

Katı yakıtlı roket motorlarında daimi olmayan akışların ikili zaman adımlaması yöntemi ile sayısal benzetimi

Murat UYGUN*, **Kadir KIRKKÖPRÜ**

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34437, Gümüşsuyu, İstanbul

Özet

Değişken iç geometriye sahip katı yakıtlı roket motorlarında iki boyutlu daimi olmayan akışların benzetimi yeni bir kapalı ikili zaman adımlama algoritması kullanılarak gerçekleştirildi. Zamana bağlı denklemler, keyfi Lagrange-Euler sistemi için yazılarak hücre merkezli sonlu hacimler yöntemi ile ayrıklaştırıldı ve yapıli ağlar üzerinde hareketli sınırlar ile çözüldü. Sıkıştırılamaz limitte yakınsama hızını etkileyen akustik ve taşınım hızları arasındaki fark önşartlandırma tekniği ile ortadan kaldırıldı. Yapay sönümleme terimleri düşük Mach sayılarında doğru olarak hesaplanacak şekilde ayarlandı. Önerilen kapalı ikili zaman adımlama algoritmasını kullanan keyfi Lagrange-Euler zaman adımlaması, geometrik korunum yasasını sağlamakta ve hareketsiz ağlarda elde edilen zaman doğruluğunu korumaktadır. Kullanılan keyfi Lagrange-Euler zaman adımlaması, daha az matris çarpımı içermesi ve matris tersinin hesaplanmasını gerektirmediğinden literatürde mevcut olanlara göre daha basittir. Her bir zaman adımında yeni ağ, cebirsel karşısönlu interpolasyon yöntemine dayanan rahatsızlık yöntemi kullanılarak üretildi. Lokal zaman adımlaması, artık düzeltici ve çokluağ yöntemleri kullanılarak yakınsama hızlandırıldı. Katı yakıtlı roket motoru benzeri konfigürasyonda daimi ve daimi olmayan akışların benzetimi hareketsiz ve hareketli ağlar kullanılarak başarı ile yapıldı. Elde edilen hız profilleri, basınç dalgalanmaları ve girdap kopmaları literatürdeki deneysel, analitik ve sayısal sonuçlar ile uyumludur. Hesaplanan sonuçlar, önerilen kapalı zaman algoritması ile geliştirilen akış çözücününün değişken iç geometriye sahip olan katı yakıtlı roket motorlarında iki boyutlu daimi olmayan akışların çözümü ve analizinde kullanılabileceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: *Katı yakıtlı roket motoru, ikili zaman adımlaması, keyfi Lagrange-Euler yöntemi, önşartlandırma, şekil değiştiren ağ, çokluağ.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Murat UYGUN. m.uygun@hho.edu.tr; Tel: (212) 663 24 90.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Makina Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Katı yakıtlı roket motorlarında daimi olmayan akışların şekil değiştiren ağlar ile sayısal benzetimi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 16.11.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 28.11.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Numerical simulation of unsteady flows in solid rocket motors with dual time stepping

Extended abstract

A computer code, implementing a novel Dual Time Stepping (DTS) algorithm, is developed in order to simulate two-dimensional unsteady cold flow in Solid Rocket Motors (SRM) involving variable internal geometry. Simulation of unsteady flow at all-speeds is essential, since flow speed of combustion gases through an SRM ranges from incompressible limit to supersonic speeds and internal geometry of the SRM varies in time due to regression of combustant propellant surface. In this respect, present code solves compressible form of time dependent conservation laws, written in Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) form, on deforming grids at low Mach numbers ($M \ll 1$) as well as at supersonic speeds.

The present code exploits low Mach number preconditioning technique to modify compressible form of Navier-Stokes equations for simulation of all-speed flows. Time dependent Navier-Stokes equations are written in ALE form in order to solve flow problems involving moving boundaries. Time dependent preconditioned Navier-Stokes equations in ALE form is solved by means of a novel implicit DTS algorithm. The use of novel DTS algorithm is advocated due to following issues: First; the multiplication of preconditioning matrix by spatial derivatives only is sufficient to equalize the convective eigenvalues. Second; because the source terms in the unsteady residual do not affect the range of wave speeds, pseudo time steps are not changed and they are calculated using the matrix, which is obtained from the multiplication of preconditioning matrix by convective flux Jacobian. Present DTS algorithm has a simple form, since it has only two matrix multiplications and no matrix inversion at each R-K stage. The use of dual time stepping lets the physical time step be selected based on the numerical accuracy criterion only. Geometric Conservation Law (GCL) compliant ALE time-stepping scheme, which retains on deforming grids the nonlinear stability and the second order time-accuracy achieved on stationary grids, is used. GCL is solved concurrently with the time dependent equations. A perturbation method based on algebraic Transfinite Interpolation (TFI) is used for rapid generation of deforming grids at each time step. Cell-centered finite volume discretization tech-

nique is adopted. Convective terms are evaluated using central differencing scheme. The flux vectors at the midpoint of a cell face are computed by arithmetic averaging of flow variables at two neighboring cells. Scalar artificial dissipation model is adopted in order to prevent odd-even decoupling of the solution. Artificial dissipation terms are modified to let them scale correctly at low Mach numbers. The variables, which are required for the computation of viscous terms, are also averaged at a cell face. Gradients at the midpoints of a cell face are computed by means of Green's theorem. Local time stepping, implicit residual smoothing and multigrid are implemented for convergence acceleration.

Injection-induced inviscid steady flow in an SRM is simulated first. Numerical results indicate that pressure slightly decreases in the outflow direction in the propellant section and remains almost constant in the solid wall section of SRM. The flow is supersonic at the downstream of the nozzle throat. Computed results agree with numerical results available in literature. Efficiency of the novel DTS algorithm is assessed for the simulation of unsteady laminar flows inside SRM with and without propellant surface moving due to combustion. Steady state Euler solution computed previously is used as an initial condition to unsteady simulations. First, unsteady laminar flow inside SRM is computed on stationary grid neglecting the propellant regression. Computed head-end pressure oscillations and vortex shedding formation agree with other numerical solutions available in literature. Next, laminar flow inside the SRM involving propellant regression is simulated on deforming grids. Computed results are not validated for propellant regression case, since there are no experimental data or numerical results available in the open literature. However, all the physics (pressure oscillations and vortex formation) related to SRM simulation are computed well and propellant regression is modeled accurately. Numerical results indicate that present code, exploiting the latest and efficient methods like ALE, GCL, preconditioning, multigrid and a novel DTS algorithm, successfully simulates cold flow in SRM like configurations on stationary as well as deforming grids. Novel DTS algorithm has no detrimental effect on the solution accuracy.

