

# Hareketli yükler altındaki köprülü kren kirişlerinin dinamik davranışı

İsmail ESEN\*, İsmail GERDEMELİ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon ve İmalat Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Bu çalışmada, üzerinde hareketli yükler bulunan köprülü kren kirişlerinin dinamik davranışını belirlemek amacıyla bir Berneuoelli-Euler esnek kiriş sistemi incelenmiştir. Bilgisayar analizi SAP 2000 programında modelleme yapılarak gerçekleştirilmiştir. Dinamik analizlerde Newmark doğru- zaman integrasyonu metodu ve oransal sönümleme tercih edilmiştir. Yükün hareket hızının ve kiriş kütlesine olan oranının farklı değerleri için kirişin dinamik davranışı diyagramlarda verilmiştir. Kren kirişlerinin dinamik davranışı, üzerindeki hareket eden yükün hareket hızına ve kütlesine bağlı olarak değişmektedir. Hareket eden yük, kiriş sisteminin tabii titreşim frekansını değiştirmekte ve yük kiriş üzerinde ilerlerken kiriş sistemi farklı titreşim yapmaktadır. Yükün hızı arttıkça maksimum yer değiştirmenin olduğu yer, kiriş orta noktasından ileriye gitmektedir. Bazı hız değerleri için maksimum nokta orta noktanın gerisinde de olabilmektedir. Kirişin hareketi dinamik olduğundan bazı durumlarda, yük statik olarak maksimum yer değiştirme oluşturacak orta noktada iken, kirişin hareketinin zıt yönde olabilmesiyle orta noktada maksimum yer değiştirme oluşmamaktadır. Kren kirişlerinin tasarımında verilen kiriş uzunluğuna göre kiriş orta noktasının yer değiştirme miktarının tasarım açısından yeterli olamadığı gösterilmiştir. Maksimum noktanın kiriş üzerinde sabit bir yerde oluşmamasından dolayı kiriş üzerinde hafif konstrüksiyon veya diğer nedenlerle oluşturulan kesit süreksizlikleri yüksek hızlarda çalışması düşünülen krenlerde risk oluşturmaktadır. Ağır şartlarda hızlı çalışacak krenlerin hizmet ömrünün belirlenmesi için tasarım aşamasında kren kiriş sisteminin dinamik davranışının hassas olarak belirlenmesi zorunludur. Kaldırılacak yükün miktarı ve arabanın hızı, taşıyıcı kiriş sisteminin dinamik özellikleri dikkate alınarak yapılacak hesapların daha doğru olacağı gösterilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** Köprülü kren kirişleri, hareketli yük, dinamik davranış.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: İsmail ESEN. ismailesen71@yahoo.com; Tel: (505) 377 70 46, (216) 311 80 63. Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Konstrüksiyon ve İmalat Programı'nda tamamlanmış olan "Hareketli yükler altındaki köprülü kren kirişlerinin dinamik (mukavemet) analizi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 22.04.2009 tarihinde dergiye ulaşmış, 03.06.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.01.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Dynamic analysis of overhead crane beams under moving loads

### Extended abstract

*In this study dynamic behavior of Overhead Crane beams is investigated. A Bernoulli-Euler thin beam under moving (carriage) load is studied. Computerized analysis was carried out in SAP 2000. Moving load or loads are applied to the system by lanes which can be determined on the geometry of beam structure. For frame finite elements this lane is placed on the axis of the beam and goes parallel to throughout whole length of the beam. For shell, area and solid elements lane or lanes can be determined on the upper plates of the beam structure. The computer program allows obtaining time history analysis for very short time interval. In the dynamic analyses linear transient direct integration method called Newmark method was used.*

*Structures under moving loads have been studied for more than a hundred years. Early studies were made by some scientist who studied on dynamic behavior of railway bridges and motorway bridges. The need of high speed transportation, aviation and sky studies and high speed precision machining studies increases the importance of the subject. Beside deflections due to self weight of the beam and the static effect of moving load on it, it is obvious that dynamic deflections occur due to interaction of moving load and the beam vibration. The total deflection may be much higher than static deflection.*

*Analysis carried out the mass ratios (mass of the load/mass of the beam  $m/M$ ) 0.2, 0.5, 0.8 and for load velocities of 0.01, 0.5, 1.25, 2.5, 4, 5 and 6.25 m/s. Dynamic response of the beam was obtained depending on the mass ratio of the load to the mass of the beam and the velocity of the load. Dynamic response of crane beams depends on velocity and mass of moving load. Since the position of the moving mass on the crane beam changes, it causes changes in the natural frequency of the system. While the load moving, depending on the position of the mass of load the vibration of the system varies. Generally, if the velocity of the load increases, the position of the maximum response on the beam occurs far from the midpoint. At very high speeds the maximum deflection of the beam occurs close to the end of the beam. For some values of the velocity the maximum response may occur before the middle of*

*the beam. Dynamic response of very slow carriage velocity of 0.01m/s is, with an error in a thousand, very near to static deflection of the beam when the carriage is at the middle of the beam. At very slow speeds maximum deflection of the beam occurs near the middle of the beam because the system reduces to a quasi-static solution.*

*For same mass ratio when the velocity of the load increases, the deflection of the beam goes higher. The dynamic behavior of the beam is more affected from the velocity of load than mass ratio of the system. Since the maximum point is not at a definite point throughout the beam length, every section on the whole length of the beam may be under high stress. For light construction or other needs in the design of the crane beams there can be desired section discontinuities. But, if an overhead crane will run at high speeds, the section discontinuities of the beams may cause risk of destruction. It is very important to determine dynamic behavior of beam system of overhead cranes which is desired to use at heavy condition.*

*Generally, today to avoid uncontrollable vibration, overhead cranes work at very low speeds and the design of these cranes is made due to FEM (Federation Europenne de la Manutention) and DIN (Deutsches Institut für Normung) standards. To eliminate dynamic effects some magnification constants are used. Usage of above mentioned standards in designing of high speed crane beams will be insufficient. Global competition and serial service needs will direct manufacturers to build high speed cranes and it is necessary to define dynamic effects of high speed motion of carriage on the crane beams.*

*This work aims to study dynamic behavior of overhead crane beams under moving loads and to give engineers some idea in the design of crane beams. It is showed that carrying analysis in terms of only the midpoint deflection or midpoint stresses in engineering calculations of the beam systems is insufficient. Taking into account the mass and velocity of the moving load and dynamic properties of carrying system in dynamic analysis brings out more accurate results.*

**Keywords:** *Overhead crane beams, moving loads, dynamic response.*

## **Giriş**

“Hareketli Yükler Altındaki Köprülü Kren Kirişlerinin Dinamik (Mukavemet) Analizi” isimli tez çalışması kapsamında köprülü kren kirişlerinin dinamik davranışının belirlenmesi amaçlanmaktadır. Üzerinde hareketli yükler bulunan taşıyıcı sistemler yüz yılı aşkın bir süre araştırma konusu olmuştur. İlk çalışmalar demir yolu köprülerinin daha sonra karayolu köprülerinin dinamik davranışını araştıran bilim adamları tarafından yapılmıştır. Havacılık ve uzay çalışmalarının hızlanması ve yüksek hızda talaşlı imalat araştırmaları konunun önemini daha da arttırmaktadır.

