

İkinci derece Newton yöntemiyle mükemmel iletken bir cismin şeklinin bulunması

Necmi Serkan TEZEL*, Selçuk PAKER

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Zamanda harmonik dalgaların ters saçılma problemi radar, sonar, tahribatsız değerlendirme, geofizik, tıbbi görüntüleme gibi uygulamalar için temel öneme sahiptir. Temel olarak, bu uygulamalarda bilinmeyen cisimden saçılan dalganın ayırık noktalarda ölçülmesiyle elde edilen veri kullanılarak saçıcının şekil, konum, elektromagnetik parametreleri gibi özellikleri bulunur. Bu çalışmada, düzlemsel bir dalga ile aydınlatılmış rastgele kesitli silindirik mükemmel iletken bir cisimden saçılan alanların uzak alan ölçümlerinden şeklinin bulunması yeni bir yöntem olan ikinci dereceden Newton metoduyla ilk kez bu çalışmada incelenmiştir. Bu yöntem Newton iterasyonu ve dekompozisyon metodunun daha gelişmiş bir şeklidir. Buradaki iteratif yöntemin ana fikri Huygen prensibini kullanmaktır yani saçılan alanı tek tabakalı bir potansiyelle ifade etmektir. Saçıcının alınan bir yaklaşıklık için bu Tikhonov regülarizasyonu ile çözülebilen birinci dereceden ill-posed bir integral denklem elde edilir. Daha sonra, ikinci dereceden Taylor açılımıyla mükemmel iletken sınır koşulu sağlanacak şekilde cismin şekli değiştirilir. İterasyon yönteminde bu iki adım belirlenmiş bir durma koşulu sağlanana kadar devam ettirilir. Bu yöntemin temel avantajları her bir iterasyonda düz probleminin çözümünün gerekmemesi ve birinci dereceden Newton yöntemine göre arzulanan bir doğruluğa ulaşmak için daha az iterasyon gerektirmesidir. Önerilen yöntem yakın alan ve sınırlı alan ölçümlerinin saçılan alan olarak kullanılması durumuna kolayca geliştirilebilir.

Anahtar Kelimeler: Newton iterasyonu, ters saçılma, integral denklemler.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Necmi Serkan TEZEL. tezeln@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 36 35.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "A second order Newton Method for reconstruction of perfectly electric conducting objects" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 05.04.2010 tarihinde dergiye ulaşmış, 04.05.2010 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Bu makaleye "Tezel, N.S., Parker, S., (2011) 'İkinci derece Newton yöntemiyle mükemmel iletken bir cismin şeklinin bulunması', İTÜ Dergisi/D Mühendislik, 10: 1, 135-142" şeklinde atıf yapabilirsiniz.

A second order Newton method for reconstruction of perfectly electric conducting objects

Extended abstract

Inverse scattering problems for time harmonic waves are of fundamental importance in applications such as radar and sonar, nondestructive evaluation, geophysical exploration, medical imaging and others. In principle, in these applications the wave scattered by an unknown object is measured at a number of discrete locations and information such as shape parameters, location parameters and electromagnetic parameters of the scatterer are extracted from these data.

In this study, a new second order Newton method for reconstructing the shape of a arbitrary cylindrical perfectly electrical conducting (PEC) scatterer from the measured far-field pattern for scattering of time harmonic plane waves is presented the first time in this thesis. This method extends a hybrid between regularized Newton iterations and decomposition methods. The main idea of our iterative method is to use Huygen's principle, i.e., represent the scattered field as a single-layer potential. Given an approximation for the boundary of the scatterer, this leads to an ill-posed integral equation of the first kind that is solved via Tikhonov regularization. Then, in a second order Taylor expansion, the PEC boundary condition is employed to update the boundary approximation. In an iterative procedure, these two steps are alternated until some stopping criterium is satisfied. Main advantages of method is that method does not need forward solver in each iteration step and needs less iteration than first order Newton method in order to obtain desired accuracy. Although there are a few results available on the convergence of regularized Newton iterations for inverse obstacle scattering problems, this issue is not satisfactorily resolved. Despite the progress made with this aspect, so far it has not been clarified whether the general results on the solution of ill-posed nonlinear equations in a Hilbert space setting are applicable to inverse obstacle scattering or, in general, to inverse boundary value problems in the frame work of solving the operator equation. This remark also implies to the convergence results of researches on the second order method with respect to its applicability for the inverse obstacle scattering problem. The more problem oriented approaches for a convergence analysis suffers from the restrictive

