itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:7, Sayı:1, 38-44
Kasım 2009

Nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik ayar teorisi

Lara T. KELLEYANE-ÖZHARAR*, Ömer Faruk DAYI

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Sicim teorisi, fonda bir Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz alanı varlığında çözüldüğünde bozonik koordinatların nonkomutatifliği, Ramond–Ramond alanı varlığında çözüldüğünde ise fermiyonik koordinatların nonantikomutatifliği ortaya çıkmaktadır. Nonkomutatiflik veya nonantikomutatiflik uzayın deforme edilmesiyle de elde edilebilir. Bu durumda çarpma işleminin yerini yıldız çarpımı alır. Nonkomutatif uzayda tanımlanan alan teorileri literatürde geniş ölçüde incelenmiştir. Deforme olmuş süper uzay (nonantikomutatif süperuzay) yeni yeni incelenmeye başlanmıştır. Sicim teorisi bir D–brane'in varlığında, sabit bir Ramond–Ramond alanı (gravifoton) fonunda çözüldüğünde süperuzayın deforme olduğu (nonantikomutatif hale geldiği) ve bu deformasyonu süpersimetrinin yarısını kırdığı görülmüştür. Süpersimetri üreteçleri olan Q süperyükleri korunurken, $\bar{Q}$ süperyükleri $\bar{\theta}$'a bağlı olmaları nedeniyle süperuzayın bir simetrisi olmaktan çıkmaktadır. N=1 teorisinin simetrisinin yarısı kırıldığından geriye kalan simetri N=1/2 süpersimetrisi olarak adlandırılır. Uygun bir limitte buradaki D–brane yaşam alanındaki açık sicim dinamiği Yang–Mills alanlarıyla tanımlanır. Bu yüzden de Ramond–Ramond fonundaki açık sicim dinamiğinin anlaşılması N=1/2 süpersimetrik ayar teorisinin irdelenmesiyle olacaktır. Bu çalışmada nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik alan teorisi zayıf–kuvvetli etkileşme dualitesi (S–dualite) açısından incelenecektir. Ana eyleme ait bölüşüm fonksiyonu kullanarak, ana eylemin ürettiği teorilerin bölüşüm fonksiyonlarının denkliği gösterilecektir. S–dualitesi kuvvetli etkileşme alanlarından zayıf etkileşme alanlarına bir gönderimdir. Eğer bir teori S–dualite altında değişmez kalıyorsa zayıf etkileşme alanında yapılan hesaplamalar kuvvetli etkileşme alanındakilere dönüştürülebilir. Bu da pertürbatif hesap tekniğinden yararlanılmasına olanak sağladığı için çok önemlidir.

Anahtar Kelimeler: *Nonantikomutatif alan teorisi, dualite, süpersimetri.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Lara KELLEYANE-ÖZHARAR. kelleyanel@itu.edu.tr. Tel: (532) 202 86 04.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan " Nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik ayar teorisi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 04.06.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 29.06.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Nonanticommutative N=1/2 supersymmetric gauge theory

Extended abstract

The idea behind the consideration of a noncommutative spacetime was to introduce an effective ultraviolet cutoff. However this view doesn't hold anymore. Instead it is hoped that with the help of the dynamics of the noncommutative field theories the underlying geometry of string theory will be better understood. String theory with D–branes solved in the presence of a Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz background field leads to noncommutative coordinates.

Noncommutativity may be introduced through the following star product which is the deformation of multiplication of functions in space–time:

$$f(x) \star g(x) = f(x) exp(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_x}\theta^{ij}\overrightarrow{\partial_y})g(x) \, .$$

Here θ^{ij} is the antisymmetric noncommutativity parameter. Another notion that we will use in this work is supersymmetry. By definition supersymmetry is a symmetry between fermions and bosons. Using the supersymmetry generators Q we can express this in the following way:

Q |boson> = Q |fermion>
Q |fermion> = Q |boson>

N=1 supersymmetric field theories are the best candidates for a generalization of the standard model of the elementary particles. It is useful to construct supersymmetric field theories in superspace formalism. A superfield is defined as a function in superspace which is parametrized by $(x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ coordinates (μ=0,1,2,3 and $\alpha, \dot{\alpha} = 1,2$). Here θ_α and $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ are anticommutative Weyl spinors which satisfy the following anticommutation relations:

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} = 0 \, .$$

D–branes are hypersurfaces on which open strings can end. In a certain low energy limit the string dynamics on the world volume of the D–brane is defined by the Yang–Mills fields. Considering a D–brane in a Ramond–Ramond (graviphoton) background one finds that the superspace is deformed and the N=1 supersymmetry is broken to N=1/2 supersymmetry. Q supercharges remain as a symmetry of the superspace , while the $\bar{Q}$ are broken due to their dependence on $\bar{\theta}$ coordinates. If functions in superspace are expressed in terms of y, θ_α and $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, where $y^\mu = x^\mu + \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ which satisfy $[y^\mu, y^\nu]=0$, then the multiplication can be replaced by the following star product where the derivatives are taken at constant y and θ_α:

$$f(\theta) \star g(\theta) = f(\theta) exp(-\frac{C^{\alpha\beta}}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta})g(\theta)$$

