

Viskoelastik damar dokusunda malzeme parametrelerinin deneysel tahmini

Emin SÜNBÜLOĞLU*, Tuncer TOPRAK

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Dünyadaki ekonomik, bilimsel ve tıp açısından oldukça önemli ve gözlemlenme oranı yüksek olan ateroskleroz ve disk dejenerasyonu gibi hastalıklar, temelde yumuşak doku hastalıkları olarak adlandırılabilirler. Bu bağlamda, disiplinler arası bir araştırma konusu olan yumuşak dokularda araştırma, sosyoekonomik olarak gittikçe büyüyen bir önem arz etmektedir. Donanım ve yazılım olanaklarındaki hızlı gelişmeler, yumuşak dokuların ve ilgili patalojilerin sayısal olarak detaylı şekilde modellenbilmesine olanak tanımaktadır. Bu çalışmada, viskoelastik özellikler gösteren damar dokusu üzerinde teorik bir modelin öncelikle matematiksel altyapısı oluşturulmuş ve fiziksel büyüklükler ile gerilme ve/veya şekil değiştirme büyüklükleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Yöntem olarak, öncelikle büyük deformasyonlar yapan katıların, Lagrangian esaslara göre deformasyon kinematikleri incelenmiş ve bünye denklemleri elde edilmiştir. Bu ifadeler, temel termodinamik kanunları ile ilişkilendirilerek, üç elemanlı viskoelastik bünye denklemi modeline uygulanmıştır. Plastisite teorisinde yaygın kullanım alanı bulan çarpımsal ayrıştırma prensibi kullanılarak, viskoelastik ve saf elastik davranışlar birbirinden ayrıştırılmıştır. Buradan elde edilen ifadelerle, damar yapısı için önemli büyüklükleri göz önüne alan bir kalın boru modeli için yüklenme ve deformasyon ilişkileri elde edilmiştir. Daha sonra, öngörülen modelin içinde bulunan malzeme parametrelerinin tahmini için kurulan deney düzeneği tanıtılmıştır. Bu esnada yapılan kabullerden bahsedilmiş ve kurulan ölçüm sisteminden elde edilen statik ve/veya dinamik yüklenmelere ait verilerin işlenebilmesi için gerekli detaylar sunulmuştur. Deneysel çalışmalarla, teorik sonuçların karşılaştırılması sonucunda elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Biyomekanik, deneysel mekanik, damar dokusu, nonlinear viskoelastisite.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Emin SÜNBÜLOĞLU. sunbuloglu@itu.edu.tr; Tel: (212) 293 1300 / 2704.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Damar dokusunun viskoelastoplastik modellenmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 04.12.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 13.03.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Experimental material parameter estimation of viscoelastic arterial tissue

Extended abstract

The great majority of diseases in the (western) world, such as atherosclerosis and degeneration of intervertebral discs are diseases of soft tissues. Hence, the multidisciplinary field of soft tissue research is of crucial scientific, medical and socioeconomic importance. The fast progress in the developments of hardware and software facilities makes it possible to thoroughly investigate biological soft tissues and their pathologies on a computational basis. Since soft tissues are biological materials, which fulfill mechanical purposes and adapt to their mechanical environment (growth, remodeling and morphogenesis), it is of fundamental importance to identify the complex interactions of mechanical and biological responses.

This work lays out a viscoelastic material model for the arterial tissue. In order to correctly describe the motion of a thick-walled tubular model of an arterial specimen under combined extension, inflation and torsion loads, large deformation kinematics theory is introduced. Lagrangian practice has been applied, which is a general notion in solid mechanics of hyperviscoelastic materials. The material model is introduced in parallel, which is a non-linear three element solid when regarded with a 1-D analog to standard viscoelastic practices. Principle of multiplicative decomposition, a common practice in large deformation plasticity, is successfully applied to get an insight to time-evolution characteristics of the tissue as well as pure elastic response in a decoupled manner. The material elastic stress law and thermodynamically consistent evolution law, namely the stress-strain relations are derived.

The arterial tissue which has been modeled as a thick-walled mono-layered axisymmetric cylinder is, when explicitly stated, to be of a type that is called fiber reinforced composite. The governing equations of constitutive assumption are then represented for the fiber-reinforced model. The fiber constituents are mainly the collagen fibers that exist in bundles within a ground matrix material, known to exist mainly in the form of elastin and, within our model, passive existence of smooth muscles. The issues related to fiber-reinforced structure are the evolution of stretch of collagen fibers with ongoing deformation due to external applied loads, and the charac-

teristics of dissipative behavior due to existence of fibers.

To cope with experimental practices and realistic simulation of real life situations, the explicit relations between the stress (thus strain) values using the constitutive model and the applied loads, namely the internal pressure, the axial force and the torsional moment are successfully obtained. Due to the thick-walled tube assumption that has been the underlying base to model the arterial tissue, all the quantities had the form of a radial integration of some quantity through the wall thickness of the hollow cylinder at the deformed state, despite the constitutive assumptions have been laid in a Lagrangian manner.

Details of the test setup, that has been facilitated at the Laboratory of Strength of Materials and Biomechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Istanbul Technical University have been provided to let the readers have an insight of how the experimental system runs. The complexity involved in the loading protocols has required bringing up different sensors and techniques together. The use of high speed video imaging systems for optical strain measurement under dynamic extension, inflation and torsion have been successfully applied to obtain complete experimental data over specimens. Sample pictures and calculations from the optical strain measurement system synchronized to the loading frame control electronics have been provided to clarify the deformation data acquisition process.

Parameter estimation has then been carried out with the collected data. Required post-processing of both strain and load data have been carried, preceding the estimation processes. Various scenarios have been applied over a fibrous arterial tissue. Data from these different tests have been analyzed and relevant graphical representations of fitting have been presented. Both quasi-static and dynamic loads up to 10 Hz and up to 100% Lagrangian strains in axial and tangential directions have been applied over the specimens. The observed discrepancies between the experimental and theoretical gatherings have been commented and finally the limitations of the model and the critics to its applicability over modeling the arterial tissue have been stated.

Keywords: Biomechanis, experimental mechanics, arterial tissue, nonlinear viscoelasticity.