Fryba (1999) kiriş üzerinde hareket eden yüklerin etkilerini geniş bir yelpazede incelemiştir. Wu ve diğerleri (2000) zamana bağlı olarak değişen yükler taşıyan sistemlerin dinamik davranışını analiz etmek için standart sonlu eleman programlarını kullanan bir teknik sunmuşlardır. Wilson (2002) yapısal sistemlerin statik ve dinamik analizini ve hesap yöntemlerini içeren kapsamlı bir kaynak çalışması yapmıştır. Yang ve diğerleri (2000) hareketli osilator taşıyan bir boyutlu elastik bir sistemi incelemişler, problemi bağlı yer değiştirme modeli ile oluşturarak, limit durumda sonsuz osilator yay katsayısı alındığında hareketli kütle problemini elde etmişlerdir. Foda ve diğerleri (1998) üzerinde hareketli bir kütle olan basit mesnetli Bernoulli-Euler kirişinin şekil değiştirmesini belirlemek için bir dinamik Green fonksiyonu kullanmışlardır. Önerilen metot kiriş yer değiştirmesi için basit bir matris ifadesini içermektedir. Bazı nümerik örneklerle metodun basitliği ve hesap hassaslığı gösterilmiş, dinamik yer değiştirmede etkili olan çeşitli parametreler incelenmiştir. Zhu ve diğerleri (2001) sabit kesitli olmayan bir Euler-Bernoulli kirişinin dinamik davranışı Hamilton prensibi ile ve öz vektör ve özdeğeri de Ritz metodu kullanarak analiz etmişler, kirişin dinamik yer değiştirmelerini hesaplamak için yüksek hassasiyetli integrasyon metodu kullanılarak, Newmark metodundan daha doğru sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Bu konuda yapılan çalışmalar genellikle kara ve demiryolu köprülerinin dinamik davranışı ile ilgilidir. Köprülü krenlerin kirişlerinin yapıları

ve çalışma koşulları bunlardan farklıdır. Yapılan çalışmalarda genellikle kiriş üzerinde maksimum yer değiştirmenin olduğu yer orta nokta kabul edilmiş veya incelenmemiştir. Bu çalışmada, üzerinde hareketli yükler bulunan köprülü kren kirişlerinin dinamik davranışı araştırılmıştır.

Bilgisayar modelleri köprü analizinde kullanılan SAP 2000 programında geliştirilmiştir. Hareketli yük veya yükler, kiriş geometrisine göre tayin edilebilen yük hareket yolu veya yolları (şerit) aracılığı ile kirişe uygulanabilmektedir. Çerçeve elemanlar için hareketli yükler kiriş ekseninden geçen ve kirişin boyuna paralel yük yolu tanımlanarak uygulanmaktadır. Kabuk, alan ve katı elemanlar için ise kirişin üst kısmını oluşturan plakaların üzerinde yollar tayin edilerek hareketli yükler kirişe uygulanmaktadır. Program kirişin dinamik davranışını tayin etmede zaman alan fonksiyonu açısından istenilen küçüklükteki zaman aralığı için sonuçlar elde edilmesine imkân vermektedir.

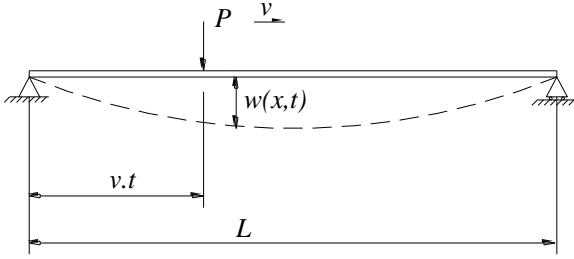
Esnek ince bir Bernoulli – Euler kirişi alınarak, üzerinde farklı hız ve yük değerlerinde hareket eden yükler için analizler yapılmış, sonuçlar diyagram halinde verilmiştir. Analiz sonuçları kirişin dinamik davranışını ortaya koymaktadır. Kirişin dinamik davranışı, üzerindeki hareket eden yükün hızına ve kütleğine bağlı olarak değişmektedir. Hareket eden yük, kiriş sisteminin tabii titreşim frekansını değiştirmektedir. Yük, kirişin farklı noktalarında iken kiriş sistemi farklı titreşim yapmaktadır. Yükün hızı arttıkça maksimum yer değiştirmenin olduğu yer, kiriş orta noktasından ileriye gitmektedir. Bazı hız değerleri için maksimum nokta orta noktanın gerisinde de olabilmektedir. Yük kiriş üzerinde ilerlerken kiriş dinamik olarak titreşmektedir. Kirişin hareketi dinamik olduğundan bazı durumlarda, yük statik olarak maksimum yer değiştirme oluşturacak orta noktada iken kirişin hareketinin zıt yönde olabilmesiyle bu noktada maksimum yer değiştirme oluşamamaktadır.

Kren kirişlerinin tasarımında verilen kiriş uzunluğuna göre kiriş orta noktasının yer değiştirme miktarının tasarım açısından yeterli olmadığı

gösterilmiştir. Ağır şartlarda seri çalışan krenlerin hizmet ömrünün belirlenmesi için tasarım aşamasında kren sisteminin dinamik davranışının da hassas olarak belirlenmesi zorunludur. Kaldırılacak yükün miktarı ve arabanın hızı ve taşıyıcı kiriş sisteminin dinamik özellikleri dikate alınarak yapılacak hesapların daha doğru olacağı gösterilmiştir.

### Matematiksel model

Üzerine hareketli bir kuvvet bulunan Şekil 1’de görülen Bernoulli-Euler kirişinin enine yer değiştirmelerinin diferansiyel denklemi denklem (1) şeklindedir (Fryba, 1999).



Şekil 1. Hareketli bir kuvvete maruz basit mesnetli kiriş

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\delta(x-vt) \quad (1)$$

Burada,  $E$  Young modülü,  $I$  atalet momenti,  $\mu$  birim uzunluğun kütlesi,  $x$  kiriş eksen koordinatı,  $t$  zaman,  $w(x,t)$  kirişin enine yer değiştirmesi,  $\omega_b$  kirişin sönümlenme dairesel frekansı,  $P$  uygulanan dış kuvvet,  $\delta(x-vt)$  Dirac-delta fonksiyonudur. Basit mesnetli bir kiriş için sınır ve başlangıç şartları  $x=0$  ve  $x=L$  için;

$$w(0,t) = w(L,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$w(x,0) = \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0, \quad t=0 \text{ da} \quad (3)$$

Denklem (1)’in genel çözümü için denklemin her terimi  $\sin(i\pi x/L)$  ile çarpılır ve  $x$ ’e göre 0

ve  $L$  aralığında integral alınır. Fourier sinüs sonlu integral dönüşümü kuralını kullanarak,  $t \leq T$  için bazı düzenlemelerden sonra aşağıdaki denklem elde edilir (Fryba, 1999).

$$w(x,t) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \left[ i^2(i^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\psi^2 \right]} \left[ i^2(i^2 - \alpha^2) \sin i\omega t - \frac{i\alpha \left[ i^2(i^2 - \alpha^2) - 2\psi^2 \right]}{(i^4 - \psi^2)^{1/2}} e^{-\omega_b t} \sin \omega'_{(i)} t - 2i\alpha\psi (\cos i\omega t - e^{-\omega_b t} \cos \omega'_{(i)} t) \right] \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (4)$$

Denklemde geçen terimler aşağıda verilmiştir.