assumption of a non vanishing normal derivative of the total field on the boundary ∂D in the case of exact data. Furthermore, in the analysis for noisy data, convergence for the noise level tending to zero, as usual, requires a stopping rule and with this particular rule the method has not yet been numerically implemented.

These comments also apply to the case of the first order method of Kress and Serranho. At present only convergence results in the spirit of Potthast are available in literature. Therefore, we view it as legitimate to present our second order variant of this approach without a detailed convergence analysis and confine ourselves to some heuristic considerations. Of course, as in all of the iterative methods for the inverse obstacle scattering problem, the ill-posedness corrupts the high order convergence. Here, the ill-posedness enters through the integral equation of the first kind leading to inevitable errors occurring in its regularized solution. It is to be expected that a convergence analysis with respect to the noise level can be carried out analogous to the first order method. We refrain from working out the details since the result would be of a qualitative character only and would not lead to the possibility for a quantitative comparison on the convergence for the first and second order method. However, from the better convergence order for the exact data case one might expect some advantages in the numerical performance. Indeed, our numerical examples in the next section illustrate an improvement in the quality of the reconstructions and the speed of convergence connected with an increase in the stability with respect to noisy data. Proposed Newton reconstruction methods can be extended for reconstruction of perfectly electric conducting (PEC) objects located on known domain by using the fundamental solution of Helmholtz equation on known domain and its far field pattern and using the incident field as field in the absence of the PEC object. Fundamental solution of Helmholtz equation on known domain and Field in the absence of the PEC object are well known direct scattering problem. Proposed method can be easily extended for limited angular and near field measurements of scattered fields. Proposed method is described in detail and illustrated its feasibility through examples with exact and noisy data.

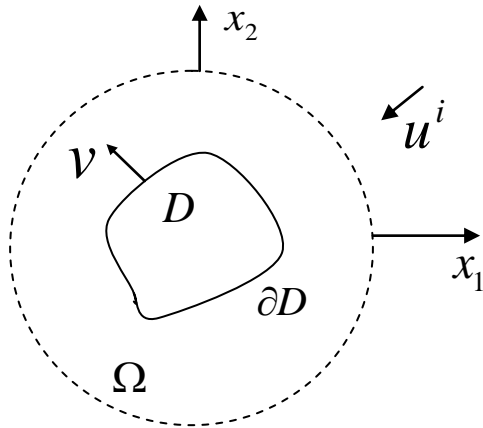
Keywords: Newton method, inverse scattering, integral equations.

Giriş

Zamanda harmonik dalgaların ters saçılma problemi radar, sonar, tahribatsız test ve tıbbi görüntüleme gibi uygulamalara sahiptir. Temel olarak, bu uygulamalarda bilinmeyen cisimden saçılan dalga ayrık birçok noktada ölçülerek bu datadan cismin şekil, konum, elektromagnetik parametreleri gibi parametreleri çıkartılır. Ters saçılma problemleri akustik, elastik ve elektromagnetik dalgaların yayılımını dalga denklemleriyle modeller. Bu ise ters saçılma problemlerini non-linear olarak modellenmesini gerektirir.

Bu çalışmada, mükemmel iletken cisimlerin uzak alan ölçümleriyle şeklinin bulunmasını yeni geliştirdiğimiz ikinci derece Newton yöntemiyle incelemekteyiz.