Keywords: Solid rocket motor, dual time stepping, arbitrary Lagrangian-Eulerian method, preconditioning, deforming grid, multigrid.

Giriş

Katı Yakıtlı Roket Motoru (KYRM) yan duvarlarından kütle enjeksiyonu ile itki üreten motordur. Yanmış gazlar KYRM içinde hızlandırılarak sesüstü hızlarda atmosfere atılır. Bu esnada motorun yapısına etki eden reaksiyon kuvvetleri tepkiyi üretir. KYRM'lerin tarihi, barutun roket yakıtı olarak kullanıldığı 13. yüzyıla kadar uzanır. İkinci dünya savaşından sonra uzay çalışmaları ve kıtalararası balistik füzelerin önem kazanmasıyla, KYRM'leri geliştirme çalışmaları hız kazanmıştır. Son dönemde, KYRM geliştirme çalışmalarında sayısal modelleme, bilgisayar kapasitelerindeki artış, KYRM geliştirme fazında daha az ateşleme testi yaparak maliyet düşürme gibi nedenlerle yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır (Kuentzmann, 2004). Bu çalışmada KYRM içinde iki boyutlu daimi olmayan soğuk akışların yakıt regresyonunu da modelleyerek simule edecek programın yazılması amaçlanmıştır.

KYRM'nin çalışması esnasında katı yakıtın regresyonu, daimi olmayan akış ile yakıt yüzeyinin hareketini içerdiğinden daimi olmayan akışların şekil değiştiren ağlar üzerinde hesaplanması gerekmektedir. Bu bağlamda, akış kinematığının tanımı önem kazanmaktadır. Lagrange tanımı hesaplama ağı noktalarının akışkan partiküllerini takip etmelerini gerektirirken Euler tanımında hesaplama ağı sabittir ve akışkan ağa göre hareket eder (Donea vd., 2004). Dolayısı ile hem Lagrange hem de Euler tanımlarının faydalarından yararlanmak üzere Keyfi Lagrange-Euler (KLE) yöntemi ortaya atılmıştır (Hirt vd., 1974).

KYRM içinde yanmış gazların akış hızları sıkıştırılmaz limitten sesüstü hızlara ulaşmaktadır. Bu nedenle, zamana bağlı akışların simülasyonu için tüm hızlarda tek bir çözüm şeması yapılmıştır. Tüm hızlardaki akışlar, Navier-Stokes denklemlerinin düşük Mach sayısı ön şartlandırma yöntemi ile değiştirilmesi ile elde edilen çözüm algoritması sayesinde hesaplanabilmektedir. Düşük Mach sayısı ön şartlandırma yöntemi, taşınım özdeşliklerini eşitleyerek akustik hıza göre düşük akış hızlarında Navier-Stokes

denklemlerinde meydana gelen katılığı azaltmak için konumsal türevlerin uygun bir matris ile çarpımını içerir. Ayrıca, sönümleme terimleri de Mach sayısı sifıra yaklaştıkça doğru olarak hesaplanacak şekilde ayarlanmıştır. Sesüstü hızlarda, ön şartlandırma matrisi birim matrise dönüşür ve ön şartlandırma lokal olarak ortadan kaldırılmış olur. Ön şartlandırma, akış denklemlerinin orijinal halini değiştirerek denklemlerin zamana bağlılığını bozar. Ancak, zamana bağlı ön şartlandırılmış akış denklemleri İkili Zaman Adımlaması (İZA) yöntemi kullanılarak çözülebilir. İZA yönteminde, herbir fiziksel zaman adımında değiştirilmiş daimi akış denklemleri sanki zaman içinde ilerleyerek çözülür (Jameson, 1991). İZA yönteminin kullanılması sayesinde fiziksel zaman adımı, karalılık limitinden bağımsız olarak sadece sayısal doğruluk kriterine bağlı olarak tespit edilir. Bu durum, özellikle viskoz akışların benzetiminde faydalıdır. Çünkü, viskoz çözüm ağındaki yüksek en-boy oranına sahip hücreler fiziksel zaman adımını kararlılık problemi yüzünden oldukça düşük değerlerle sınırlamaktadır. İZA yöntemi sayesinde değiştirilmiş daimi problemin çözümünde lokal zaman adımlaması, kapalı artık azaltıcı ve çoklu ağı yöntemleri yakınsama hızını artırmak üzere kullanılabilir. Ön şartlandırma yöntemi bir çok araştırmacı tarafından daimi akışların (Mulas vd., 2002; Turkel, 1993) ve daimi olmayan akışların (Weiss ve Smith, 1995; Gleize ve Le Pape, 2006) sayısal çözümü için kullanılmıştır. İZA yöntemi ilk olarak sürtünmesiz akışların hareketsiz (Jameson, 1991) ve şekil değiştiren (Giatonde, 1994) ağlarda hesaplanması için kullanılmıştır. Sonra, İZA yöntemi kullanılarak türbülanslı akışlar şekil değiştiren ağlar üzerinde hesaplanmıştır (Chassaing vd., 2003). Son zamanlarda KLE sisteminde yazılmış akış denklemleri, ön şartlandırma ve İZA yöntemleri kullanılarak daimi olmayan akışlar çözülmüştür (Gleize ve Le Pape, 2006).

Daha önceki çalışmalarda ön şartlandırma yöntemi, ayrıklaştırılmış akış denklemlerine sanki zaman türevi ekleyip bu türevin ön şartlandırma matrisi ile çarpılması şeklinde uygulanmıştır (Weiss ve Smith, 1995; Gleize ve Le Pape,

2006; Dailey ve Pletcher, 1996). Bu çalışmada, önşartlandırılmış zamana bağlı akış denklemleri yeni bir İZA algoritması kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen KLE zaman adımlama şeması daha önceki çalışmalara göre daha basit bir yapıya sahiptir. Çünkü, şema daha az matris çarpımı gerektirmesinin yanında matris tersinin hesaplanmasını da gerektirmemektedir. Önşartlandırma matrisi olarak Weiss ve Smith'in kullandığı matris esas alınmıştır (Weiss ve Smith, 1995; Weiss vd., 1999).