Hız parametresi,

$$\alpha = \frac{v}{v_{kr}} = \frac{\omega}{\omega_{(1)}} = \frac{v}{2f_{(1)}L} = \frac{T_{(1)}}{2T} = \frac{vL}{\pi} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{1/2} \quad (5)$$

Sönümlenme parametresi,

$$\psi = \frac{\omega_b}{\omega_{(1)}} = \frac{\omega_b L^2}{\pi^2} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Denklem (1)’in homojen çözümünden dairesel titreşim frekansları ve titreşim mod şekilleri elde edilir. Çözüm aşamaları uzun olduğu için burada sadece sonuçlar verilecektir. Basit mesnetli bir kirişin  $i$  nci mod titreşiminin dairesel ve doğal frekansları aşağıdaki gibidir.

$$\omega_i^2 = \frac{i^4 \pi^4 EI}{L^4 \mu} \quad (7)$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{i^2 \pi}{2L^2} \left( \frac{EI}{\mu} \right)^{1/2} \quad (8)$$

Hareketli yükün kirişi etkileme frekansı,

$$\omega = \frac{\pi v}{L} \quad (9) \quad M_0 = \frac{PL}{4} \quad (17)$$

Birinci serbest titreşimin periyodu ve kuvvetin kiriş üzerinden geçiş süresi,

$$T_{(1)} = \frac{1}{f_{(1)}} \quad (10) \quad T_0 = P \quad (18)$$

$$T = \frac{L}{v} \quad (11)$$

Kritik hız,

$$v_{kr} = 2f_{(1)}L = \frac{\pi}{L} \left( \frac{EI}{\mu} \right)^{1/2} \quad (12)$$

Denklemler (2) ve (3)'teki sınır ve başlangıç şartları ve sönümsüz titreşim durumu ve  $0 \leq x, vt \leq L$  için kirişin zamana bağlı yer değişimi aşağıdaki gibidir. (Fryba, 1999)

$$w(x, t) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \frac{1}{i^2(i^2 - \alpha^2)} \quad (13)$$

$$\left( \sin \frac{i\pi x}{L} t - \frac{\alpha}{i} \sin \omega_i t \right)$$

Kiriş kesitlerinin dönmesi yani eğimi,

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (14)$$

Eğilme momenti,

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (15)$$

Kesme kuvveti,

$$T(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \quad (16)$$

Kiriş orta noktasındaki  $P$  statik kuvvetinin oluşturduğu eğilme momenti ve kesme kuvvetini aşağıdaki gibi yazarak,

sönümsüz halde eğilme momenti aşağıdaki gibi elde edilir.

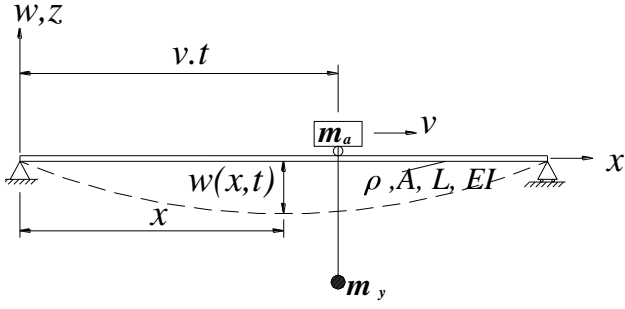
$$M(x, t) = M_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{i^2(i^2 - \alpha^2)} \left( \sin \frac{i\pi x}{L} t - \frac{\alpha}{i} \sin \omega_{(i)} t \right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (19)$$

Sönümsüz halde kesme kuvveti,

$$T(x, t) = P \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{i^2(i^2 - \alpha^2)} \left( \sin \frac{i\pi x}{L} t - \frac{\alpha}{i} \sin \omega_{(i)} t \right) \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (20)$$

## Uygulama

Sistemin dinamik davranışının incelenmesi amacıyla sonuçların belirgin olarak alınabildiği ince kesitli esnek bir Berneuolli - Euler kirişi seçilmiştir. Kiriş kesitinin kayma yer değiştirmesi ve kesitin dönmesinin dinamik davranışa olan etkisi dikkate alınmamaktadır. Üzerinde hareketli bir araba ve bu arabanın kaldırdığı yük Şekil 2'de görüldüğü gibi modellenmiştir. Kiriş üzerine hareket eden arabanın hızının kiriş sisteminin dinamik davranışına olan etkisini araştırmak için kiriş üzerinde araba  $v=0.5, 1.25, 2.5, 4, 5$  ve  $6.25$  m/s hızlar ile hareket ettirilmiştir. Araba  $t=0$  anında kirişin sol ucunda ve  $t=L/v$  zamanında kirişin diğer ucuna ulaşmaktadır. Burada  $L/v$  arabanın seyahat süresidir. Basit mesnetli olarak seçilen kiriş başlangıçta şekil değiştirmemiştir ve herhangi bir titreşim yapmamaktadır. Kaldırılan yük arabaya kütesiz rijit bir çubukla bağlanmıştır. Kaldırılan yük herhangi bir titreşim ve salınım yapmamaktadır. Arabanın toplam kütlesi kendi kütlesi ve kaldırılan yükün kütlesinin toplamından oluşmaktadır. Uygulama için seçilen kirişin özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.



Şekil 2. Hareketli yük taşıyan kren kirişinin modeli

Tablo 1. Malzeme özellikleri

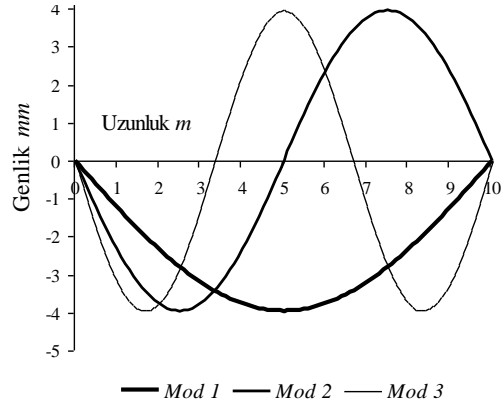
$\rho$	8000 kg/m <sup>3</sup>
$E$	2.117 x 10 <sup>11</sup> N/m <sup>2</sup>
$L$	10 m
$A$	16 x 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup>
$I$	2.133 x 10 <sup>-7</sup> m <sup>4</sup>
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$\rho AL$	128 kg
$\mu$	12.8 kg/m

Arabanın kirişe noktasal olarak temas ettiği kabul edilmiştir. Hareketli bir osilatör taşıyan bir kiriş sisteminde Yang ve diğerleri (2000) yay katsayısının sonsuza gitmesi halinde hareketli osilatör probleminin hareketli kütle problemine dönüştüğü bildirilmektedir. Kaldırılan yükü taşıyan halatların rijit çubuk kabul edilmesiyle kaldırılan yükün kütlesi abanın kütlesine ilave edilerek,  $m = m_{araba} + m_{yük}$ ,  $m = 25.6\text{ kg}$  (araba)  $M = 128\text{ kg}$  (kiriş). Kütle oranı  $m/M = 0.2$  dir.