Here $C^{\alpha\beta}$, which is the symmetric deformation parameter, is defined by $C^{\mu\nu} \equiv C^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\sigma_\alpha^{\mu\nu\gamma}$ where $C_{\mu\nu}$ a self–dual graviphoton field strength. Thus instead of coordinates which are operators, one deals with the usual superspace variables. To get a better understanding of the open string dynamics, N=1/2 supersymmetric gauge theory needs to be further investigated. Nonanticommutative supersymmetric theories are defined in Euclidean space where the fermionic coordinates are not related by complex conjugation. When the fermionic θ coordinates are chosen to satisfy $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$ and $\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0$ $\bar{\theta}$ will no more be the complex conjugation of θ.

In the present work we will investigate the S–duality properties of nonanticommutative N=1/2 supersymmetric U(1) gauge theory using the parent action formalism. The notion of duality is very important as it makes the calculations easier. S–duality transformations can be obtained by exchanging original fields with their duals. It maps the states and vacua of a theory with coupling constant g to those of a theory with a coupling constant 1/g. Thus one can always benefit from perturbative calculation method. For simple theories like U(1) gauge theory S-duality property can be shown by rescaling its gauge fields. However, to study more complicated theories, such as noncommutative or nonanticommutative U(1) gauge theories, it is more convenient to use parent action formalism. By definition a parent action should give the original theory if the dual fields are eliminated using the equations of motion and vice versa. By showing the equivalence of the partition functions of the two theories we will conclude that the nonanticommutative N=1/2 supersymmetric U(1) gauge theory is invariant under S–duality.

Keywords: *Nonanticommutative field theory, duality, supersymmetry.*

Giriş

Bir D–brane'i sabit bir Ramond–Ramond alanı fonunda ele aldığımızda N=1 süpersimetrisinin yarısının kırılarak N=1/2 süpersimetrisi haline geldiğini görürüz (de Boer vd., 2003; Ooguri ve Vafa, 2003; Seiberg, 2003). Deforme olan süperuzayda koordinatlar şu özellikleri sağlar:

$$\left[y^m, y^n\right] = i\Theta^{mn}, \qquad \left[\theta^\alpha, \theta^\beta\right] = C^{\alpha\beta} \tag{1}$$

Burada Θ^{mn} bir Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz fonuna ve $C^{\alpha\beta}$ ise bir Ramond–Ramond fonuna karşılık gelmektedir. Uygun bir limitte buradaki D–brane yaşam alanındaki açık sicim dinamiği Yang–Mills alanlarıyla tanımlanır. Fondaki alanların varlığında altta yatan *N=1* süpersimetrik ayar teorisi de deforme olarak *N=1/2* süpersimetrik ayar teorisine dönüşür. Bu durumda çarpma işleminin yerini yıldız çarpımı alır. Bu yüzden de Ramond–Ramond fonundaki açık sicim dinamiğinin anlaşılması *N=1/2* süpersimetrik ayar teorisinin irdelenmesiyle olacaktır.

Nonantikomutatifliğin sicim teorisinden çıkışı

Sicim teorisi gravifoton fonunda çözüldüğünde nonantikomutatif uzay ortaya çıkmaktadır (de Boer vd., 2003; Ooguri ve Vafa, 2003). Nonantikomutatifliğin ortaya çıktığı II. tip sicim teorisi Lagrange yoğunluğu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} L_{II} = \frac{1}{2}\tilde{\partial} x^\mu \partial x_\mu + p_\alpha \tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{p}_{\dot{\alpha}} \tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \tilde{p}_\alpha \partial \tilde{\theta}^\alpha + \\ + \bar{\tilde{p}}_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\tilde{\theta}}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{2}$$

Burada "–" uzay–zaman kiralitesini, "~" ise yaşam alanı kiralitesini göstermektedir. z ve $\tilde{z}$ kompleks koordinatları gösterirken, ∂ ve $\tilde{\partial}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$ türevlerine karşılık gelmektedir. Orijinal koordinatlar yerine:

$$y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + i\tilde{\theta}^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\tilde{\theta}}^{\dot{\alpha}}$$

$$\bar{d}_{\dot{\alpha}} = \bar{p}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial x_\mu - \theta\theta\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial(\theta\theta)$$

$$q_\alpha = -p_\alpha - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial x_\mu + \frac{1}{2}\overline{\theta\theta}\partial\theta_\alpha - \frac{3}{2}\partial\left(\theta_\alpha \overline{\theta\theta}\right)$$