KLE sayısal şemasında zaman integrasyonu, temel olarak hareketsiz ağlar için geliştirilen zaman adımlama şeması kullanılarak yapılmaktadır. Bu şekilde kullanılan KLE zaman adımlama şeması ne hareketsiz ağlarda elde edilen zaman doğruluğunu, ne de Geometrik Korunum Yasasını (GKY) sağlar. GKY, hücre hacmindeki değişimi hücre yüzlerinin hareketi ile ilişkilendirir (Thomas ve Lombard, 1979). GKY, hareketsiz ağlarda elde edilen doğrusal olmayan kararlılığı şekil değiştiren ağlarda korumak için gerekli ve yeterli bir yasadır (Farhat vd. 2001). Ancak, GKY'yi sağlamak birinci mertebeden zaman doğruluğunu elde etmek için yeterli olmasına rağmen (Guillard ve Farhat, 2000), hareketsiz ağlarda elde edilen zaman doğruluğunu şekil değiştiren ağlarda korumak için gerekli veya yeterli değildir (Geuzaine vd., 2003). Bu çalışmada, hareketsiz ağlarda elde edilen doğrusal olmayan kararlılık ile ikinci mertebeden zaman doğruluğunu, şekil değiştiren ağlarda koruyan GKY uyumlu KLE zaman adımlama şeması yeni bir İZA algoritması ile kullanıldı. Hücre yüzlerinin hızları ve hücre hacimleri İZA algoritmasının gerektirdiği üzere $n+1$ zaman adımında hesaplandı (Mavriplis ve Yang, 2006; Venkatakrishnan ve Mavriplis, 1996).

Hareketli sınırları olan zamana bağlı akış problemlerini çözmek için çözüm ağı her bir zaman adımında yeniden üretilmelidir. Bu maksatla hesaplama zamanını kısaltacak hızlı ve basit yeniden üretim algoritmasına ihtiyaç duyulur. Bu çalışmada, şekil değiştiren ağların her bir zaman adımında yeniden üretimi için cebirsel Karşısonlu İnterpolasyon (KSİ) yöntemine da-

yanan rahatsızlık yöntemi kullanılmıştır (Wong vd., 2001; Dubuc vd., 2000). Bu yöntemin kullanımını orijinal ağ kalitesinin korunmasını garanti eder ve her bir sınırın bağımsız olarak hareket ettirilmesini mümkün kılar.

Bu çalışmada hücre merkezli sonlu hacim ayrıklaştırma yöntemi kullanıldı. Taşınım terimleri merkezi farklar şeması ile hesaplandı (Jameson vd., 1981). Hücre yüzlerinin orta noktasında akı vektörleri komşu iki hücredeki akış değişkenlerinin aritmetik ortalaması alınarak hesaplandı. Çözümde tek-çift dekoplesini engellemek için skaler yapay sönümlenme modeli kullanıldı (Jameson vd., 1981). Viskoz terimlerin hesaplanması için gerekli olan akış değişkenleri de aritmetik ortalamaları alınarak hesaplandı. Hücre yüzlerinin orta noktalarındaki gradyenler Green teoremi ile hesaplandı (Rizzi, 1993). Lokal zaman adımlaması (Arnone vd., 1995), artık azaltıcı (Jameson ve Baker, 1983; Jameson, 1984; Martinelli ve Jameson, 1988) ve çoklu ağı (Jameson, 1983; Jameson, 1985; Martinelli vd., 1986) kullanılarak çözümün yakınsama hızı artırıldı.

İlk olarak KYRM içinde enjeksiyon kaynaklı sürtünmesiz daimi akış hesaplanmıştır. Sayısal sonuçlar KYRM içinde akış yönünde basıncın katı yakıt bölümünde hafifçe azaldığını, katı duvar bölümünde ise sabit kaldığını göstermiştir. Akış lülenin boğaz kısmında sesüstü hıza ulaşmakta ve KYRM lüle çıkışından sesüstü hızlarda dışarı atılmaktadır. Sayısal sonuçlar literatürde yayınlanmış diğer sayısal sonuçlar ile uyumludur. Yeni İZA algoritmasının doğruluğu KYRM içinde zamana bağlı laminer akışın şekil değiştiren ve hareketsiz ağlarda hesaplanması ile kontrol edilmiştir. Daha önce elde edilen daimi akış çözümü zamana bağlı çözümlere başlangıç koşulu olarak kullanılmıştır. İlk olarak, katı yakıt regresyonu olmayan KYRM içinde zamana bağlı laminer akış hareketsiz ağlarda hesaplanmıştır. Hesaplanan basınç salınımlarının ve girdap kopmalarının literatürdeki diğer sayısal sonuçlar ile uyumlu olduğu gözlenmiştir. Daha sonra, katı yakıt regresyonu içeren KYRM içindeki laminer akış şekil değiştiren ağlar ile

hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların doğruluğu, literatürde deneysel veya sayısal sonuç olmaması nedeni ile kontrol edilememiştir. Ancak, KYRM simülasyonuna ait basınç salınımları ve girdap kopmaları hesaplanmış ve katı yakıt yüzeyinin regresyonu başarı ile modellenmiştir. Elde edilen sonuçlar, yeni bir İZA algoritması ile geliştirilen akış çözücünün değişken iç geometriye sahip olan KYRM'lerde iki boyutlu daimi olmayan soğuk akışların çözümü ve analizinde kullanılabileceğini göstermektedir.

Önşartlandırılmış akış denklemleri

Navier-Stokes denklemlerindeki basınç ve yoğunluğa Reynolds ortalaması (üst çizgi), diğer akış parametrelerine Favre ortalaması (tilde) uygulanarak Favre ortalamalı Navier-Stokes denklemleri elde edilmiştir. Önşartlandırılmış Navier-Stokes denklemlerinin ALE sistemindeki integral formu

$$\iint_{\Omega(t)} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} d\Omega + \mathcal{P} \iint_{\partial\Omega(t)} (\vec{F}_C - \vec{F}_V) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1)$$

şeklinde yazılır. \vec{C} , \vec{F}_C ve \vec{F}_V sırasıyla korunumlu değişkenleri, taşınım ve viskoz akımlarını temsil eder. Laminer viskozite katsayısı Sutherland formülü ile hesaplanır.

$$\bar{\mu}_L = \frac{1.45 \tilde{T}^{3/2}}{\tilde{T} + 110} 10^{-6} \quad (2)$$

İdeal gaz kabulü yapılarak basınç ve sıcaklık

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \left[\tilde{E} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \right], \quad \tilde{T} = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho} R} \quad (3)$$

denklemleri ile hesaplanır.