### Uygulama sonuçları

Kirişin ilk üç titreşim mod şekli Şekil 3'te çizilmiştir. Bütün analizlerde zaman alan fonksiyonu 400 adet zaman adımında incelenmiştir.  $v.t/L$  arabanın kiriş üzerindeki pozisyonunu göstermekte olup,  $t=0$  da araba kirişin başlangıç noktasında,  $t=L/v$  anında ise diğer ucundadır. 400 adımlık zaman diliminde her adımda ( $t/400$ ) elde edilen veriler Excel ortamına aktarılarak maksimum yer değiştirmenin olduğu zaman adımı tespit edildi. Bir zaman adımı için, kirişin sonlu elamanlar modelinde her düğüm için oluşan yer değiştirmeler hesaplanarak maksimum yer değiştirmenin hangi düğümde olduğu veri-

ler incelenerek tespit edilmiştir. Yer değiştirme moment ve kesme kuvveti diyagramlarında kirişin kendi ağırlığının oluşturduğu yer değiştirmeler gösterilmemiştir.



Şekil 3. Kirişin ilk üç titreşim modları

Yüksüz kirişin ve durgun yüklerle farklı noktalardan yüklenen kirişin doğal frekansları Tablo (2-6)'da verilmiştir.

Tablo 2'de yüksüz kirişin birinci, ikinci ve üçüncü doğal frekansları görünmektedir. Tablo 3'te yüklü kirişin yükün miktarı ve kiriş üzerindeki pozisyonuna göre birinci doğal titreşim frekansının değişimi verilmiştir. Yüksüz kirişin birinci doğal frekansı 0.93303 Hz iken yük kirişin 0.25 L mesafesinde olduğu ve  $m/M$  oranı 0.8 olduğunda bu frekans 0.68528 Hz'e düşmektedir. Tablo 4 ve 5'te sırasıyla ikinci ve üçüncü doğal titreşim frekanslarının değişimi verilmiştir.

Tablo 2. Yüksüz kirişin ilk üç doğal frekansları

$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)
0.93303	3.7319	8.3959

Tablo 3. Kütle ve araba pozisyonuna göre yüklü kirişin birinci doğal frekansları (Hz)

Arabanın Pozisyonu	Durgun kütle, $f_1$		
	Kütle oranı $m/M$		
	0.2	0.5	0.8
0.25 L	<b>0.84995</b>	<b>0.75547</b>	<b>0.68528</b>
0.5 L	0.78808	0.65853	0.57703
0.75 L	<b>0.84995</b>	<b>0.75547</b>	<b>0.68528</b>

Tablo 4. Kütle ve araba pozisyonuna göre yüklü kirişin ikinci doğal frekansları (Hz)

Arabanın pozisyonu	Durgun kütle, $f_2$		
	Kütle oranı $m/M$		
	0.2	0.5	0.8
0.25 L	<b>3.2229</b>	<b>2.8797</b>	<b>2.7104</b>
0.5 L	3.7319	3.7319	3.7319
0.75 L	<b>3.2229</b>	<b>2.8797</b>	<b>2.7104</b>

Tablo 5. Kütle ve araba pozisyonuna göre yüklü kirişin üçüncü doğal frekansları (Hz)

Arabanın Pozisyonu	Durgun kütle, $f_3$		
	Kütle oranı $m/M$		
	0.2	0.5	0.8
0.25 L	<b>7.9295</b>	<b>7.7034</b>	<b>7.6096</b>
0.5 L	7.3701	6.7879	6.5244
0.75 L	<b>7.9295</b>	<b>7.7034</b>	<b>7.6096</b>

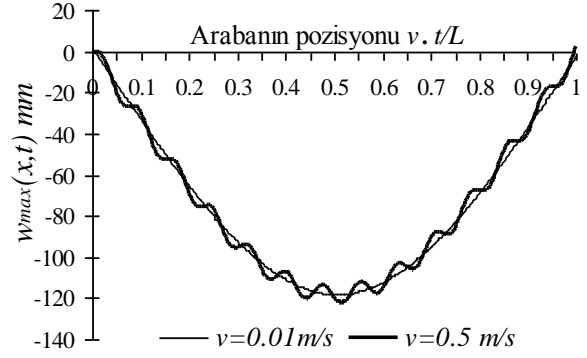
Kritik hız denklem (12)'den ve hız parametreleri denklem (5)'ten Tablo 1'deki değerler kullanılarak  $v_{kr}=18.6$  m/s olarak hesaplanır. Arabanın  $v$  hızına göre  $\alpha$  hız parametresinin değerleri Tablo 6'da verilmiştir.

Hareket eden yükün kirişin titreşim frekanslarını nasıl değiştirdiği verilen tablolardan anlaşılmaktadır. Frekanstaki bu değişim kirişin yer değiştirme şeklini de değiştirmektedir.

Tablo 6. Çeşitli hızlardaki hız parametreleri

$v$ (m/s)	$\alpha$
0.5	0.027
1.25	0.067
2.5	0.134
4	0.215
5	0.268
6.25	0.335

Şekil 4'te  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=0.5$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirme diyagramı görülmektedir.  $v=0.01$  m/s hızda oluşan yer değiştirme yük kirişin orta noktasında iken kirişin orta noktasında oluşturduğu statik yer değiştirmeye çok yakındır.  $w_{statik} = PL^3/48EI = 118.149$  mm,  $w_{dinamik}(0.01\text{ m/s})=118.150$  mm.



Şekil 4.  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=0.5$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirmesi

Maksimum yer değiştirme kirişin orta noktası  $x=5$  m'de araba pozisyonu  $v.t = 5$  m'de olduğu zamanda oluşmaktadır. Diyagramdan da anlaşılacağı üzere yer değiştirme eğrisi statik yer değiştirme eğrisi gibi düzgün ve simetriktir. Bu nedenle statik yer değiştirme olarak değerlendirilecektir. Hızın sifira yaklaşmasıyla çözümün statik çözüme yaklaşacağı beklenen bir durum olup, modellemenin gerçeğe uygunluğunu ortaya koymaktadır.