Giriş

Dünyadaki ekonomik, bilimsel ve tıp açısından oldukça önemli ve gözlemlenme oranı yüksek olan ateroskleroz ve disk dejenerasyonu gibi hastalıklar, temelde yumuşak doku hastalıkları olarak adlandırılabilirler. Bu bağlamda, disiplinler arası bir araştırma konusu olan yumuşak dokularda araştırma, sosyoekonomik olarak gittikçe büyüyen bir önem arz etmektedir. Donanım ve yazılım olanaklarındaki hızlı gelişmeler, yumuşak dokuların ve ilgili patolojilerin sayısal olarak detaylı şekilde modellenebilmesine olanak tanımaktadır. Yumuşak dokular da, çeşitli mekanik özellikleri haiz ve mekanik dış ortam uyarılarına göre (büyüme, yeniden modelleme, morfojeniz) kendilerini uyarlayabildiklerinden dolayı, biyolojik ve mekanik etkileşimlerin bilinmesi ve belirtilmesi çok büyük önem taşımaktadır.

Mühendislik yaklaşımı ile biyolojik dokuların incelenmesinin, klinik olarak anlamlı ve gerçekçi sonuçlar vermesi ve tıp ve mühendislik alanlarında yeni teknikler gelişmesine yardımcı olabilmesi, modellenecek malzemenin

- Kapsamlı bir deneysel veri bankası ile desteklenmesi
- Düşünülen uygulamaya yönelik temel mekanik karakteristikleri içeren bir matematiksel model ile temsil edilmesi
- Uygulanabilir, yüksek verimlilikli ve kullanımı kolay bir matematiksel altyapı ile desteklenmiş olması

gerekmektedir. Bu gereksinimlerin temel hedeflerinden biri de, deneysel ve/veya klinik ortamda gerçekleştirilmesi mümkün olmayan bazı gerçeklerin ve/veya yöntemlerin sayısal ortamda hayata geçirilmesi ve böylece bilimsel gelişime katkıda bulunulmasıdır.

Yumuşak dokularla ilgili literatürde özellikle sayısal modellemeye yönelik çok sayıda çalışma bulunmasına rağmen, kapsamlı deneysel verilerle desteklenen çalışmalar yok denecek kadar az bulunmaktadır. Bu yüzden, bu çalışma, özellikle doğrusal olmayan ve büyük deformasyonlar gösteren malzemeler, daha spesifik olarak da-

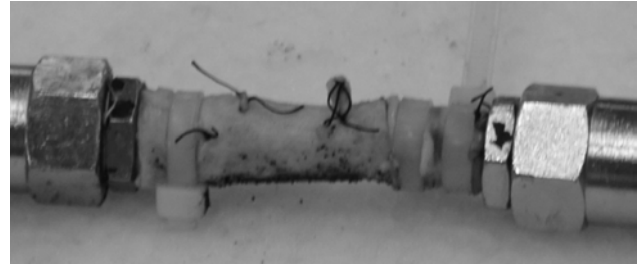
mar dokusu için deneysel veri toplanmasına ve işlenmesine yönelik olarak tasarlanmıştır. Malzeme modeli olarak, yine doğrusal olmayan ve viskoelastik bir bünye denklemi elde edilmiştir.

Teorik altyapı

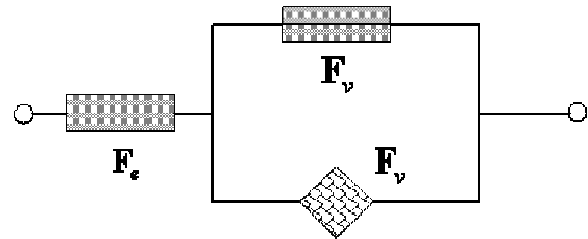
Çalışmada kullanılacak damar dokuları, genellikle silindire yakın geometrik özelliklerde olduklarından dolayı (Şekil 1, 4 ve 5), silindirik koordinatlarda bir kinematik model ve doğrusal olmayan, iki kademeli bir malzeme modeli seçilmiştir. Modelin 1 boyutlu analogisi Şekil 2'de gösterilmektedir. Şekil 2'den de görülebileceği üzere, modelin yapısı, Lee (1969) tarafından ilk defa önerilen çarpımsal ayrıştırıma oldukça uygun bir kabul sergilemektedir. Bu yüzden, toplam deformasyonun (sanki) iki adımda gerçekleştiği kabul edilir ve

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v \quad (1)$$

ayrıştırma ön kabulü yapılır.



Şekil 1. Branşman damarları özel teknik ile kapatılmış (looping) ve konnektörlere bağlanmış koyun pulmoner arteri (Plastik cerrah Dr. Burçak ERDİNÇ'in yardımı ile)



Şekil 2. 3 elemanlı viskoelastik malzeme (dik-dörtgen = yay, paralelkenar = sönüm elemanı)

Modele göre, ilk önce, referans konfigürasyon diyebileceğimiz damarın ilk hali, bir viskoelas-

tik deformasyona tabi olur. Böylece, (R, Θ, Z) ilk durum ve (ρ, ν, ζ) son koordinat bileşenleri arasında

$$\rho = \rho(R); \nu = \Theta + \varphi Z; \zeta = \Lambda Z \quad (2)$$

ilişkileri tarif edilebilir. Buradan da görülebileceği gibi, model üzerinde, radyal yönde herhangi bir kısıtlama yoktur, yani kalın cidarlı boru modeli kullanılmaktadır. Ayrıca, burulma yükleri ile oluşabilecek deformasyonlar (burulmadan dolayı oluşan kayma deformasyonları) da hesaba katılmaktadır. Eksenel uzama ise, bir test makinasına bağlı eksenel simetrik bir tüp için beklenilecek şekilde, kesit boyunca üniform olarak düşünülmektedir.