Önşartlandırma matrisi $\mathcal{P} = P\Gamma^{-1}$ şeklinde tanımlanır (Merkle vd., 1998). P matrisi, temel değişkenlerden $\vec{Q} = [p, u, v, T]^T$ korunumlu değişkenlere \vec{C} olan transformasyon matrisini temsil eder. Γ^{-1} matrisi P matrisinin modifiye

edilmiş halinin tersidir. Weiss ve Smith (1995), P matrisinin modifiye edilmiş hali için

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho_P^m & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_P^m u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_P^m v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_P^m w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ H \rho_P^m - (1 - \rho h_p) & \rho u & \rho v & \rho w & H \rho_T + \rho h_T \end{bmatrix} \quad (4)$$

matrisini kullanmıştır. ρ_P , ρ_T , h_p , h_T yoğunluk ve entalpinin basınç ve sıcaklığa göre türevidir. Modifiye edilmiş terimler

$$\rho_P^m = \frac{1}{u_r^2} - \frac{\rho_T}{\bar{\rho} h_T} \quad (5)$$

denklemleri ile hesaplanır. u_r referans hızıdır ve

$$u_r = \min \left[\max \left(\|\vec{v}\|, \frac{\bar{\mu}_L}{\bar{\rho} \Delta x}, \varepsilon \sqrt{\frac{\Delta \bar{p}}{\bar{\rho}}} \right), c \right] \quad (6)$$

ile hesaplanır (Mulas vd., 2002). Denklem (6), referans hızın lokal taşınım ve difüzyon hızlarının altına düşmeyeceğini gösterir. Δx karakteristik uzunluk ve ε küçük sabit bir sayıdır. Akış sesüstü hızlarda iken ($\|\vec{v}\| > c$) önşartlandırma lokal olarak devre dışı kalır. P , Γ^{-1} , \mathcal{P}^{-1} matrisleri Mulas ve diğerleri (2002) tarafından verilmiştir.

Uzaysal ayrıklaştırma

Bu çalışmada hücre merkezli sonlu hacim ayrıklaştırma yöntemi kullanıldı. Denklem (1) bütün kontrol hacmi için yazıldığında, 1nci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Tek bir hücre için yazıldığında denklem (1)

$$\frac{d}{dt} (\Omega_{I,J} \vec{C}_{I,J}) + \vec{R}_{I,J} (\vec{C}) = 0. \quad (7)$$

halini alır. I ve J hücre adresini temsil eder. $\vec{R}_{I,J} (\vec{C})$ ise artık adını alır ve

$$\vec{R}_{I,J}(\vec{C}) = \mathcal{P}_{I,J} \sum_{ncf=1}^4 (\vec{F}_C - \vec{F}_V)_{ncf} (\vec{n}\Delta S)_{ncf}. \quad (8)$$

şeklinde tanımlanır. ncf hücre yüzlerini temsil eder. ΔS hücre yüzeyi alanıdır. Sonlu hacimler yöntemi hücre yüzünde taşınım ve viskoz akıların hesaplanmasını gerektirir. Bu çalışmada, taşınım akıları merkezi farklar şeması ile hesaplandı (Jameson vd., 1981). Çözümde tek-çift dekuplesini engellemek için skaler yapay sönümlenme modeli kullanıldı. Ayrıca, sönümlenme terimleri Mach sayısı sıfıra yaklaştıkça doğru olarak hesaplanacak şekilde ayarlandı (Turkel, 1999). Viskoz akıların hesaplanması için gerekli olan akış değişkenleri hücre yüzünde aritmetik ortalamaları alınarak hesaplandı. Hücre yüzlerinin orta noktalarındaki gradyenler Green teoremi ile hesaplandı (Rizzi vd., 1993).

Zaman adımlaması

Daimi olmayan akışlar

Daha önceki çalışmalarda önşartlandırılmış denklemlerin daimi olmayan akışlarda benzetimi için İZA yöntemi, ayrıklaştırılmış akış denklemlerine sanki zaman türevi eklenip bu türevin önşartlandırma matrisi ile çarpılması şeklinde uygulanmıştı (Weiss ve Smith, 1995; Gleize ve Le Pape, 2006; Dailey ve Pletcher, 1996).

$$\mathcal{P}_{I,J}^{-1} \frac{d}{d\tau} (\Omega_{I,J} \vec{C}_{I,J}) + \frac{d}{dt} (\Omega_{I,J} \vec{C}_{I,J}) + \vec{R}_{I,J}(\vec{C}) = 0, \quad (9)$$

$$\text{ve } \vec{R}_{I,J}(\vec{C}) = \sum_{ncf=1}^4 [\vec{F}\vec{n}\Delta S - \vec{D}]_{ncf}. \quad (10)$$

τ sözde zamanı temsil eder. Denklem (9) da fiziksel zaman türevi 2. mertebeden doğru, üç nokta geri farklar metodu ile ve sözde zaman türevi 1inci mertebeden doğru, geri farklar metodu ile ayrıklaştırıldığında

$$\Omega_{I,J}^{n+1} \left(\frac{\vec{C}_{I,J}^{k+1} - \vec{C}_{I,J}^k}{\Delta \tau_{I,J}} \right) = -\mathcal{P}_{I,J} \vec{R}_{I,J}^* (\vec{C}^{n+1}) \quad (11)$$

elde edilir. Bu denklemde daimi olmayan artık:

$$\vec{R}_{I,J}^* (\vec{C}^{n+1}) = \vec{R}_{I,J} (\vec{C}^{n+1}) + \frac{3\Omega_{I,J}}{2\Delta t} \vec{C}_{I,J}^{n+1} - \vec{Q}_{I,J} \quad (12)$$

şeklini yazılır. $\vec{Q}_{I,J}$ zaman adımlaması esnasında değişmeyen terimleri ifade eder:

$$\vec{Q}_{I,J} = \frac{\Omega_{I,J}}{2\Delta t} (4\vec{C}_{I,J}^n - \vec{C}_{I,J}^{n-1}). \quad (13)$$

Denklem (11) deki zaman adımlaması M-kademeli Runge-Kutta şeması ile yapılır:

$$\left(I + \alpha_m \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau_{I,J}}{\Delta t} \mathcal{P}_{I,J} \right) \vec{C}_{I,J}^{(m)} = \vec{C}_{I,J}^{(0)} - \alpha_m \frac{\Delta \tau_{I,J}}{\Omega_{I,J}^{n+1}} \mathcal{P}_{I,J} \vec{R}_{I,J}^* (\vec{C}^{(m-1)}) + \alpha_m \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau_{I,J}}{\Delta t} \mathcal{P}_{I,J} \vec{C}_{I,J}^{(m-1)} \quad (14)$$

$m=1,2,\dots,M$ değerlerini alır. I birim matristir. Bu şema, her bir Runge-Kutta kademesinde üç matris çarpımı ve bir matris tersinin hesaplanmasını gerektirir.