Bu yöntem regülize edilmiş Newton iterasyonu ve dekompozisyon metodu arasında bulunan ve Kress ve Serranho'nun makalelerinde incelenmiş (Kress, 2003; Kress ve Serranho, 2005; Kress ve Serranho, 2007; Serranho, 2006; Serranho 2007) olan hibrid metodun daha gelişmiş halidir. Problemin geometrisi şekil 1'de verilmiştir. Bu yöntemin temel avantajı her bir iterasyon adımında düz problemin çözümüne gerek duymamasıdır. Zamana bağımlılık $e^{-i\omega t}$ farz edilmiş ve çalışma boyunca çıkarılmıştır.



Şekil 1. Problemin geometrisi

Sınırsız bir uzayda verilen $D \subset R^2$ cisminin düzgün sınırı ∂D olsun. Gelen alan u^i olduğunda, düz saçılma problemi $u = u^i + u^s$ olarak verilen toplam alanı bulmaktan ibaret olup

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{in } R^2 / D \quad (1)$$

Helmoltz denklemini ve cismin yüzeyinde

$$u = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (2)$$

PEC koşulunu sağlar. Saçılan alan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad r = |x| \quad (3)$$

ile verilen Sommerfeld radyasyon koşulunu homojen olarak tüm doğrultular için sağlar. Bu koşul ise saçılan alanın

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4)$$

formunda olmasını gerektirir. Burada u_∞ uzak alan paterni olup birim daire Ω üzerinde tanımlanmıştır. Bu çalışmada ilgilendiğimiz ters saçılma problemi bir veya birçok düzlem dalga aydınlatması için verilen saçılan alanın uzak alan u_∞ bilgisinden cismin şeklinin bulunmasıdır. Burada formüle edeceğimiz ters saçılma problemi saçılan alan verisinin cismin şekline sürekli bağımlı olmaması sebebiyle kötü tanımlıdır. Bu kötü tanımlılık Tikhonov regülasyonu ile düzeltilir.

Bu algoritma saçılan alanın seçilen ilk tahmini yüzey Γ_0 üzerinde Green formülüyle

$$u^s(x) = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) H_0^{(1)}(k|x-y|) ds(y), \quad (5)$$

$$x \in R^2 \setminus \bar{\Gamma}_0$$

şeklinde ifadesiyle başlayıp bu ifadenin uzak alan paterni

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \quad (6)$$

$$\hat{x} \in \Omega$$

şeklinde verilir. Burada $H_0^{(1)}(\cdot)$, 0. dereceden birinci cins Hankel fonksiyonunu göstermekte olup v ise dışarıya doğru olan birim vektördür. (6) ifadesini ölçülen uzak alan patterni u_∞ için bir veri denklemi olarak görebiliriz. ∂D sınırının bir yaklaşıklığı için, (6) denklemini bilinmeyen $\varphi := -\partial u / \partial v$ akısı için çözeriz. Daha sonra (5) ifadesini kullanarak ilk seçilen yaklaşık yüzey üzerindeki saçılan alanı ve toplam alanı buluruz. Bu alanı yüzey normali doğrultusunda türevleri içeren ikinci derece Taylor serisine açıp (2) ile verilen sınır koşulunda yerine koyarsak aradığımız yüzey için yeni bir yaklaşıklık bulunur. Bu iterasyon önceden belirlenmiş bir kriter sağlanıncaya kadar devam ettirilir.

İkinci derece Newton yöntemi

Sınırı ∂D ile belirlenmiş cisim $u^i = e^{ikx.d}$ formundaki propagasyon doğrultusu $d \in \Omega$ olan düzlem dalga ile aydınlatılmıştır. Buradaki problemimiz saçılan alanın uzak alan ölçümleri olan $u_\infty(\hat{x})$, $\hat{x} \in \Omega$ den cismin sınırını bulmaktır. Burada cismin sınırını bulmak için seçtiğimiz ilk tahmini sınırı Γ_0 olsun. k^2 'nin Γ_0 'ın içinin negatif Laplasyenin Dirichet özdeğeri olması koşulu ile saçılan alan Γ_0 ' dışında tek tabakalı bir potansiyel olarak