Bu büyüklükler kullanılarak elde edilen deformasyon gradyeni tensörü, kalın cidarlılık kabülünü de içermektedir

$$\mathbf{F}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{R} & \rho \varphi \\ 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (3)$$

şeklinde elde edilmektedir. benzer şekilde, viskoelastik ara konfigürasyondan toplam deformasyona ise, (ρ, ν, ζ) ile (r, θ, z) arasında

$$r = r(\rho); \theta = \nu + \phi \zeta; z = \lambda \zeta \quad (4)$$

ilişkileri tanımlanarak ulaşılır. Bu adım için elde edilen deformasyon gradyanı tensörü

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\rho} & r \phi \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (5)$$

şeklinde elde edilmektedir. Her iki durumda da, tensörlerin fiziksel bileşenleri verilmiştir. Bu

büyüklükler kullanılarak, toplam deformasyon için

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_e \mathbf{F}_\nu \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\rho} \frac{\rho}{R} & \left(\frac{r}{\rho} \rho \varphi + \Lambda r \phi \right) \\ 0 & 0 & \Lambda \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & (r \varphi + \Lambda r \phi) \\ 0 & 0 & \Lambda \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

elde edilir. Damar malzemesinin sıkıştırılmaz doğrusal olmayan bir malzeme olduğu literatürde genel kabul görmüş bir yaklaşımdır (Humphrey, 1995 ve Humphrey, 2001). Bu çalışma kapsamında da, bu kabul uygulanarak,

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}_e) = \det(\mathbf{F}_\nu) = 1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\rho}{R} \Lambda = 1 \quad (8)$$

$$\beta^2 - \rho^2 = \frac{1}{\Lambda} (B^2 - R^2) \quad (9)$$

ve benzer şekilde

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\lambda r} \quad (10)$$

$$b^2 - r^2 = \frac{1}{\lambda} (\beta^2 - \rho^2) \quad (11)$$

elde edilebilir. Böylece, kalınlık boyunca herhangi bir noktanın durumu, bilinen bir nokta ile tarif edilebilir hale gelmektedir. Burada kullanılan sembollerde, B referans durumdaki dış çap, β viskoelastik deformasyon görmüş ara konfigürasyondaki dış çap, Λ viskoelastik de-

formasyon için aksenal uzama oranı, b son haldeki dış çap, λ ara konfigürasyondan son hale aksenal uzama oranıdır.

Birim şekil deęiřtirmeler

Mühendislik hesaplarında, gerilme-şekil değiştirme bileşenleri, özellikle doğrusal olmayan modeller için Lagrange anlamında kullanılmaktadır. Böylece, referans olarak zamanla değişmeyen ilk hal kullanılır. Ara konfigürasyon için, (3) hatırlanarak

$$\mathbf{E}_v = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_v^T \mathbf{F}_v - \mathbf{I})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{\rho\Lambda}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1 & \frac{\rho}{R}\rho\phi \\ 0 & \frac{\rho}{R}\rho\phi & (\rho\phi)^2 + \Lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Lagrange birim şekil değiştirme bileşenleri hesaplanabilir. Burulma ile aksenal birim şekil değiştirme arasında bir bağlantı (coupling) olduğu hemen göze çarpmaktadır. Toplam birim şekil değiştirmeler içinse

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (13)$$

$2\mathbf{E}$ tensörünün elemanlarının matris şekilde gösterilimi, ara adımlar dahil geniş olarak,

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{R\rho}{\rho r \Lambda}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r\rho}{\rho R}\right)^2 - 1 & \left(\frac{r\rho}{\rho R}\right)\left(\frac{r\rho}{\rho}\rho\phi + \Lambda r\phi\right) \\ 0 & \left(\frac{r\rho}{\rho R}\right)\left(\frac{r\rho}{\rho}\rho\phi + \Lambda r\phi\right) & \left(\frac{r\rho}{\rho}\rho\phi + \Lambda r\phi\right)^2 + (\Lambda\lambda)^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

veya kompakt olarak

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{R}{\Lambda r}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 & \frac{r}{R}(r\phi + \Lambda r\phi) \\ 0 & \frac{r}{R}(r\phi + \Lambda r\phi) & (r\phi + \Lambda r\phi)^2 + (\Lambda\lambda)^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu sefer, çapraz etkileşimlerin çok daha karmaşık hale geldiği görülmektedir. Önemle belirtmek gerekir ki, yukarıdaki denklemlerde bulunan ρ , Λ ve ϕ parametreleri, gerçek anlamda fiziksel büyüklükler değildirler. Bu tip değişkenlere iç değişkenler adı verilmektedir. Bu değişkenlerin aldığı değerler, bünye denklemleri tarafından tayin edilir ve bir deformasyon durumu için matematiksel çözümlerle elde edilirler. Sadece elastik deformasyonlarla, dolayısı ile gerilmelerle ilgili olan birim şekil değiştirme bileşenleri ise

$$\mathbf{\Gamma}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\rho}{r\lambda}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 1 & \frac{r}{\rho}r\phi \\ 0 & \frac{r}{\rho}r\phi & (r\phi)^2 + \lambda^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

şeklinde tanımlanabilir. Ara konfigürasyon için birim şekil değiştirme hızı

$$\dot{\mathbf{E}}_v = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}_v^T \dot{\mathbf{F}}_v - \dot{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}_v^T \dot{\mathbf{F}}_v + \dot{\mathbf{F}}_v^T \dot{\mathbf{F}}_v) \quad (17)$$

olarak bulunur. Bu tensörün de simetrik olması önemlidir. Bileşenleri ise,

$$\begin{bmatrix} -\frac{R^2}{\rho^2\Lambda^2}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^2}{R^2}\frac{\dot{\rho}}{\rho} & \frac{\rho}{R}\left(\phi\dot{\rho} + \frac{1}{2}\rho\dot{\phi}\right) \\ 0 & \frac{\rho}{R}\left(\phi\dot{\rho} + \frac{1}{2}\rho\dot{\phi}\right) & \left(\Lambda\dot{\lambda} + \rho\phi(\phi\dot{\rho} + \rho\dot{\phi})\right) \end{bmatrix} \quad (18)$$

şeklinde verilebilir.

Dış yüklenmelere ait ifadeler

Bir deneysel sistemde, deformasyonların yanında yükler de kaydedildiği için, iki büyüklük arasında malzeme katsayılarının tahmini için bir geçiş formülasyonu elde edilmelidir. Böylelikle, deneysel ve sayısal olarak elde edilen büyüklükler bir araya getirilerek karşılaştırılabilirler. Buradaki deney düzeneğinde, kalın cidarlı borular için iç basınç, aksenal çekme yükü ve burulma

momenti için gerilme/deformasyon/dış zorlanma ifadelerinin elde edilmesi gereklidir.