Bu çalışmada, önşartlandırılmış zamana bağlı akış denklemlerinin ayrıklaştırılmış haline sözde zaman türevi eklenerek elde edilen yeni bir İZA algoritması kullanılmıştır:

$$\frac{d}{d\tau} (\Omega_{I,J} \vec{C}_{I,J}) + \frac{d}{dt} (\Omega_{I,J} \vec{C}_{I,J}) + \vec{R}_{I,J}(\vec{C}) = 0 \quad (15)$$

$$\text{ve } \vec{R}_{I,J}(\vec{C}) = \mathcal{P}_{I,J} \sum_{ncf=1}^4 [\vec{F}\vec{n}\Delta S - \vec{D}]_{ncf} \quad (16)$$

Yukarıdaki denklemde fiziksel zaman türevi 2. mertebeden doğru, üç nokta geri farklar metodu ile, sözde zaman türevi 1inci mertebeden doğru, geri farklar metodu ile ayrıklaştırıldığında

$$\frac{\vec{C}_{I,J}^{k+1} - \vec{C}_{I,J}^k}{\Delta \tau_{I,J}} + \frac{1}{\Omega_{I,J}^{n+1}} \vec{R}_{I,J}^* (\vec{C}^{n+1}) = 0 \quad (17)$$

elde edilir. Denklem (17) deki daimi olmayan artık terimi denklem (12) de, daimi artık terimi ise denklem (16) da tanımlanmıştır. Denklem (17) deki zaman adımlaması M-kademeli Runge-Kutta şeması ile yapılır:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{I,J}^{(m)} \left[1 + \alpha_m \beta \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau_{I,J}}{\Delta t} \right] &= \bar{C}_{I,J}^{(0)} \\ &- \alpha_m \frac{\Delta \tau_{I,J}}{\Omega_{I,J}^{n+1}} \bar{R}_{I,J}^* \left(\bar{C}^{(m-1)} \right) \\ &+ \alpha_m \beta \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau_{I,J}}{\Delta t} \bar{C}_{I,J}^{(m-1)} \end{aligned} \quad (18)$$

$m=1,2,\dots,M$ şeklindedir. Şemayı kararlı hale getirmek için $\beta \geq 2$ alınır (Venkatakrisnan ve Mavriplis, 1996). Bu şema, her bir Runge-Kutta kademesinde iki matris çarpımı gerektirirken ancak denklem (14)'den farklı olarak matris teriminin hesaplanmasını gerektirmez. Bu yüzden elde edilen KLE zaman adımlama şeması daha önceki çalışmalara göre daha basit bir yapıya sahiptir. Denklem (18)'deki yeni İZA algoritmasının doğruluğunu iki husus ile savunmak mümkündür. İlk husus, taşınım özdeğerlerini eşitlemek için önşartlandırma matrisinin uzaysal türevler ile çarpımının yeterli olduğudur (Uygun ve Kırkköprü, 2007). İkinci husus, daimi olmayan artık terimindeki kaynak terimlerinin denklem (9)'daki dalga hızlarını etkilemediğidir (Belov vd., 1995). Tablo 1'de merkezi farklar algoritması için optimize edilmiş Runge-Kutta kademe katsayıları görülmektedir.

Tablo 1. Optimize edilmiş kademe katsayıları

Merkezi Farklar Algoritması					
m	1	2	3	4	5
α	0.25	0.18	0.40	0.51	1.00

Geometrik korunum yasası

Hücre hacmindeki değişimi hücre yüzlerinin hareketi ile ilişkilendiren bir yasadır (Thomas ve Lombard, 1979). Ağ hareketinin üniform akışı bozmamasını sağlar. İntegral formda GKY;

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega(t)} d\Omega - \oint_{\partial\Omega(t)} \vec{V}_{cf} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (19)$$

şeklinde yazılır. GKY'nin zaman türevi üç noktalı geri farklar yöntemi ile ayrıklaştırıldığında hücre yüzü hızları için

$$\left[\vec{V}_{cf} \cdot \vec{n} \Delta S \right]_{ncf}^{n+1} = \frac{3\delta\Omega_{ncf}^{n+1} - \delta\Omega_{ncf}^n}{2\Delta t} \quad (20)$$

denklemini elde edilir (Uygun ve Kırkköprü, 2007). $\delta\Omega_{ncf}^{n+1}$ hücre yüzünün $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ zamanda süpürdüğü alanı temsil eder.

Şekil değiştiren çözüm ağı üretimi

Hareketli sınırları olan zamana bağlı akış problemlerini çözmek için çözüm ağı her bir zaman adımında yeniden üretilmelidir. Bu maksatla hesaplama zamanını kısaltacak hızlı ve basit yeniden üretim algoritmasına ihtiyaç duyulur. Bu çalışmada, şekil değiştiren ağların her bir zaman adımında yeniden üretimi için cebirsel karşılıklı interpolasyon (KSİ) yöntemine dayanan rahatsızlık yöntemi kullanılmıştır (Dubuc vd., 2000; Wong vd., 2001). Bu yöntemin kullanılması orijinal ağ kalitesinin korunmasını garanti eder ve her bir sınırın bağımsız olarak hareket ettirilmesini mümkün kılar.

Sınır koşulları

Sınır koşulları, hesaplama bölgesinin dışında sayısal olarak üretilen hayalet hücreler yardımı ile uygulandı. Sürtünmesiz akışlarda, duvar sınırında akış teğetliği sağlanmış ve sıcaklığın normal türevi sıfır olarak kabul edilmiştir. Duvardaki basınç, hesaplama bölgesinden ekstrapolasyon ile elde edilmiştir. Viskoz akış koşullarında, duvarda hız bileşenleri sıfırdır. Simetri düzlemi yansıtılmış hücre kabulü ile ele alınmıştır. İki boyutlu KYRM içindeki akış hesaplamalarında hava enjeksiyon hızı ve diğer akış parametreleri giriş kütle debisi ve yüzey sıcaklığı kullanılarak hesaplanmıştır. KYRM'nin sesüstü çıkış kesitinde birinci mertebeden ekstrapolasyon kullanılmıştır. Yakıt regresyonunun olduğu KYRM içindeki akış benzetiminde

şekil değiştiren katı yakıt yüzeyi yakıtın yanma hızı ile hareket ederken hücre yüzlerinin hızları GKY yardımı ile hesaplanmıştır.