$$u^s(x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) H_0^{(1)}(k|x-y|) ds(y), \quad (7)$$

$$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0$$

ifade edilebilir. Bu ifadenin uzak alanı ise

$$\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) e^{-ik\hat{x}.y} ds(y) = u_\infty(\hat{x}), \quad (8)$$

$$\hat{x} \in \Omega$$

şeklinde olup bu ifade bilinmeyen φ için birinci dereceden bir integral denklemdir. Bu integral denklemin çekirdeğinin analitik olması sebebiyle kötü tanımlıdır. Fakat $S_\infty : L^2(\Gamma_0) \rightarrow L^2(\Omega)$ şeklinde tanımlanan operator

$$(S_\infty \varphi)(\hat{x}) := \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) e^{-ik\hat{x}.y} ds(y), \quad (9)$$

$$\hat{x} \in \Omega$$

bire-bir ve yoğun olduğundan (8) ile verilen integral denklemin Tikhonov regülarizasyonlu stabil bir çözümü (8) denklemini

$$\alpha \varphi_a + S_\infty^* S_\infty \varphi_a = S_\infty^* u_\infty \quad (10)$$

ile değiştirerek bulunabilir. Burada α pozitif bir regülarizasyon parametresi olup S_∞^* ise S_∞ 'un adjoint operatörü olup

$$(S_\infty^* \varphi)(\hat{x}) := \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}) e^{ik\hat{x}.y} ds(\hat{x}) \quad (11)$$

$$\hat{x} \in \Omega$$

ile verilir. Cismi bulma algoritmasını daha açık ifade etmek için Γ_0 sınırını parametrik olarak

$$\Gamma_0 = \{z_0(t) : t \in [0, 2\pi)\} \quad (12)$$

şeklinde göstereyim. Burada $z_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 2π periyodik bir fonksiyondur. (2) ile verilen sınır koşulunun sağlandığı yeri bulmak için toplan alanı Γ_0 'ın normal doğrultusunda ikinci dereceye kadar Taylor serisine açarız. Böylece,

$$\Gamma_1 = \{z_1(t) = z_0(t) + h(t)v_0(t) : t \in [0, 2\pi)\} \quad (13)$$

formunda bir yeni yaklaşım buluruz. Burada v_0 , Γ_0 yüzeyinde dışa doğru birim normal vector olup $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye yeterince küçük 2π periyodik bir fonksiyondur. (12) parametrik gösterilimi ile normal vektör

$$v_0(t) = \frac{[z_0'(t)]^\perp}{|z_0'(t)|} \quad (14)$$

ile ifade edilebilir. Burada $a = (a_1, a_2)$ olmak üzere $a^\perp = (a_2, -a_1)$ olarak tanımlanmıştır. Daha

sonra update fonksiyonu h 'yı bulmak için ikinci derece Taylor formülü

$$u \circ z_0 + \frac{\partial u}{\partial v} \circ z_0 h + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \circ z_0 h^2 = 0 \quad (15)$$

olarak ifade edilir. (10) denkleminde tek tabakalı potansiyel φ bulunduktan sonra Γ_0 yüzeyi üzerinde u ve $\partial u / \partial v_0$ değerleri tek tabakalı potansiyele ilişkin sıçrama bağıntıları ile (Kress ve Colton, 1998)

$$u(x) = u^i(x) + \frac{i}{4} \int_{\Gamma_0} \varphi(y) H_0^{(1)}(k|x-y|) ds(y) \quad (16)$$

$$x \in \Gamma_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v_0}(x) = \frac{\partial u^i}{\partial v_0}(x) + \frac{i}{4} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial H_0^{(1)}(k|x-y|)}{\partial v_0(x)} ds(y) - \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma_0 \quad (17)$$