Denge denklemi

Lineer momentumun korunması prensibinden elde edilen denge denklemi, kütle kuvvetleri ve ivmelerin olmadığı hal için

$$\nabla \sigma = 0 \quad (19)$$

olarak elde edilebilir. Bu denklem, doğal olarak deformasyona uğramış halde tanımlanan bir denklemdir. İhmal edilmiş terimler ve yükleme koşullarının simetrisi göz önüne alındığında, denge denklemlerinden, tensörel kalın cidarlı boru modeli için sadece

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (20)$$

denkleminin terimleri özdeş olarak sıfıra eşit olmaz. Bu denklem kullanılarak, iç basınç için

$$P_i = \int_a^b (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \frac{1}{r} dr \quad (21)$$

denklemini, aksenal çekme yükü için

$$F_{AX} - P_i \pi a^2 = \pi \int_a^b (2\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) r dr \quad (22)$$

denklemini ve burulma momenti için

$$M_b = 2\pi \int_a^b \sigma_{z\theta} r^2 dr \quad (23)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemler, sıkıştırılmaz malzemelere dair Lagrange çarpanı p yi içermemektedirler. Yine denklemlerin sınırları, deformasyona uğramış aksenal simetrik tüp için iç yarıçaptan (a) dış yarıçapa (b) tanımlanmıştır. Sıkıştırılmazlıktan dolayı bu iki büyüklük de birbirinden bağımsız değildir.

Malzeme modeli

Üç elemanlı bir viskoelastik model için, bünye denklemleri, doğrusal olmayan halde, izotermal ikinci kanun ifadesi olan

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (24)$$

ifadesini sağlayacak şekilde elde edilebilir. Elde edilen şekil değiştirme ifadeleri yerine konur ve birim şekil değiştirme hızları arasındaki

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}_v + \mathbf{F}_v^T \mathbf{L}_v^T \mathbf{\Gamma}_e \mathbf{F}_v \\ &+ \mathbf{F}_v^T \mathbf{\Gamma}_e \mathbf{L}_v \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_v^T \dot{\mathbf{\Gamma}}_e \mathbf{F}_v \end{aligned} \quad (25)$$

bağıntısı da göz önüne alınırsa, malzemede depolanan toplam elastik enerji için

$$\Psi = \Psi_e(\mathbf{\Gamma}_e) + \Psi_v(\mathbf{E}_v) \quad (26)$$

kabulü ile

$$\sigma = \mathbf{F}_e \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{\Gamma}_e} \mathbf{F}_e^T \quad (27)$$

gerilme ifadesi ile, viskoelastik kayıpların bir potansiyelden türediği varsayımı altında, ara konfigürasyon için evrimsel denklem

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{\Gamma}_e} \mathbf{C}_e + \mathbf{C}_e \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{\Gamma}_e} \right) - \mathbf{F}_v \left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial \mathbf{E}_v} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}_v} \right) \mathbf{F}_v^T = \mathbf{0} \quad (28)$$

elde edilir.

Elastisite modeli

Literatürde, özellikle damar duvarını saf elastik olarak düşünen malzeme modeli için çok sayıda çalışma vardır. Bu çalışmalar içerisinde, Holzapfel ve diğerleri (2000) tarafından tanımlanan malzeme modeli, elastik kısmı temsil eden malzeme olarak kullanılacaktır. Böylece, saf elastik ve viskoelastik bölümlerde şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonları

$$\Psi_e = C_1^e (I_1^e - 3) + \frac{C_2^e}{\alpha^e} \left[e^{\alpha^e (I_4^e - 1)^n} + e^{\alpha^e (I_6^e - 1)^n} - 2 \right] \quad (29)$$

$$\Psi_v = C_1^v (I_1^v - 3) + \frac{C_2^v}{\alpha^v} \left[e^{\alpha^v (I_4^v - 1)^n} + e^{\alpha^v (I_6^v - 1)^n} - 2 \right] \quad (30)$$

olarak kabul edilecektir. C_1^e , C_2^e ve α^e saf elastik kısım için, C_1^v , C_2^v ve α^v viskoelastik kısım

için malzeme parametreleridir ve bu çalışmada birbirlerine eşit kabul edilmektedirler. Burada dikkat çeken ilave büyüklükler I_4^e , I_6^e , I_4^v ve I_6^v dir. Bu büyüklükler, fiber uzaması ile damar dokusundaki üstel sertleşmeyi ifade edebilmek için tanımlanan ve fiber uzama oranlarının karesine denk olan sanki-invaryantlardır. 4 ve 6 alt indisleri dokuda bulunan iki farklı fiber yönünü temsil etmekte, e ve v üstelleri de uzama miktarının hangi konfigürasyona göre olduğunu belirtmektedir. Doğrusal olmayan elastisitedeki kısmi türevler

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial \Gamma_e} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial I_1^e} \Gamma_e + \frac{\partial \Psi_e}{\partial I_4^e} \Gamma_e + \frac{\partial \Psi_e}{\partial I_6^e} \Gamma_e \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Psi_v}{\partial \mathbf{E}_v} = \frac{\partial \Psi_v}{\partial I_1^v} \mathbf{E}_v + \frac{\partial \Psi_v}{\partial I_4^v} \mathbf{E}_v + \frac{\partial \Psi_v}{\partial I_6^v} \mathbf{E}_v \quad (32)$$

şeklinde zincir kuralına göre alınır. Tanımlardan yola çıkılarak, (Holzapfel vd., 2000)

$$I_4^v = \mathbf{M}_4^0 : \mathbf{C}^v = \mathbf{M}_4^0 : (2\mathbf{E}_v + \mathbf{I}) = 2\mathbf{E}_v : \mathbf{M}_4^0 + 1 \quad (33)$$

$$I_6^v = \mathbf{M}_6^0 : \mathbf{C}^v = \mathbf{M}_6^0 : (2\mathbf{E}_v + \mathbf{I}) = 2\mathbf{E}_v : \mathbf{M}_6^0 + 1 \quad (34)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial I_4^v}{\partial \mathbf{E}_v} = 2\mathbf{M}_4^0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial I_6^v}{\partial \mathbf{E}_v} = 2\mathbf{M}_6^0 \quad (36)$$

elde edilir. Benzer formülasyonlar I_4^e , I_6^e için de elde edilir. Birinci izotropik deformasyon invariantının birim şekil değiştirmeye göre türevi ise sadece 2 dir.