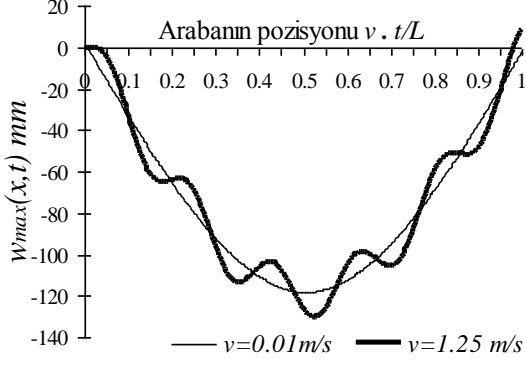
Hızın  $v=0.5$  m/sn değerinde ise maksimum yer değiştirme kirişin orta noktası  $x=5$  m'de, araba  $v.t=5.15$  m de iken oluşmaktadır. Arabanın kiriş üzerinde ilerlemesinden dolayı kiriş titreşime geçmekte ve yer değiştirme eğrisi statik yer değiştirme eğrisinin etrafında salınım yapmaktadır. Bu hız değerinde titreşime rağmen eğrinin kiriş orta noktasından geçen düşey doğruya simetrik olduğu görülmektedir.

Şekil 5'ten hızın artmasıyla kirişin titreşim genliğinin arttığı görülmektedir.  $v=1.25$  m/s hızında maksimum yer değiştirme  $x=5.1$  m'de araba  $v.t=5.25$  m'de iken oluşmaktadır.

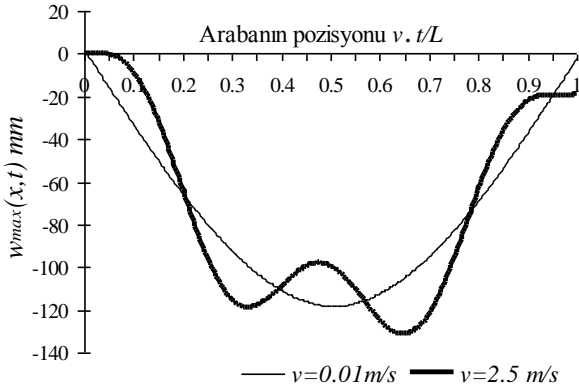
Şekil 6'da  $v=2.5$  m/s hızda oluşan yer değiştirmeler görünmekte olup, maksimum yer değiştirme  $x= 5.3$  m'de araba  $v.t=6.5$  m'de iken oluşmaktadır.

Diyagrama dikkat edilirse araba  $v.t =4.5$  m civarında iken buradaki yer değiştirme araba  $v.t=3$  m'de iken oluşan yer değiştirme değerinden küçük ve araba ortada iken oluşan yer değiştirme statik yer değiştirme değerinden küçüktür. Bu-

nun nedeni kirişin hareketinin dinamik olması ve bu hız değeri için araba orta noktadan geçerken kiriş hareketinin yukarı doğru olmasıdır. Hareketli yükün kirişin yer değiştirme biçimini değiştirdiği anlaşılmaktadır.



Şekil 5.  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=1.25$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirmesi



Şekil 6.  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=2.5$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirmesi

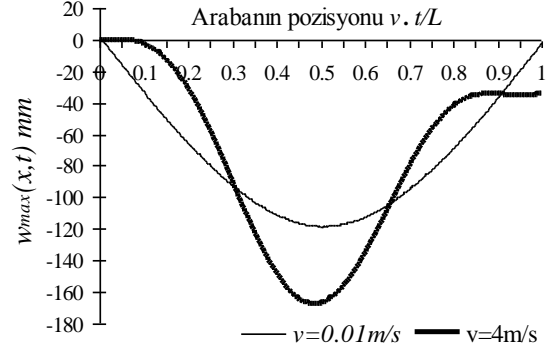
Şekil 7'de  $v=4$  m/s hız değerinde maksimum yer değiştirme  $x=4.9$  m'de, araba  $v.t=4.875$  m'de iken oluşmaktadır.

Buradan anlaşılmaktadır ki, kiriş üzerinde oluşan maksimum yer değiştirme sadece orta noktada veya ilerisinde değil gerisinde de oluşabilmektedir. Oluşan maksimum dinamik yer değiştirmenin yük kirişin ortasında durgun iken oluşan statik yer değiştirmeye oranı,  $w_{dinamik} / w_{statik} = 1.42$ 'dir.

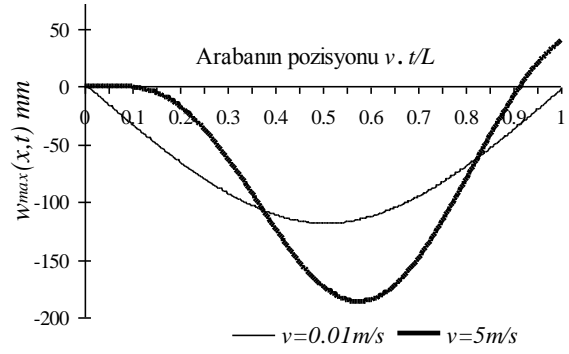
$v=5$  m/s hızında maksimum yer değiştirme  $x=5.2$  m'de, araba  $v.t=5.725$  m de iken oluşmaktadır (Şekil 8). Araba hızının artmasıyla dinamik

yer değiştirme statik yer değiştirmeye göre 1.58 kat artmıştır.

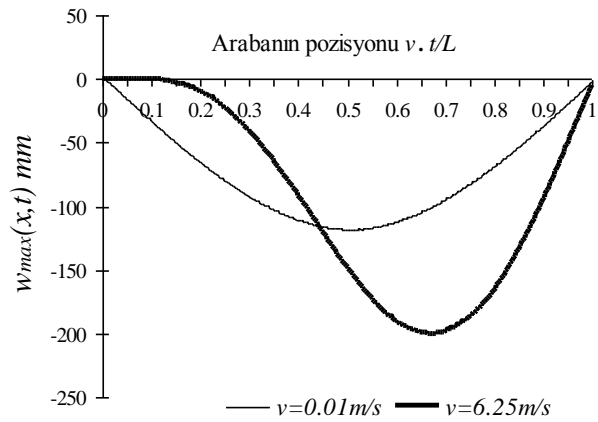
$v=6.25$  m/s araba hızında maksimum yer değiştirme  $x=5.2$  m'de, araba  $v.t=6.75$  m'de iken oluşmaktadır (Şekil 9).