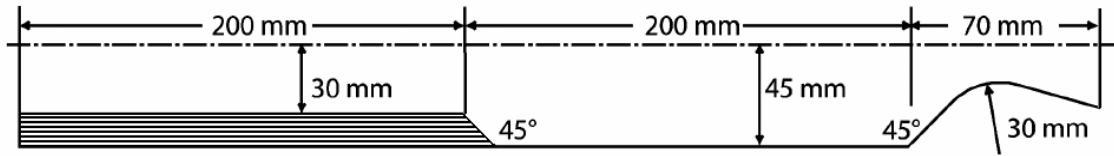
Sayısal sonuçlar

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, yeni bir İZA algoritmasının kullanıldığı akış çözücünün, değişken iç geometriye sahip olan KYRM'lerde iki boyutlu daimi olmayan soğuk akışların çözümü ve analizinde kullanılabileceğini göstermektedir. Hesaplamalar iki-boyutlu, bir ucu kapalı diğer ucunda yakınsak-ıraksak lüle olan KYRM içinde gerçekleştirilmiştir (Şekil 1). Bu düzenek literatürde ONERAC1 adıyla da bilinmektedir (Lupoglazoff ve Vuillot, 1992). Tüm hesaplamalar, 328x32 hücreli çözüm ağı kullanılarak (Şekil 2) V-tipi çoklu ağ stratejisi ile Courant-Friedrichs-Levy (CFL) sayısı 7.5 alınarak yapılmıştır. Akışa ait fiziksel şartlar Tablo 2'de verilmiştir. m enjeksiyon kütle akışını, \dot{r}

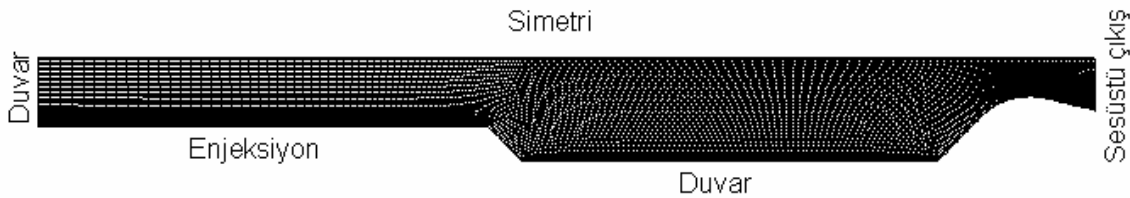
yanma hızını, ρ_p katı yakıtın yoğunluğunu, T_{enj} enjeksiyon sıcaklığını temsil etmektedir. Daimi akış hesaplamasında akışın başlangıçta uniform olduğu kabul edilmiştir. Daimi olmayan akışların hesaplanmasında daimi akış çözümü başlangıç koşulu olarak alınmış ve zaman adımı olarak 2×10^{-5} s kullanılmıştır.

KYRM içinde daimi akış

Sürtünmesiz akış halinde KYRM içinde elde edilen eş basınç çizgileri Şekil 3'de gösterilmiştir. Eksenel yönde basınç katı yakıt kısmında azalmakta iken duvar ve lüle girişinde sabit kalmaktadır. Eş Mach sayısı çizgileri, akışın eksenel yönde hızlanarak lüle boğazında sonik hıza, çıkış kesitinde de sesüstü hızlara ulaştığını göstermektedir (Şekil 4). Hesaplanan eş basınç ve Mach sayısı çizgileri Lupoglazoff ve Vuillot (1992) tarafından hesaplanan sonuçlar ile uyumludur.



Şekil 1. ONERAC1 düzeneğinin şematik gösterimi



Şekil 2. Çözüm ağı ve sınır koşulları

Tablo 2. Akışa ait fiziksel koşullar (Lupoglazoff ve Vuillot, 1992)

ρ_p (kg/m ³)	\dot{r} (m/s)	m (kg/ms)	T_{enj} (K)	μ (kg/ms)	R (j/kgK)	γ	Pr
1633	13×10^{-3}	21.201	3387	18×10^{-5}	299.53	1.14	1.0



Şekil 3. Eş basınç çizgileri (bar)

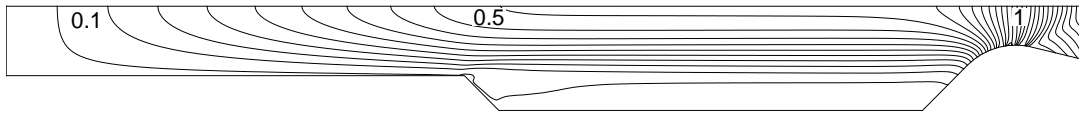
KYRM içinde daimi olmayan akış

Sürtünmesiz daimi akış halinde elde edilen çözüm başlangıç çözümü olarak kabul edilerek katı yakıt regresyonu olmayan KYRM içinde zamana bağlı laminer akış hareketsiz ağ ile hesaplanmıştır. Şekil 5’de periyodik girdap kopması sonucu KYRM’nin kapalı ucundaki basıncın zamanla değişimi gösterilmiştir.

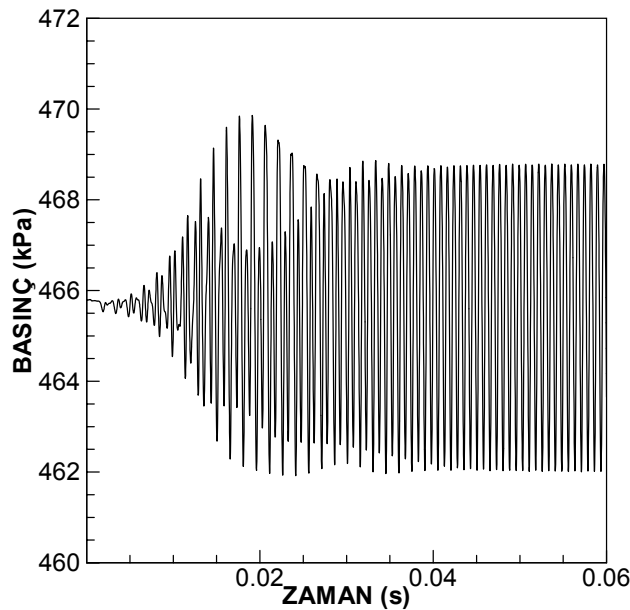
Hesaplanan basınç salınımları zamanla gelişerek periyodik hale ulaşmaktadır. Şekil 6’da basınç salınıminin bir periyodu boyunca girdap hareketi ve eşdeğer v-hız bileşeni eğrileri gösterilmiştir. $t/T=0.0$ ve $t/T=1.0$ KYRM’nin kapalı ucundaki basınç salınıminin maximum değere ulaştığı zamana karşılık gelmektedir. Katı yakıtın sağ yanında büyük hız değişimlerinden dolayı kararlı olmayan kayma akışı periyodik girdap oluşumuna yol açar. Girdap, KYRM çıkışına doğru hareket eder ve lüleye çarparak yok olur. Hesaplanan basınç salınımları ve girdap kopmaları Lupoglazoff ve Vuillot (1992) tarafından hesaplanan sonuçlar ile uyumludur.

Daha sonra, sürtünmesiz daimi akış halinde elde edilen çözüm başlangıç çözümü olarak kabul edilerek katı yakıt regresyonu içeren KYRM içindeki laminer akış şekil değiştiren ağlar ile hesaplanmıştır. Katı yakıtın yanma hızı sabit olarak alınmıştır (Tablo 2). Tüm yakıtın tükenmesi için geçen süre yaklaşık 1.1539 saniyedir. Şekil 7’de KYRM’nin kapalı ucundaki basıncın zamanla değişimi gösterilmiştir. Basıncın zamanla değişen bu durumu giriş/çıkış kütle debisi oranı üzerinde de benzer etkiyi yaratmaktadır (Şekil 8).