Disipasyon modeli

Viskoelastik disipasyonların bağlandığı potansiyel için bir fonksiyon kabulü esnasında, elastisitedekine benzer olarak malzemedeki

kollajen fibrillerinin üzerinde oluşan kayma gerilmelerinin kompozit baz malzemesi ile izafi hareket ediyormuş gibi kayıpsal bir etki yarattığı kabul edilerek, bu kayma deformasyonu hızlarının kayıpla ilişkilendirilmesi tercih edilmiştir. Kayma birim şekil değişimi, örnek olarak 4 yönündeki fibriller için

$$\gamma_4 = \mathbf{n}_4^0 \mathbf{E}_v \mathbf{m}_4^0 \quad (37)$$

verilir. Fakat bu büyüklük simetrik değildir.

$$\gamma_4 = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_v : (\mathbf{m}_4^0 \otimes \mathbf{n}_4^0) + \mathbf{E}_v : (\mathbf{n}_4^0 \otimes \mathbf{m}_4^0)] + \frac{1}{2} [\mathbf{E}_v : (\mathbf{m}_4^0 \otimes \mathbf{n}_4^0) - \mathbf{E}_v : (\mathbf{n}_4^0 \otimes \mathbf{m}_4^0)] \quad (38)$$

ile dilatasyonel kayma miktarı çözümlenebilir. Burada

$$\mathbf{D}_4^0 = \frac{1}{2} [(\mathbf{m}_4^0 \otimes \mathbf{n}_4^0) + (\mathbf{n}_4^0 \otimes \mathbf{m}_4^0)] \quad (39)$$

tanımlanabilir ve bütün kayıpların bu büyüklüğe bağlı olacağı gösterilebilir. Sonuçta, disipasyon potansiyeli olarak, elastisiteye benzer yaklaşımlarla

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\eta_f}{\alpha_f} \left(e^{\alpha_f (\dot{\gamma}_4)^n} + e^{\alpha_f (\dot{\gamma}_6)^n} - 2 \right) + \frac{1}{2} \eta_{GS} [dev(\dot{\mathbf{E}}_v) : dev(\dot{\mathbf{E}}_v)] \quad (40)$$

önerilmektedir.

Böylelikle viskoelastik malzemeler için tam anlamıyla bir malzeme modeli ortaya konmuş olmaktadır.

Deney düzeneği

Yukarıdaki bölümlerde detaylı olarak verilen malzeme modeline uygun parametrelerin tahmin edilebilmesi için gerçekleştirilmiş deneyler, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Mukavemet ve Biyomekanik Laboratuvarında kurulmuş deney düzeneği yardımı ile tamamlanmıştır. Deney düzeneğinin bir resmi Şekil

3’de, düzeneğe bağlanan damar numunesinin bağlantı şekli ve yakından görünüşü ise Şekil 4’de verilmiştir. Kullanılan temel bileşenler, MTS 858 Mini Bionix II Axial/Torsional test makinası, 50N/2Nm çekme/burulma kuvvetölçeri, 1-bar basınç sensörü, kontrollü su pompası, sıcak su banyosu, yüksek hızlı kameralar, optik deformasyon ölçüm yazılımı ve aydınlatma sistemi olarak özetlenebilir.



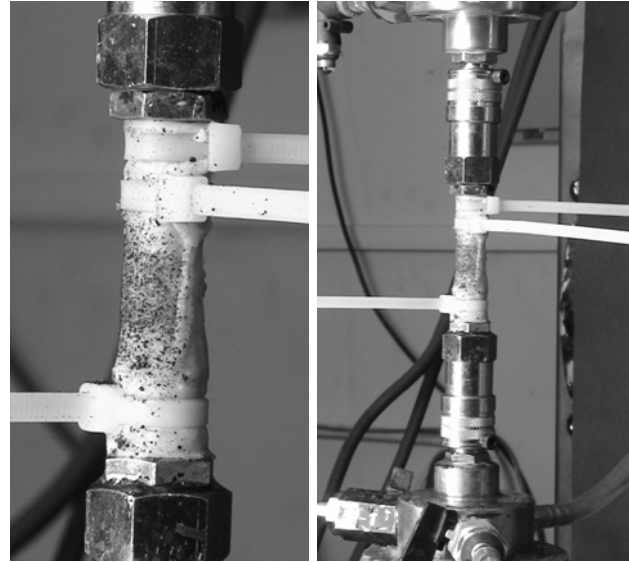
Şekil 3. Test sistemine ait genel görünüş (İTÜ Makina Fakültesi Biyomekanik Laboratuvarı)

Deneylerden elde edilmiş gerçek damarın deforme olmuş hallerine ait deformasyon grafikleri ve her kesim için örnek olarak belirli bir bölgedeki aksenal birim şekil değiştirme miktarı Şekil 5-7’de verilmiştir. Bu örnek yükleme protokollerinde, damar üzerinde karmaşık aksenal yük / iç basınç / burulma zorlanması uygulanmaktadır.

Özellikle doğrusal olmayan malzemeler ve bu tip malzemelere ilişkin gerçekleştirilen parametre tahmini çalışmalarında, en önemli hususlardan birisi deneysel verilerin şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu uzayında mümkün olduğunca çok noktayı taramasının gerekliliğidir. Böyle olmadığı hallerde, en basit izotropik lastik modellerinde bile, malzeme katsayılarının tek aksenal deneylerle tayini, malzeme modelinin sayısal olarak gerçekleştirilen çok aksenal yük-

melerde genellikle gerçek durumdan oldukça farklı (genellikle aşırı rijit) davranışlar göstermesine sebep olmaktadır.