Şekil 7.  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=4$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirmesi



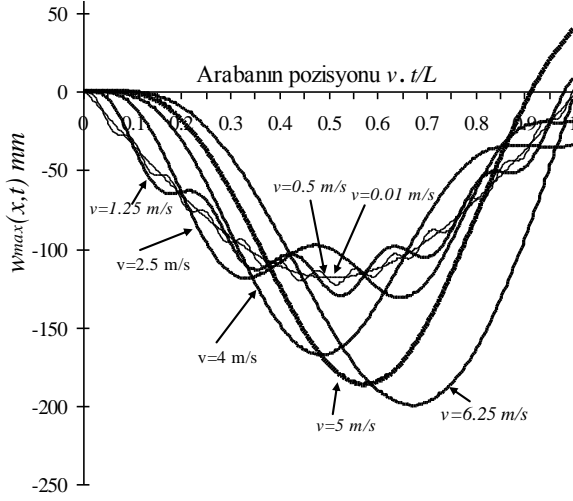
Şekil 8.  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=5$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirmesi



Şekil 9.  $m/M=0.2$  için  $v=0.01$  m/s,  $v=6.25$  m/s hızlarında kirişin yer değiştirmesi

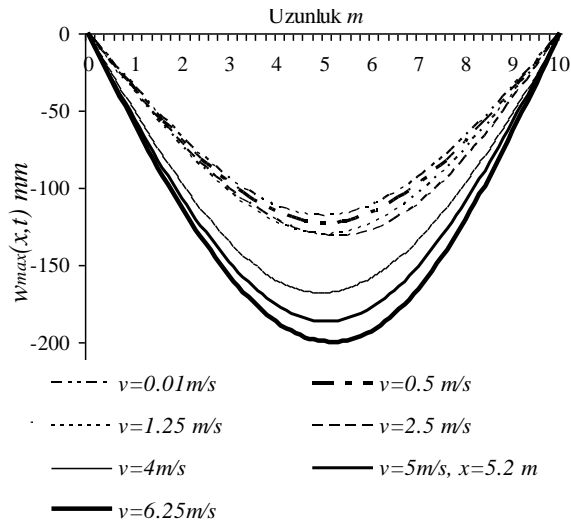


Şekil 10'da çeşitli hızlardaki yer değiştirmeleri toplu olarak göstermektedir. Bu şekil dinamik yer değiştirmenin hıza bağlı olarak değişimini açık bir şekilde izah etmekte olup, Foda ve diğerleri (1998)'de verilen diyagramlar (Şekil 3-5) ile karakteristik olarak aynıdır.



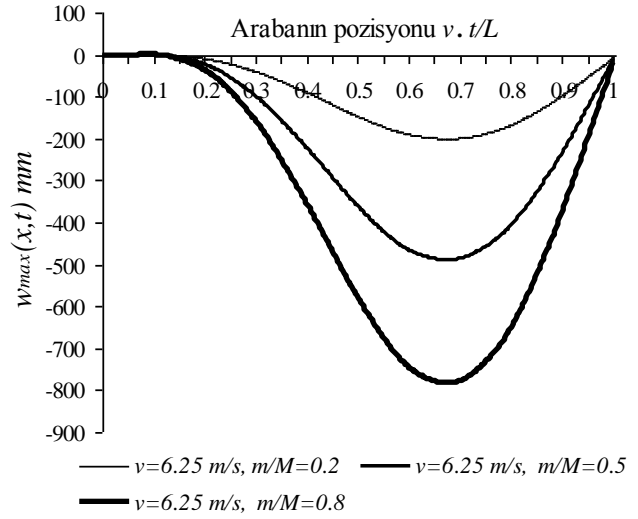
Şekil 10.  $m/M=0.2$  için değişik araba hızlarında kiriş üzerinde maksimum yer değiştirmenin oluştuğu noktaların araba pozisyonuna göre yer değiştirmesi

Hız artışıyla kirişin dinamik yer değiştirme miktarı artmaktadır (Şekil 11). Hızın farklı değerlerindeki yer değiştirme eğrisinin simetrik olmadığı bazı hız değerlerinde sola yatık, bazılarında ise sağa yatık olduğu görülmektedir.



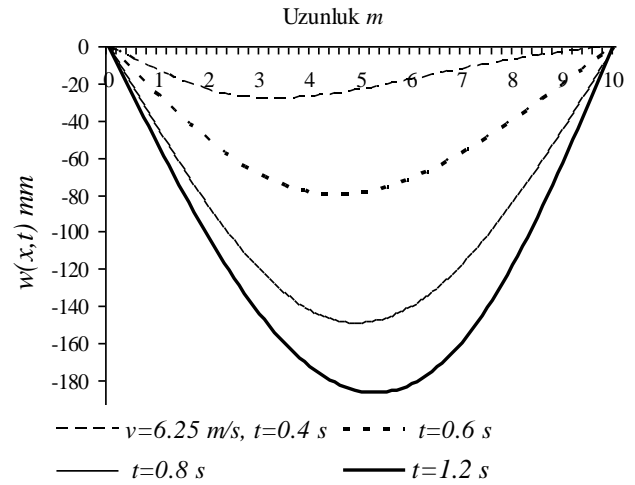
Şekil 11.  $m/M=0.2$  için değişik araba hızlarında maksimum yer değiştirmenin oluştuğu zaman esnalarında kirişin yer değiştirme şekilleri

Şekil 12'de  $v=6.25$  m/s,  $m/M=0.2, 0.5, 0.8$  için kirişin yer değiştirmesi gösterilmektedir.  $m/M$  oranının artmasıyla artan yüklerle beklendiği gibi yer değiştirme miktarları artmaktadır. Şekil 12'deki yer değiştirme diyagramlarından farklı kütle oranlarında titreşimin tarz olarak benzer olduğu büyüklük olarak değiştiği görülmektedir. Buradan kirişin yer değiştirme şeklinin kütle oranından çok hıza bağlı olduğu sonucuna varılır.



Şekil 12.  $v=6.25$  m/s,  $m/M=0.2, 0.5, 0.8$  için kirişin yer değiştirmesi

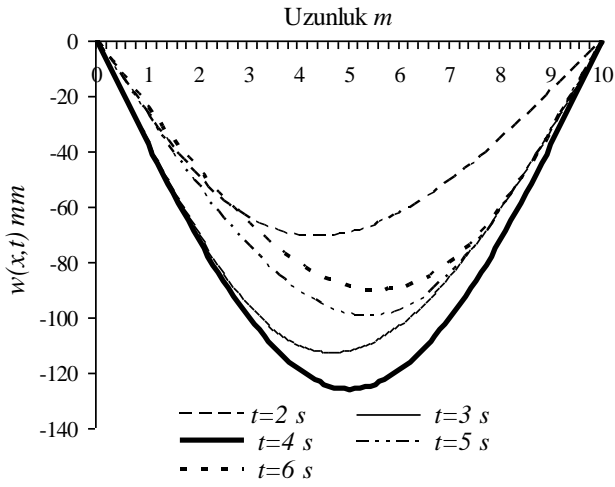
Şekil 13'te  $v=6.25$  m/s hızla ilerleyen arabanın çeşitli zamanlarda kirişte oluşturduğu dinamik yer değiştirmenin zamana bağlı değişimi görülmektedir.



Şekil 13.  $v=6.25$  m/s;  $m/M=0.2$ ,  $t=0.4, 0.6, 0.8, 1.2$  s zamanlarında kirişin yer değiştirmesi

Denklem (11)'den arabanın kiriş üzerindeki seyahat süresi,  $T=L/v=10/6.25=1.6$  s'dir. Araba 0.8 s'de orta noktadan geçmektedir ve bu zamanda oluşan yer değiştirme, diyagramda görüldüğü gibi  $t=12$  s de yani arabanın kirişin  $3L/4$  üne ulaştığı andaki yer değiştirmeden küçüktür.