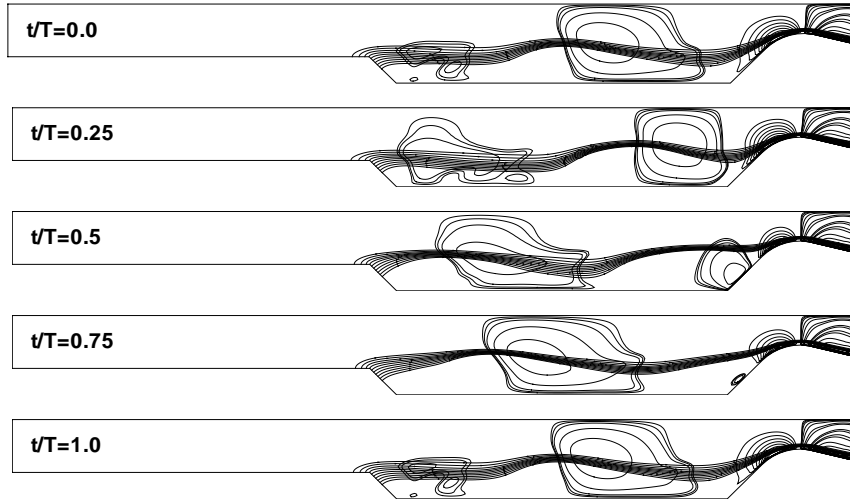
Katı yakıtın hemen hemen yarısı tükeninceye kadar yakıtın sağında kayma akışı gelişmekte ve bu akış, girdap kopmalarına neden olmaktadır (Şekil 9). Yakıtın yarısı tükendikten sonra ise kayma akışı, hız değişimlerinin yeterince büyük olmaması nedeni ile kararlı hale geçerek girdap kopmalarının bitmesine neden olur. Bu arada, katı yakıt ile lüle arasında kalan bölgede zamanla büyüyen bir sirkülasyon akımı oluşur. Hesaplanan sonuçların doğruluğu literatürde deneysel



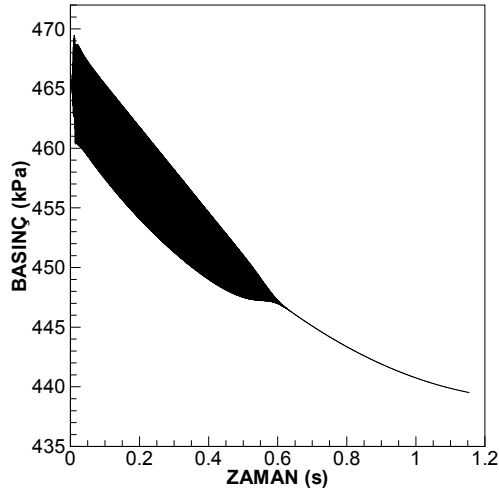
Şekil 4. Eş Mach sayısı çizgileri



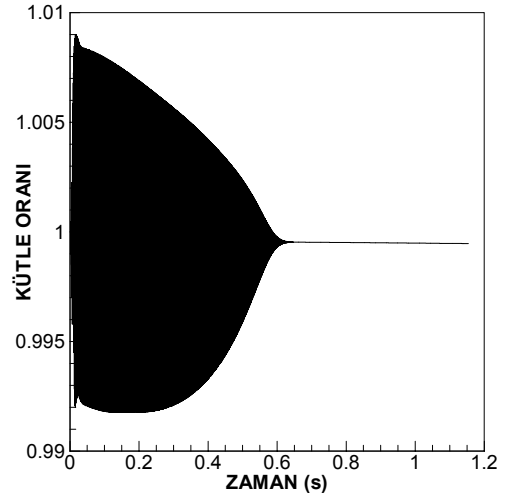
Şekil 5. KYRM'nin kapalı ucundaki basıncın zamanla değişimi



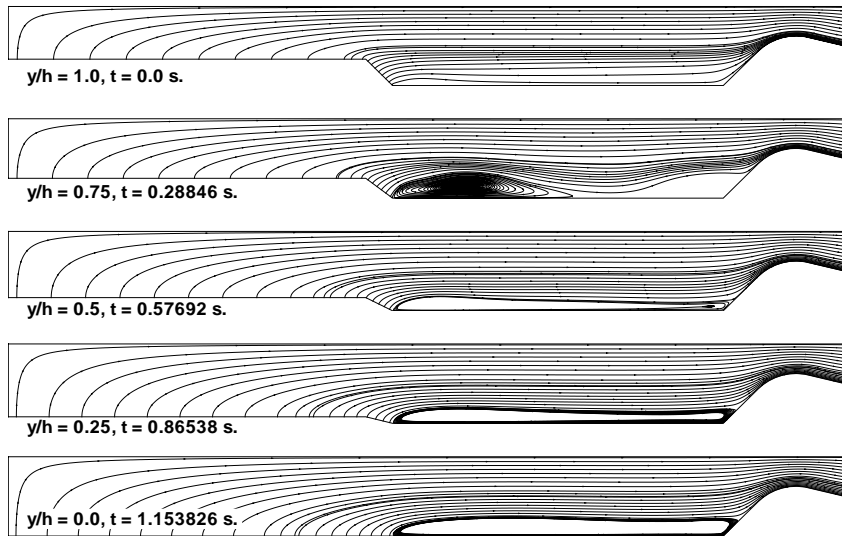
Şekil 6. Basınç salınımının bir periyodu boyunca girdap hareketi



Şekil 7. Kapalı uç basıncının zamanla değişimi



Şekil 8. Giriş/çıkış kütle oranı değişimi



Şekil 9. Katı yakıtın regresyonu esnasında akım çizgileri

veya sayısal sonuçlar bulunmadığından kontrol edilememiştir. Ancak, KYRM'lerde akışın fizikine ait basınç salınımları ve girdap kopmaları gibi temel özellikler başarı ile hesaplanmış ve yakıt yüzeyinin regresyonu başarı ile modellenmiştir.

Sonuçlar

Elde edilen sonuçlar, yeni İZA algoritması ile geliştirilen akış çözücünün değişken iç geometriye sahip olan KYRM'lerde daimi olmayan soğuk akışların çözümü ve analizinde kullanılabilirliğini göstermektedir.