ikinci dereceden türevi $\partial^2 u / \partial v_0^2$ ise toplam alanın seçilen ilk yüzeyin dışında Helmholtz denklemini sağlaması gerçeğini kullanarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v_0^2} \circ z_0 = -k^2 u \circ z_0 + \frac{z_0' \cdot z_0''}{|z_0'|^4} \frac{\partial(u \circ z_0)}{\partial t} - \frac{1}{|z_0'|^2} \frac{\partial^2(u \circ z_0)}{\partial t^2} - \frac{z_0' \cdot v_0'}{|z_0'|^2} \frac{\partial u}{\partial v_0} \circ z_0 \quad (18)$$

olarak ifade edilebilir (Serranho 2006; Serranho 2007; Kress vd., 2009). Hettlich ve Rundell'in (Hettlich ve Rundell, 2001) ve daha sonra Halley (Halley, 1694)'in çalışmaları (15) ile verilen lineer olmayan denklemin çözümünü tahmin ve düzeltme şeklinde iki adımda çözmeyi önerir. Tahmin adımında öncelikle

$$u \circ z_0 + \frac{\partial u}{\partial v} \circ z_0 h_0 = 0 \quad (19)$$

denklemini çözülür. (19) denkleminin çözümünün u 'nun normal türevinin sıfır civarlarında hassas

olması sebebiyle (19) denklemini en küçük kareler yöntemiyle daha stabil bir şekilde çözülür. Bu amaçla, $h_0(t)$

$$h_0(t) = a_0 + \sum_{j=1}^J \{a_j \cos(jt) + a_{J+j} \sin(jt)\} \quad (20)$$

şeklinde J adet trigonometrik polinomun toplamı şeklinde ifade edilir. Daha sonra (19) denklemini en az kareler anlamında sağlatarak (20) denklemindeki bilinmeyen a_0, a_1, \dots, a_{2J} katsayıları $[0, 2\pi)$ aralığındaki t_1, t_2, \dots, t_N ayrıklaştırma noktalarında verilen

$$\sum_{n=1}^N \left| u(z_0(t_n)) + \frac{\partial u}{\partial v}(z_0(t_n)) h_0(t_n) \right|^2 + \beta_1 \left\{ a_0^2 + \sum_{j=1}^J j^{2p} (a_j^2 + a_{J+j}^2) \right\} \quad (21)$$

ifadesini minimum yapan a_0, a_1, \dots, a_{2J} katsayıları bulunur. Burada $\beta_1 > 0$ regularizasyon parametresi olup $p \in N$ dir.

h_0 bulunduktan sonra düzeltme adımında ise

$$u \circ z_0 + \frac{\partial u}{\partial v_0} \circ z_0 h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial v_0^2} h h_0 = 0 \quad (22)$$

denklemini yine en küçük kareler anlamında çözülür. Bunun için

$$h(t) = b_0 + \sum_{j=1}^J \{b_j \cos(jt) + b_{J+j} \sin(jt)\} \quad (23)$$

şeklinde ifade edilir ve buradaki b katsayıları (Kress vd., 2009)

$$\sum_{n=1}^N \left| u(z_0(t_n)) + \left[\frac{\partial u}{\partial v}(z_0(t_n)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(z_0(t_n)) h_0(t_n) \right] h(t_n) \right|^2 + \beta_2 \left\{ b_0^2 + \sum_{j=1}^J j^{2p} (b_j^2 + b_{J+j}^2) \right\} \quad (24)$$

ifadesini minimum yapacak şekilde bulunur. Burada $\beta_2 > 0$ bir regularizasyon parametresidir.

