre-serbest ve serbest-serbest dışındaki mesnet tiplerinde küçük giriş açılarında eksenel uzama etkisinin baskın olduğu görülmektedir. Değişken eğrilik yarıçapına sahip çubuklara örnek olarak, spiral ve parabol eksenli çubuklar incelenmiş, literatürdeki benzer örnekler çözülerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Literatürdeki sonuçlarla bu çalışmada etkilerin ihmal edildiği durumda elde edilen sonuçlar oldukça uyumludur.

Kaynaklar

- Auciello, N.M., De Rosa, M.A., (1994). Free Vibrations of Circular Arches: A Review, *Journal of Sound and Vibration*, **176**, 433-458.
- Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Bertero, R., Villaggi, A., (1989). In-Plane Vibrations of Non-Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, **129**, 2, 181-200.
- Karami, G., Malekzadeh, P., (2004). In-Plane Vibration Analysis of Circular Arches with Varying Cross-Sections Using Differential Quadrature Method, *Journal of Sound and Vibration*, **274**, 777-799.
- Liu, G.R., Wu, T.Y., (2001). In-Plane Vibration Analyses of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule, *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**, 2597-2611.
- Tüfekçi, E., Arpacı, A., (1998). Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration*, **209**, 5, 845-856.
- Tufekci, E., Ozdemirci O., (2006). . Exact Solution of Free In-Plane Vibration of A Stepped Circular Arch, *Journal of Sound and Vibration*, **295**, 725-738.
- Yang, F., Sedaghati, R., Esmailzadeh E., (2008). Free in-Plane Vibration of General Curved Beams Using Finite Element Method, *Journal of Sound and Vibration*, **318**, 850-867.