Kaynaklar

- Arnone, A., Liou, M.S., Povinelli, L.A., (1995). Integration of Navier-Stokes Equations Using Dual Time Stepping and a Multigrid Method, *AIAA Journal*, **33**, 985-990.
- Belov, A., Martinelli, L., Jameson, A., (1995). A New Implicit Algorithm with Multigrid for Unsteady Incompressible Flow Calculations, AIAA Paper 1995-0049, *33rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, USA.
- Chassaing, J.C., Gerolymos, G.A., Vallet, I., (2003). Reynolds-Stress Model Dual-Time-Stepping Computation of Unsteady 3-D Flows, *AIAA Journal*, **41**, 1882-1894.
- Dailey, L.D., Pletcher, R.H., (1996). Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time-Accurate Navier-Stokes Algorithms, *Computers & Fluids*, **25**, 791-811.
- Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J., Rodriguez-Ferran, A., (2004). Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods, in *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Volume 1: Fundamentals, John Wiley&Sons Ltd.
- Dubuc, L., Cantariti, F., Woodgate, M., Gribben, B., Badcock, K.J., Richards, B.E., (2000). A Grid Deformation Technique for Unsteady Flow Computations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, **32**, 285-311.
- Farhat, C., Geuzaine, P., Crandmont, C., (2001). The Discrete Geometric Conservation Law and the Nonlinear Stability of ALE Schemes for the Solution Flow Problems on Moving Grids, *Journal of Computational Physics*, **174**, 669-694.
- Geuzaine, P., Crandmont, C., Farhat, C., (2003). Design and Analysis of ALE Schemes with Provable Second-order Time-accuracy for Inviscid and Viscous Flow Simulations, *Journal of Computational Physics*, **191**, 206-227.
- Giatonde, A.L., (1994). A Dual-Time Method for the Solution of the Unsteady Euler Equations," *Aeronautical Journal*, **2049**, 283-291.
- Gleize, V., Le Pape, A., (2006). Low Mach Number Preconditioning for Unsteady Flow in General "ALE" Formulation, AIAA Paper 2006-687, *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, USA, 9-12 January.
- Guillard, H., Farhat, C., (2000). On the Significance of the Geometric Conservation Law for Flow Computations on Moving Meshes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 1467-1482.
- Hirt, C.W., Amsden, A.A., Cook, J.L., (1974). An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds, *Journal of Computational Physics*, **14**, 227-253.
- Jameson, A., Schmidt, W., Turkel, E., (1981). Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes, AIAA Paper 81-1259, *14th AIAA Fluid and Plasma Dynamic Conference*, Palo Alto, USA.
- Jameson, A., Baker, T.J., (1983). Solution of the Euler Equation for Complex Configurations, AIAA Paper 83-1929, *Proceedings of 6th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Danvers.
- Jameson, A., (1983). Solution of the Euler Equations for Two-dimensional, Transonic Flow by a Multigrid Method, *Applied Mathematics and Computation*, **13**, 327-356.
- Jameson, A., (1984). Transonic Flow Calculations, Mechanical and Aerospace Engineering Report, MAE 1651, Princeton University, NJ.
- Jameson, A., (1985). Multigrid Algorithms for Compressible Flow Calculations, Mechanical and Aerospace Engineering Report, MAE 1743, Princeton University, NJ.
- Jameson, A., (1991). Time Dependent Calculations Using Multigrid with Application to Unsteady Flows past Airfoils and Wings, AIAA Paper 91-1596, *AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, Hawaii, USA.
- Kuentzmann, P., (2004). Introduction to Solid Rocket Propulsion, NATO Research and Technology Organization Report, RTO-EN-023, Rhode-Saint-Genese, Belgium.
- Lupoglazoff, M., Vuillot, F., (1992). Numerical Simulation of Vortex Shedding Phenomenon in 2D Test Case Solid Rocket Motors, AIAA Paper

- 92-0776, 30th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, USA, January 6-9.
- Martinelli, L., Jameson, A., Grasso, F., (1986). A Multigrid Method for the Navier-Stokes Equations, AIAA Paper 86-0208, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV.
- Martinelli, L. Jameson, A., (1988). Validation of a Multigrid Method for the Reynolds Averaged Equations, AIAA Paper 88-0414, AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV.
- Mavriplis, D.J., Yang, Z., (2006). Construction of the Discrete Geometric Conservation Law for High-Order Time-Accurate Simulations on Dynamic Meshes, *Journal of Computational Physics*, **213**, 557-573.
- Merkle, C.L., Sullivan J.Y., Buelow, P.E.O., Venkateswaran, S., (1998). Computations of Flows with Arbitrary Equations of State, *AIAA Journal*, **36**, 515-521.
- Mulas, M., Chibbaro, S., Delussu, G., Di Piazza, I., Talice, M., (2002). Efficient Parallel Computations of Flows of Arbitrary Fluids for All Regimes of Reynolds, Mach and Grashoff Numbers, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **12**, 637-657.
- Rizzi, A., Eliasson, P., Lindbland, I., Hirsch, C., Lacor, C., Haeuser, J., (1993). The Engineering of Multiblock/Multigrid Software for Navier-Stokes Flows on Structured Meshes, *Computers & Fluids*, **22**, 341-367.
- Turkel, E., (1993). A Review of Preconditioning Methods for Fluid Dynamics, *Applied Numerical Mathematics*, **12**, 257-284.
- Turkel, E., (1999). Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics, *Annual Review in Fluid Mechanics*, **31**, 385-416.
- Thomas, P.D., Lombard, C.K., (1979). Geometric Conservation Law and its Application to Flow Computations on Moving Grids, *AIAA Journal*, **17**, 1030-1037.
- Uygun, M., Kirkköprü, K., (2007). Computation of Time-Accurate Laminar Flows Using Dual Time Stepping and Local Preconditioning with Multigrid, *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, **31**, 211-223.
- Uygun, M., Kirkköprü, K., (2007). Numerical Solution of Unsteady Compressible Flows On Moving Grids Using Dual Time Stepping, *Ankara International Aerospace Conference 2007*, Ankara, 10-12 September
- Venkatakrishnan, V., Mavriplis, D.J., (1996). Implicit Method for the Computation of Unsteady Flows on Unstructured Grids, *Journal of Computational Physics*, **127**, 380-397.
- Weiss, J., Smith, W.A., (1995). Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows, *AIAA Journal*, **33**, 2050-2057.
- Weiss, J.M., Maruszewski, J.P., Smith, W.A., (1999). Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations Using Algebraic Multigrid, *AIAA Journal*, **37**, 29-36.
- Wong, A.S.F., Tsai, H.M., Cai, J., Zhu, Y., Liu, F., (2001). Unsteady Flow Calculations with a Multi-Block Moving Mesh Algorithm, *AIAA Journal*, **39**, 1021-1029.