Herhangi bir parametre tahmini algoritması, aslında bir eğri uydurma işlemi olarak düşünülebilir. Bu durumda, işlem, hataların normlarının en aza indirilmesi problemine dönüşür. Maalesef, özellikle karmaşık malzeme modelleri ve malzeme tiplerinde tek bir seferde bütün parametrelerin tahmini genellikle mümkün olamamaktadır. Bu yüzden, bazı deneylerin aynı numune üzerinde tekrarlanması zorunluluğu doğmaktadır. Bu da, biyolojik dokularda çeşitli problemler yaratabileceğinden, dikkat edilmesi gereken bir husustur.

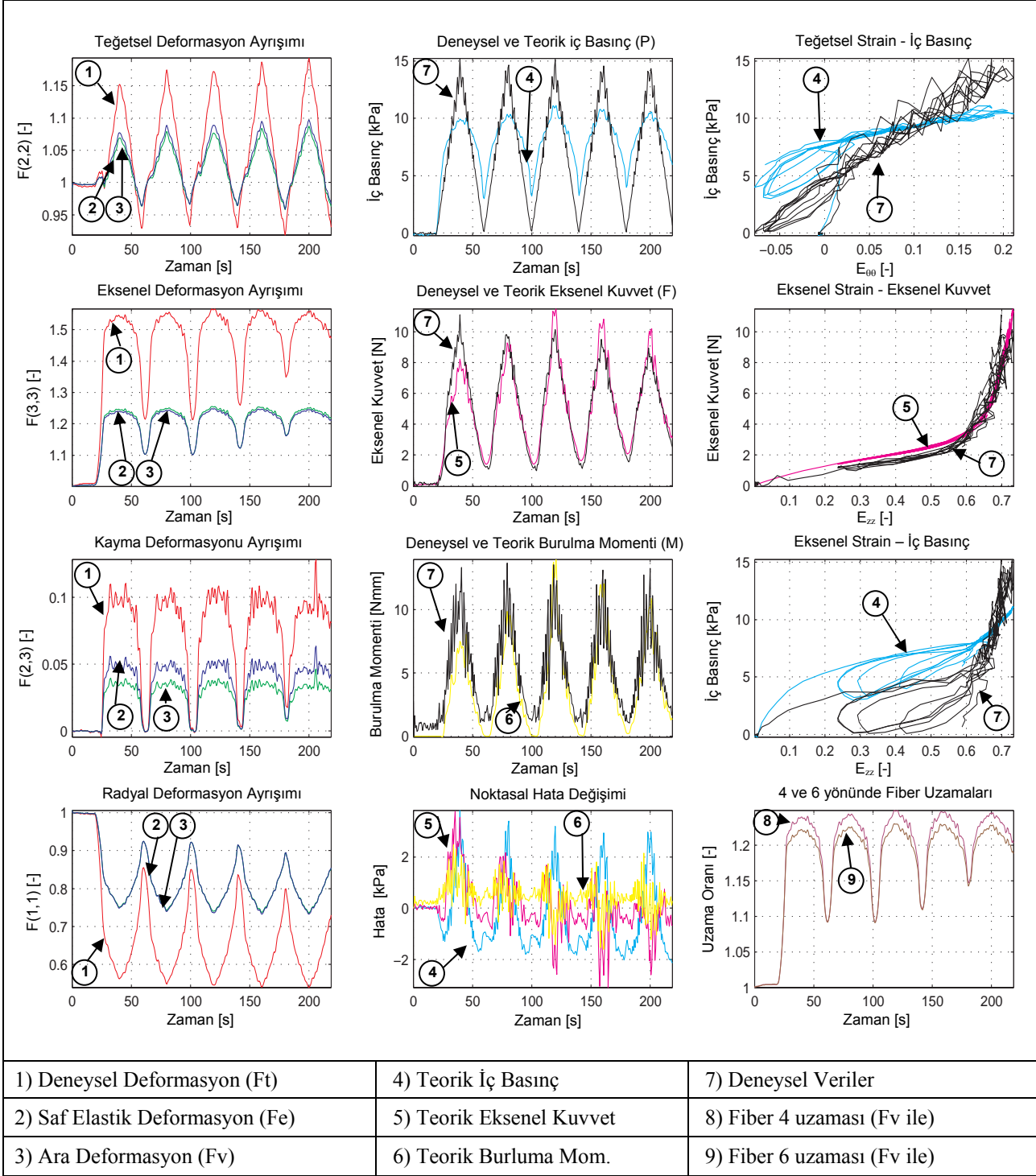


Şekil 4. Test sistemine bağlanmış optik ölçüme hazır damar numunesi