Sayısal uygulamalar

Bütün uygulamalarda $N=50$ adet eşit aralıklı ayırıştırma noktası kullanılmıştır. Saçılan alan datası $[0,2\pi)$ aralığında birim daire üzerinde eşit aralıklı 50 noktada elde edilmiştir. Inverse crime'ı önlemek için sentetik saçılan alan datası tek tabakalı ve çift tabakalı potansiyellerin kombinasyonu şeklinde elde edilen integral denklemin Nyström metoduyla 100 noktada ayırıştırılmasının çözümünden elde edilir. Dalga sayısı $k=1$ seçilmiştir. En küçük kareler yöntemi için regularizasyon parametresi $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-5}$ seçilmiştir. Sobolev norm parametresi ise $p=3$ seçilmiştir. (10) denklemindeki Tikhonov regularizasyon parametresini ise discrepancy prensibi kullanılarak bulunmuştur. Şöyle ki

$$\|S_\infty(\alpha I + S_\infty^* S_\infty)^{-1} S_\infty^* u_\infty - u_\infty\|_{L^2} = \delta \quad (25)$$

olarak ifade edilirse, $\delta = 10^{-7}$ gürültüsüz data için $\delta = 10^{-4}$ ise gürültülü data için kullanılmıştır. İterasyonu durdurmak için

$$res_n = \|A(\Gamma_n) - u_\infty\|_{L^2} \quad (26)$$

şeklinde bir rezidü tanımlanır. İterasyon

$$res_{n,J} \leq 10^{-2} \|u_\infty\|_{L^2} \quad (27)$$

veya

$$|res_{n,J} - res_{n-1,J}| \leq 10^{-2} \quad (28)$$

koşulu sağlandığında durdurulur. Birinci ve İkinci derece Newton iterasyonları için her bir iterasyon adımının saat frekansı 1800MHz olan bir bilgisayar için sırasıyla 1.7083s ve 1.7147s sürdüğü gözlenmiştir.

İlk olarak çam fıstığı şeklinde, parametrik olarak

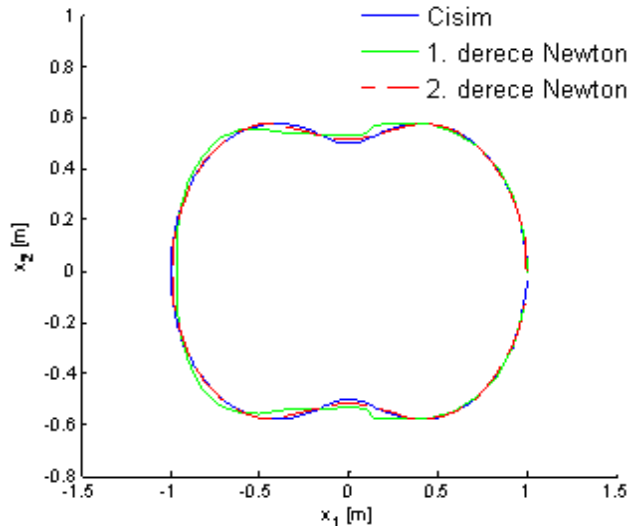
$$\partial D = \left\{ \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi) \right\} \quad (29)$$

verilen bir cismin bulunmasını inceleyelim. Geliş açısı $d = (-1,0)$ olarak seçilmiştir. İterasyon, yarıçapı 1.5 olan bir daire ile başlatılmıştır.

Tablo 1'de birinci ve ikinci derece Newton için rezidülerin değişimi verilmiştir. Trigonometrik polinom derecesi $J=6$ olarak seçilmiştir. Gerçek cisim ve birinci ve ikinci derece Newton iterasyonu ile elde edilen cisimler Şekil 2'de gösterilmiştir.

Tablo 1. İterasyonla çam fıstığı şeklindeki cismin $d = (-1,0)$ için rezidü değişimi

İterasyon	Birinci derece Newton	İkinci derece Newton
0	5.9390	5.9390
1	1.5877	0.8427
2	0.3325	0.0074
3	0.0391	---



Şekil 2. Çam fıstığı şeklinde cismin bulunması

İkinci örnek olarak parametrik denklemini

$$\partial D = \left\{ \cos t + 0.65 \cos t - 0.65, 1.5 \sin t : t \in [0, 2\pi) \right\} \quad (30)$$