Şekil 14'te toplam 8 saniyelik araba seyahati süresinde çeşitli zaman anlarındaki kirişin yer değiştirme şekli görünmektedir. Hız değişiminin kirişin dinamik davranışını nasıl değiştirdiği Şekil 13 ve 14'ten görülmektedir.



Şekil 14.  $v=1.25$  m/s;  $m/M=0.2$ ;  $t=2, 3, 4, 5$  ve  $6$  s zamanlarda kirişin yer değiştirmesi

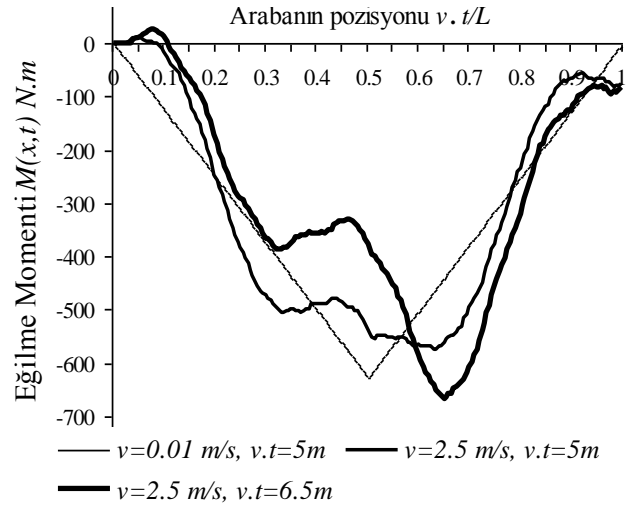
Şekil 14'te Şekil 13'ün tersine araba  $t=4$  s,  $L/2$  de iken oluşan yer değiştirme, araba  $t=6$  s,  $3L/4$  de ki yer değiştirmeden büyüktür. Yüksek hızlarda oluşan maksimum yer değiştirme arabanın kirişin uç kısmına yaklaşması anında oluşmaktadır. Hız çok artarsa maksimum yer değiştirme arabanın uç kısma o kadar çok yakın mesafede olduğu zamanda oluşmaktadır.

Yer değişimlerin dinamik değişimi gibi iç kuvvetler de dinamik olarak değişmektedir. Şekil 15'te  $m/M=0.2$ ,  $v=0.01$  m/s,  $v=2.5$  m/s hızları için  $v.t=5$  m kiriş orta noktasının ve maksimum momentin olduğu  $v.t=6.5$  m'nin araba pozisyonuna göre (zamana bağlı) moment diyagramları verilmiştir.

Arabanın  $v=0.01$  m/s hızı için oluşan dinamik moment, yük kirişin orta noktasında iken oluşan

statik moment değerine çok yakın olduğu için, diyagramda karşılaştırma yapılabilmesi amacıyla statik moment değeri olarak alınmıştır. Denklem (17) den,  $M_0=PL/4=mgL/4=25.6.9.81.10/4=627.84$  Nm'dir.  $v=0.01$  m/s için orta noktadaki dinamik moment  $628.1$  Nm'dir. Hızın sıfıra yaklaşmasıyla statik çözüme yaklaşılabileceği beklenen bir durumdur.

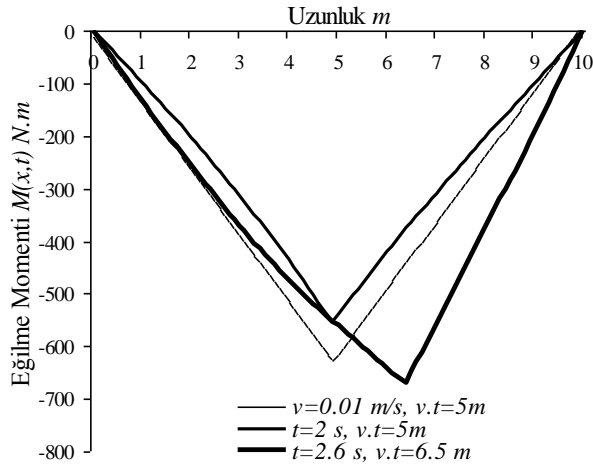
Arabanın  $v=2.5$  m/s hızı için zamana bağlı moment diyagramında maksimum moment, araba  $v.t=6.5$  m'ye ulaştığı anda oluşmaktadır. Araba kirişin orta noktasından geçerken oluşan dinamik moment değeri arabanın kirişin ortasında durgun durması halinde oluşacak statik moment değerinden küçüktür (Şekil 15).



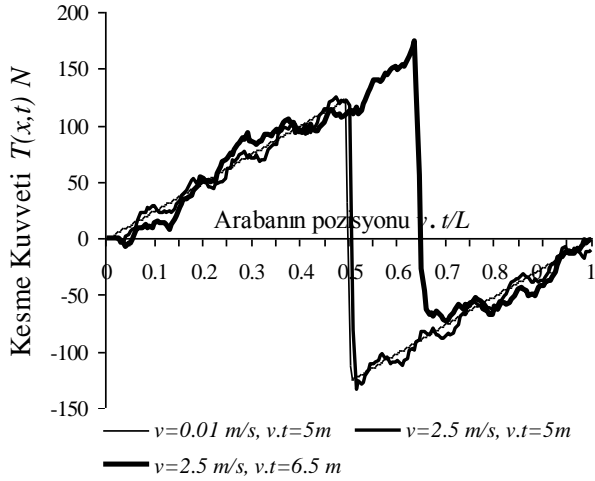
Şekil 15.  $m/M=0.2$ ,  $v=0.01$  m/s,  $v=2.5$  m/s hızları için  $v.t=5$  m kiriş orta noktasının ve maksimum momentin olduğu  $v.t=6.5$  m'nin araba pozisyonuna göre (zamana bağlı) moment diyagramları

Şekil 16, Şekil 15'te verilen sistemin anlık moment diyagramı olup, kiriş üzerindeki moment değişimini daha net göstermektedir.

Şekil 17'de arabanın kirişe temas ettiği noktada kesme kuvvetindeki işaret değişikliği görülmektedir. Farklı zamanlarda araba kiriş üzerinde farklı noktalarda bulunmaktadır. Elde edilen bu sonuç yapılan modellemenin gerçeğe uygululuğunu ortaya koymaktadır.