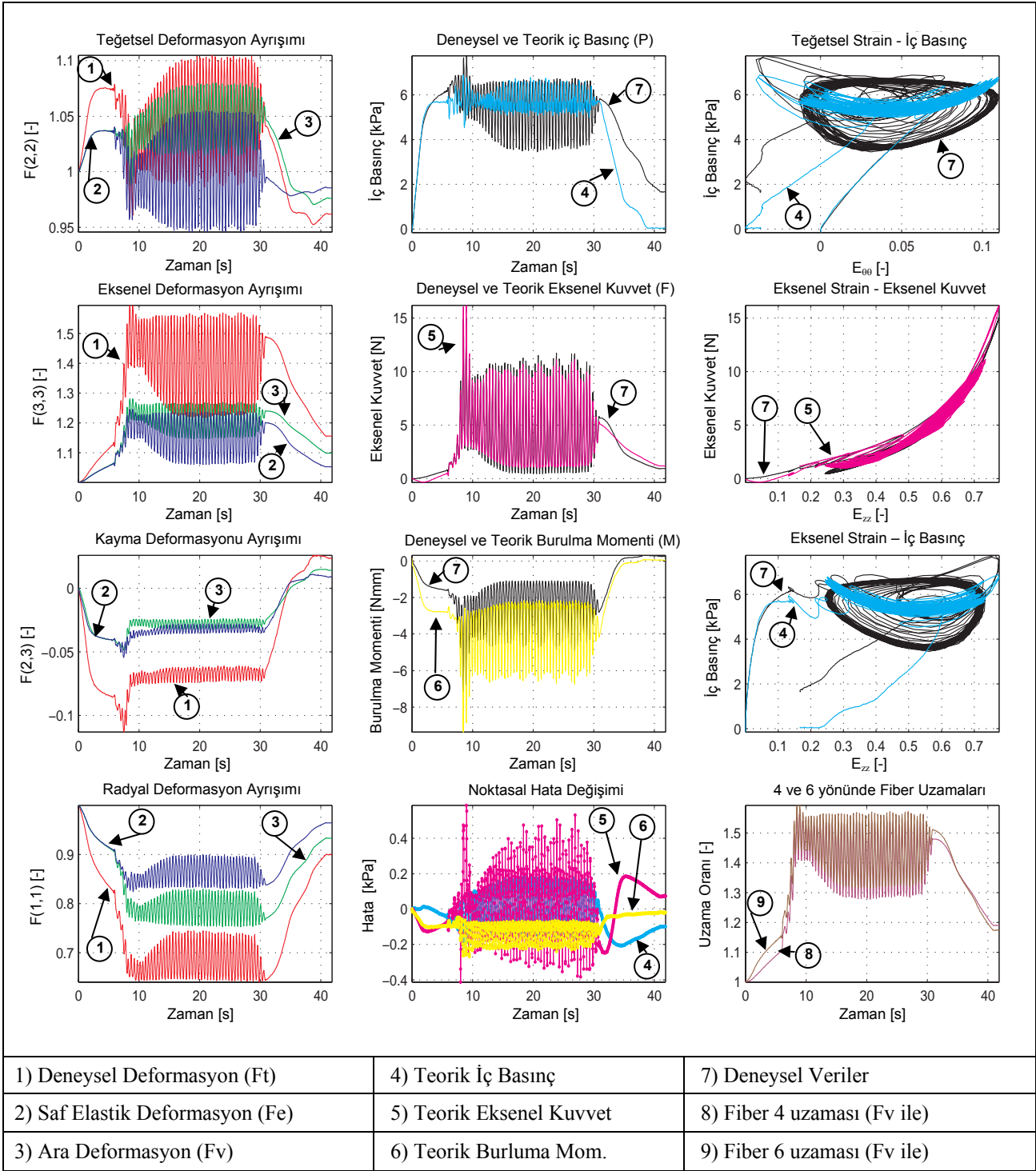
Örnek hesaplamalar

Aynı fazda statik iç basınç, aksenal yük ve burulma momenti uygulanması durumu (A)

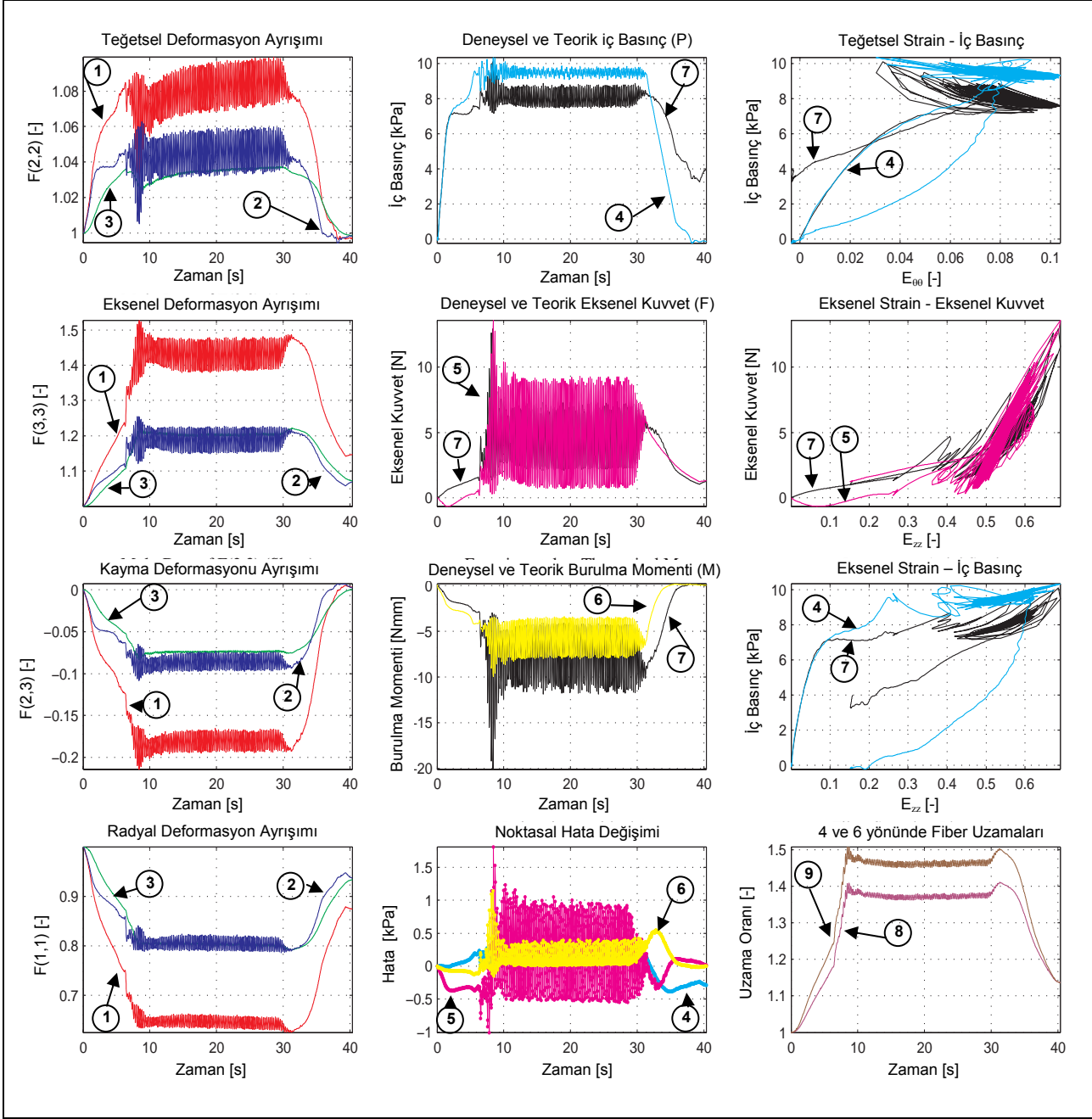
İlk deneme olarak, 0-15 kPa arası iç basınç ve 0-10 N arası aksenal çekme yükü altında çeşitli deneyler gerçekleştirilmiştir. Yükleme süresi yaklaşık 20 saniyedir. Dolayısı ile, dinamik etkilerin (disipasyon, atalet) olmadığı çok rahatlıkla kabul edilebilir. Damar çapı 15 mm, cidar kalınlığı 3 mm’dir. Fiber açıları, yüksüz halde 4 numaralı fiber yönü ve 6 numaralı fiber yönü için yatay aksenal ± 72 derece olacak şekilde simetriktir.