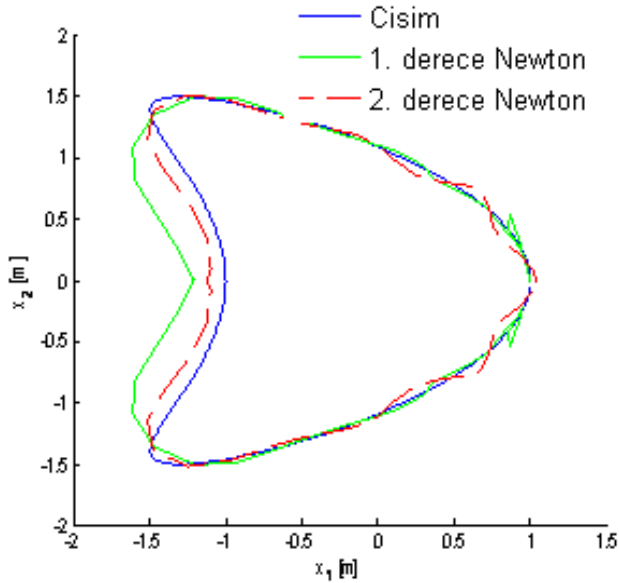
olarak verilen bir cismin bulunmasını inceleyelim. Düzlem dalganın geliş açısı $d = (-1,0)$ ola-

rak seçilmiştir. İterasyon yarıçapı 1.5 olan bir daire ile başlatılmıştır. Birinci ve ikinci derece Newton için rezidülerin değişimi Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. İterasyonla cismin $d = (-1,0)$ için rezidü değişimi

İterasyon	Birinci derece Newton	İkinci derece Newton
0	5.2744	5.2744
1	0.9737	1.1716
2	0.2100	0.0487
3	0.1247	---
4	0.1158	---

Trigonometrik polinom derecesi $J = 9$ olarak seçilmiştir. Gerçek cisim ve birinci ve ikinci derece Newton iterasyonu ile elde edilen cisimler Şekil 3’te gösterilmiştir.



Şekil 3. Cismin bulunması

Yöntemin bilinen uzaylardaki cisimler için genişletilmesi

Bu çalışmada önerilen ikinci derece Newton yöntemi bilinen herhangi bir uzaya yerleştirilmiş mükemmel iletken bir cismin bulunması için kolayca genişletilebilir. Bu durumda Helmholtz denklemin temel çözümü y noktasına yerleştirilmiş olan kaynağın x noktasında oluşturduğu alan olup $\phi(x, y)$ ile ifade edilmektedir.

Bu ise literatürde bulunan ve iyi bilinen düz saçılma probleminin çözümüdür. Ayrıca bu durumda gelen alan ifadesi de bulunması istenen cismin mevcut olmadığı ortamda bulunan toplam alan şeklinde değiştirilmelidir. Bu ise yine aynı şekilde iyi bilinen düz saçılma probleminin çözümüyle elde edilebilir.

Yöntemin çoklu aydınlatma durumu için genişletilmesi

Bu çalışmada verilen ikinci derece Newton yöntemiyle mükemmel iletken cisimlerin şeklinin bulunması yöntemi açık bir şekilde cismin birçok yönden aydınlatılması durumuna genişletilebilir. Bu durumda, cisim her biri farklı ilerleme yönüne sahip düzlemsel dalgalarla aydınlatılıp her bir aydınlatma durumunda saçılan alan birim daire Ω üzerinde elde edilir. Bu durumda her bir aydınlatma için tek tabakalı potansiyel

$$(S_{\infty} \varphi^{(n)})(\hat{x}) = u_{\infty}^{(n)}(\hat{x}), \quad (31)$$

$$n = 1, 2, \dots, L$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\varphi^{(n)}$ ve $u_{\infty}^{(n)}$ sırasıyla n . aydınlatmada elde edilen tek tabakalı potansiyel ve uzak alan verisini göstermektedir. İlk tahmin edilen yüzeydeki tek tabakalı potansiyel her bir aydınlatma için

$$\varphi^{(n)}(x) = (\alpha I + S_{\infty}^* S_{\infty})^{-1} S_{\infty}^* u_{\infty}^{(n)}, \quad x \in \Gamma_0, \quad (32)$$