Şekil 16.  $m/M=0.2$ ,  $v=0.01$  m/s hızı ve  $v=2.5$  m/s için  $t=2$  s ve  $t=2.6$  s anlarında hareketli yük altındaki kirişin moment diyagramları



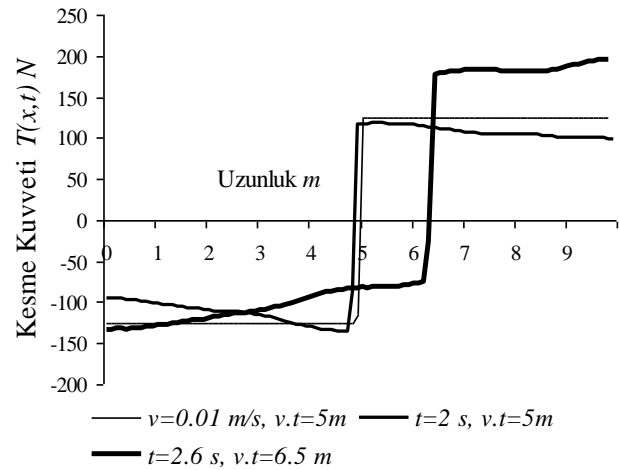
Şekil 17.  $m/M=0.2$ ,  $v=0.01$  m/s,  $v=2.5$  m/s hızları için  $v.t=5$  m kiriş orta noktasının ve maksimum momentin olduğu  $v.t=6.5$  m'nin araba pozisyonuna göre (zamana bağlı) kesme kuvveti diyagramları

Şekil 18'de  $m/M=0.2$ ,  $v=0.01$  m/s ve  $v=2.5$  m/s hızları için  $t=2$  s ve  $t=2.6$  s anlarında hareketli yük altındaki kirişin kesme kuvveti diyagramları verilmiştir. Moment ve kesme kuvvetlerindeki değişim sadece orta noktanın değil kiriş boyunun tamamının maksimum zorlanmaya maruz kalabildiğini ortaya koymaktadır.

## Sonuçlar

Kirişin dinamik davranışı, üzerindeki hareket eden yükün hızına ve kütlesine bağlı olarak de-

ğişmektedir. Hareket eden yük, kiriş sisteminin tabii titreşim frekansını değiştirmektedir. Yük kirişin farklı noktalarında iken kiriş sistemi farklı titreşim yapmaktadır. Yükün hızı arttıkça maksimum yer değiştirmenin olduğu yer kiriş orta noktasından ileriye gitmektedir. Bazı hız değerleri için maksimum nokta orta noktanın gerisinde de olabilmektedir. Kirişin hareketi dinamik olduğundan bazı durumlarda, yük statik olarak maksimum yer değiştirme oluşturacak orta noktada iken kirişin hareketinin zıt yönde olabilmesiyle bu noktada maksimum yer değiştirme oluşmamaktadır. Kirişin yer değiştirme şekli kütle oranından çok yükün hızına bağlıdır. Ağır şartlarda seri çalışan krenlerin hizmet ömrünün belirlenmesinde tasarım aşamasında kren sisteminin dinamik davranışının da hassas olarak belirlenmesi zorunludur. Kaldırılacak yükün miktarı ve arabanın hızı ve taşıyıcı sistemin dinamik özellikleri dikkate alınarak yapılacak analiz ve hesapların daha doğru olacağı gösterilmiştir.



Şekil 18.  $m/M=0.2$ ,  $v=0.01$  m/s hızı için ve  $v=2.5$  m/s hızı için  $t=2$  s ve  $t=2.6$  s anlarında hareketli yük altındaki kirişin kesme kuvveti diyagramları

## Semboller

$A$	: Kesit alanı
$E$	: Elastisite modülü
$f_i$	: Kirişin $i$ nci mod tabii titreşim frekansı
$g$	: Yerçekimi ivmesi
$I$	: Atalet momenti
$k$	: Yay katsayısı
$L$	: Kirişin uzunluğu
$m$	: Kütle

$M(x,t)$	: Zamana bağlı eğilme momenti
$M_0$	: Kiriş orta noktasındaki statik kuvvetin oluşturduğu eğilme momenti
$\mu$	: Kirişin birim uzunluğunun kütlesi
$\rho$	: Kirişin yoğunluğu
$P$	: Uygulanan dış kuvvet
$T$	: Yükün kiriş üzerinde seyahat süresi
$T(x,t)$	: Zamana bağlı kesme kuvveti
$T_0$	: Kiriş orta noktasındaki statik kuvvetin oluşturduğu kesme kuvveti
$T_{(i)}$	: $i$ nci mod serbest titreşim periyodu
$\omega$	: Hareketli kuvvetin dairesel etkileme frekansı
$\omega_b$	: Kirişin sönümlenme dairesel doğal frekansı
$\omega_i$	: Kirişin $i$ nci mod dairesel titreşim frekansı
$\dot{\omega}_{(i)}$	: Kirişin sönümlü $i$ nci mod dairesel titreşim frekansı
$\delta(x-v.t)$	: Dirac delta fonksiyonu
$v$	: Kuvvetin ilerleme hızı
$v_{kr}$	: Kritik hız
$t$	: Zaman
$\alpha$	: Hız parametresi
$\psi$	: Kirişin sönümlenme parametresi
$v.t$	: Arabanın kirişin sol ucuna olan uzaklığı (hız . zaman)
$w(x,t)$	: Kirişin zamana bağlı yer değişimi

## Kaynaklar

- Abu Hilal, M. ve Zibdeh, H.S., (2000). Vibration analysis of beams with general boundary conditions traversed by a moving force, *Journal of Sound and Vibration*, **229**, 2, 377-388.
- Foda, M.A. ve Abduljabbar, Z., (1998). A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, **210**, 3, 295-306.
- Fryba, L., (1999). Vibration of solids and structures under moving loads, Groningen: Noordhoff International.
- Gbadeyan, J.A. ve Oni, S.T., (1995). Dynamic behaviour of beams and rectangular plates under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, **182**, 5, 677-695.
- Lee, U., (1998). Separation between the flexible structure and the moving mass sliding on it, *Journal of Sound and Vibration*, **209**, 5, 867-877.
- Renard, J. ve Taazount, M., (2002). Transient responses of beams and plates subject to travelling load. Miscellaneous results, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **21**, 301-322.
- Savin, E., (2001). Dynamic amplification factor and response spectrum for the evaluation of vibrations of beams under successive moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, **248**, 2, 267-288.
- Wilson, E.L., (2002) *Three-dimensional static and dynamic analysis of structures*, Chapter 20, *Dynamic analysis by numerical integration*, Computers and Structures Inc. California, USA.
- Wu, J.J., Whittaker, A.R. ve Cartmell, M.P., (2000). The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads, *Computers and Structures*, **78**, 789-799.
- Wayou, A.N.Y, Tchoukuegno, R. ve Wofo, P., (2004). Non-linear dynamics of an elastic beam under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, **273**, 1101-1108.
- Wu, J.J., (2003). Use of equivalent beam models for the dynamic analyses of beam plates under moving force, *Computers and Structures*, **81**, 2749-2766.
- Xu., X., Xu, W. ve Genin, J., (1997). A non-linear moving mass problem, *Journal of Sound and Vibration*, **204**, 3, 495-504.
- Yang, B., Tan, C.A. ve Bergman, L.A., (2000). Direct numerical procedure for solution of moving oscillator problems, *Journal Of Engineering Mechanics*, **May**, 462-469.
- Yavari, A., Nouri, M. ve Mofid, M., (2002). Discret element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass, *Advances in Engineering Software*, **33**, 143-153.
- Zhu, X.Q. ve Law, S.S., (2001). Precise time-step integration for the dynamic response of a continuous beam under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, **240**, 5, 962-970.