Şekil 5. Örnek hesaplama - (A) ile belirtilen bölümde sözü edilen yükleme durumu için damar üzerinden ölçülen büyüklükler ve hesaplanan büyüklüklerin zamanla değişiminin karşılaştırmalı grafikleri



Şekil 6. Örnek hesaplama – (B) ile belirtilen bölümde sözü edilen yükleme durumu için damar üzerinden ölçülen büyüklükler ve hesaplanan büyüklüklerin zamanla değişiminin karşılaştırmalı grafikleri



1) Deneysel Deformasyon (Ft)	4) Teorik İç Basınç	7) Deneysel Veriler
2) Saf Elastik Deformasyon (Fe)	5) Teorik Eksenel Kuvvet	8) Fiber 4 uzaması (Fv ile)
3) Ara Deformasyon (Fv)	6) Teorik Burluma Mom.	9) Fiber 6 uzaması (Fv ile)

Şekil 7. Örnek hesaplama – (C) ile belirtilen bölümde sözü edilen yüklenme durumu için damar üzerinden ölçülen büyüklükler ve hesaplanan büyüklüklerin zamanla değişiminin karşılaştırmalı grafikleri

Şekil 5’de tüm modelin, toplam farklar üzerinden normalize edilmiş şekilde 10^{-3} ’den daha iyi hassasiyetle yakınsamış hali verilmektedir.

Aynı fazda dinamik iç basınç ve eksenel yük uygulanması durumu (B)

Aynı numunede, ilk deneme olarak, 0-5 kPa arası (sabit) iç basınç ve 0-10 N arası eksenel çekme yükü altında çeşitli deneyler gerçekleştirilmiştir. Eksenel yüklenme, belirli bir ön değer verildikten sonra 2 Hz ile dinamik olarak etki ettirilmiştir. Sistemde burulma momenti ve açısı verilmemiştir, buna rağmen doğal numune üzerinde bir miktar kayma deformasyonu kendiliğinden ortaya çıkmıştır.

Şekil 6’da tüm modelin, toplam farklar üzerinden normalize edilmiş şekilde 10^{-3} ’den daha iyi hassasiyetle yakınsamış hali verilmektedir.

Karmaşık dinamik iç basınç, burulma momenti ve eksenel yük uygulanması durumu (C)

İkinci örnek test protokolü olarak, 0-8 kPa arası statik iç basınç ve 0-10 N arası eksenel çekme yükü altında çeşitli deneyler gerçekleştirilmiştir. Eksenel yüklenme, belirli bir ön değer verildikten sonra 4 Hz ile dinamik olarak etki ettirilmiştir. Statik olarak, 20 derecelik bir burulma açısı verilmiştir ve sabit tutulmuştur. Bu durum, fiberlerin uzamasının farklılığı dikkate alınarak kolaylıkla gözlemlenebilir.

Şekil 7’de tüm modelin, toplam farklar üzerinden normalize edilmiş şekilde 10^{-2} ’den daha iyi hassasiyetle yakınsamış hali verilmektedir. Bu model için daha iyi bir yakınsama elde edilememiştir.

Sonuçlar

Bu çalışma kapsamında, yumuşak dokular, veya daha genel bir uygulama alanı olarak, doğrusal olmayan bir malzeme ve deformasyon durumu için, parametre tahmini gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, öncelikle teorik ifadeler elde edilmiş, daha sonra bir malzeme modeli

kabul edilerek bu model içerisindeki çeşitli parametreler tahmin edilmeye çalışılmıştır.

Literatürde, doğrusal olmayan malzemeler ve özellikle kompozit malzemeler için deney verisi çok az bulunmakta, fakat bu tip malzemelerin kullanımı gittikçe yaygınlaşmaktadır. Bu yüzden, bu çalışmadaki gibi bir yöntemin oluşturulması, biyomekanik olarak dokuların modellenmesi dışında, mühendislik malzemelerinin uygulamaları açısından da oldukça yüksek önem içermektedir. Kurulan orijinal deney düzeneği ile, yumuşak ve büyük deformasyonlar yapan kompozit damar dokusu üzerinde deneysel çalışmalar gerçekleştirilmiş ve çok eksenli yüklenme durumunda damar duvarının davranışına ait büyüklükler deneysel olarak elde edilmiştir. Kurulan düzenek, mühendislik malzemeleri için de kolaylıkla genelleştirilebilir. Aynı özellikler, kullanılan parametre tahmini algoritması için de geçerlidir. Örnek sayısal hesaplamalarla, sistemin performansı test edilmiştir. Bu arada, damar dokusu için öne sürülen malzeme modelinin her yüklenme koşulu için gerçek duruma uygun sonuçlar vermediği gözlemlenmiştir.

Bu çalışmanın, özellikle değişik malzeme modellerinin ve bu malzemelere ait çok sayıda numunenin değişik yüklenme koşulları altında incelenmesi için yol gösterici olması amaçlanmakta ve araştırmacıların ilgisine sunulmaktadır.

Kaynaklar

- Holzapfel, G.A., Gasser, T.C. ve Ogden R.W., (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *Journal of Elasticity*, **61**, 1-48.
- Humphrey, J. D., (1995). Mechanics of arterial wall: Review and directions, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, **23**, 1-162.
- Humphrey, J. D., (2001). *Cardiovascular Solid Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- Lee, E. H., (1969). Elastic-plastic deformations at finite strains, *Journal of Applied Mechanics*, **36**, 1-6.