$$n = 1, 2, \dots, L$$

şeklinde ifade edilir. Burada L aydınlatma için kullanılan toplam düzlem dalga sayısı ve $u_s^{(n)}(x)$, n . aydınlatmaya ilişkin saçılan alan olup

$$u_s^{(n)}(x) = \int_{\Gamma_0} \varphi^{(n)}(y) \phi(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0, \quad (33)$$

$$n = 1, 2, \dots, L$$

olarak ifade edilir. İlk seçilen yüzeydeki toplam alan ve türevi

$$u^{(n)}(x) = u_s^{(n)}(x) + u_i^{(n)}(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad (34)$$

$$n = 1, 2, \dots, L$$

Burada $u_i^{(n)}(x) = e^{ikx.d_n}$ ilerleme doğrultusu d_n olan n . aydınlatmaya ilişkin ifadedir. İlk seçilen yüzeydeki toplam alanın normal doğrultudaki türevi

$$\frac{\partial u^{(n)}(x)}{\partial v} = \frac{\partial u_s^{(n)}(x)}{\partial v} + \frac{\partial u_i^{(n)}(x)}{\partial v}, \quad x \in \Gamma_0, \quad (35)$$

$n = 1, 2, \dots, L$

olarak yazılabilir. Bu ise

$$\frac{\partial u^{(n)}(x)}{\partial v} = \int_{\Gamma_0} \varphi^{(n)}(y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v(x)} ds(y) + ik\hat{v}(x).d_n e^{ikx.d_n} \quad (36)$$

$x \in \Gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots, L$

olarak ifade edilebilir. Bu ifadeler

$$u^{(n)}(x) + h(x) \frac{\partial u^{(n)}}{\partial v}(x) \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (37)$$

$x \in \Gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots, L$

$$u^{(n)}(x) + h(x) \frac{\partial u^{(n)}}{\partial v}(x) \Big|_{\Gamma_0} + h^2(x) \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial v^2}(x) \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (38)$$

$x \in \Gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots, L$

denklemleri ve (18) ifadesi kullanılarak (38) denklemi çözülür ve yeni yüzey (13) ifadesi kullanılarak bulunur.

Sonuçlar

Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- İstenen bir rezidü için ikinci derece Newton yöntemi klasik birinci derece Newton yöntemine göre daha az iterasyon gerektirmektedir. Dolayısıyla şeklinin bulunması istenen cisim daha kısa sürede bulmaktadır.

- Burada verilen yöntem saçılan alanın yakın alan ölçümlerinin kullanılması ve saçılan alanın sınırlı bir bölgede ölçülmesi durumuna kolayca genişletilebilir.

Kaynaklar

- Kress, R., (2003). Newton's Method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares, *Inverse Problems*, **19**, 91-104.
- Kress, R. ve Serranho, P., (2005). A hybrid method for two-dimensional crack reconstruction, *Inverse Problem*, **21**, 773-784.
- Kress, R. ve Serranho, P., (2007). A hybrid method for sound-hard obstacle reconstruction, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **204**, 418-427.
- Roger, A., (1981). Newton Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem, *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, **29**, 232-238.
- Serranho, P., (2006). A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance, *Inverse Problems*, **22**, 663-680.
- Serranho, P., (2007). A hybrid method for inverse scattering for sound-soft obstacles in 3D., *Inverse Problems and Imaging*, **1**, 691-712.
- Colton, D. ve Kress, R., (1998). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer, Berlin.
- Hettlich, F. ve Rundell, W., (2000). A second degree method for nonlinear inverse problem, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **37**, 587-620.
- Halley, E., (1694). A new, exact, and easy method of finding the roots of any equations generally, and that without any previous reduction, *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, **18**, 136-148.
- Kress, R., Tezel, N. S. ve Yaman, F., (2009). A second order Newton method for sound soft inverse obstacle scattering, *Journal of Inverse and ill-posed Problems*, **17**, 2, 173-185.