$$\bar{\tilde{d}}_{\dot{\alpha}} = \bar{\tilde{p}}_{\dot{\alpha}} - i\tilde{\theta}^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{\partial} x_\mu - \tilde{\theta}\tilde{\theta}\tilde{\partial}\bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\bar{\tilde{\theta}}_{\dot{\alpha}} \tilde{\partial}\left(\tilde{\theta}\tilde{\theta}\right)$$

$$\tilde{q}_\alpha = -\tilde{p} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\tilde{\theta}}^{\dot{\alpha}} \tilde{\partial} x_\mu + \frac{1}{2}\overline{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}\tilde{\partial}\tilde{\theta}_\alpha - \frac{3}{2}\tilde{\partial}\left(\tilde{\theta}_\alpha \overline{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}\right) \tag{3}$$

koordinatlarını kullanırsak (2) eşitliği ile verilen Lagrange yoğunluğunu,

$$\begin{aligned} L_{II} = \frac{1}{2}\tilde{\partial} y^\mu \partial y_\mu - q_\alpha \tilde{\partial}\theta^\alpha + \bar{d}_{\dot{\alpha}} \tilde{\partial}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \tilde{q}_\alpha \partial\tilde{\theta}^\alpha + \\ + \bar{\tilde{d}}_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\tilde{\theta}}^{\dot{\alpha}} + tamtürev \quad terimleri \end{aligned} \tag{4}$$

olarak elde ederiz. Fon olarak sabit bir gravifoton alanı almak için Lagrange yoğunluğuna

$$F^{\alpha\beta} q_\alpha \tilde{q}_\beta \tag{5}$$

teriminin eklenmesi gereklidir. Dolayısıyla yeni Lagrange yoğunluğu

$$L_{II} = -q_\alpha \tilde{\partial}\theta^\alpha - \tilde{q}\partial\tilde{\theta}^\alpha + \alpha' F^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \tag{6}$$

olur. q ve $\tilde{q}$'nun hareket denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}\theta^\alpha &= \alpha' F^{\alpha\beta} \tilde{q}_\beta \\ \partial\tilde{\theta}^\alpha &= -\alpha' F^{\alpha\beta} q_\beta \end{aligned} \tag{7}$$

etkin Lagrange yoğunluğu

$$L_{eff} = \left(\frac{1}{\alpha'^2 F}\right)_{\alpha\beta} \partial\tilde{\theta}^\alpha \tilde{\partial}\theta^\beta \tag{8}$$

olarak tanımlanır. Buradan da koordinatların nonantikomutatifliği çıkar:

$$\left\{\theta^\alpha, \theta^\beta\right\} = \alpha'^2 F^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} \neq 0 \tag{9}$$

Dolayısıyla gravifoton fonunun daha önce belirtilen deformasyona denk geldiği görülmüş olur.

Non–antikomutatif $N = 1/2$ süpersimetrik U(1) ayar teorisinin dualite değişmezliği

S–dualitesi kuvvetli etkileşme alanları ile zayıf etkileşme alanları arasında bir gönderimdir. Eğer bir teori S–dualite altında değişmez ise zayıf etkileşme alanında yapılan hesaplamalar kuvvetli etkileşme alanındakilere dönüştürülebilir.

Daha önce nonkomutatif U(1) ayar teorisinin S-dualite invaryanslığı Dayi ve Yapışkan (2004) çalışmasında Hamilton formalizmi kullanılarak gösterilmişti. Bu çalışmada ise N=1/2 süpersimetrik U(1) ayar teorisinin dualite özelliklerini araştırmak istiyoruz. Dual teoriyi tanımlamak için bir ana eylem oluşturacağız. U(1) ayar teorisinin dualite invaryanslığı ayar alanlarını yeniden ölçeklendirerek ya da ana eylem formalizmi kullanılarak gösterilebilir (Buscher, 1987; Buscher, 1988). Ana eylem formalizminin kullanılması U(1) ayar teorisinin dual formulas-yonunu vermesine olanak sağlar (Ganor vd., 2000). Ana eylem tanım olarak dual alanları hareket denklemlerini kullanarak yok ettiğimizde orijinal teoriyi vermelidir. Orijinal alanları hareket denklemleri yardımıyla yok ettiğimizde ise dual teoriyi elde ederiz.

Süpersimetrik U(1) ayar teorisi için ana eylem süperalanlarla Seiberg ve Witten (1994) çalışmasında verilmiştir. Nonkomutatif süpersimetrik U(1) ayar teorisi için ana eylem ise Dayı ve diğerleri (2003) çalışmasında oluşturulmuştur. Benzer bir yaklaşımla N=1/2 süpersimetrik ayar teorisi için de bir ana eylem oluşturmak istiyoruz. Bileşen alanlardan oluşan aşağıdaki eylemi ele alalım.

$$\begin{aligned} I_p = \frac{1}{g^2}\int d^4x\{ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\lambda\partial\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\partial\psi + \\ + \frac{1}{4}D_1^2 + \frac{1}{4}D_2^2 - \frac{i}{4}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi})\} \\ + \int d^4x\{\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}\partial_\lambda A_{D\kappa} + \frac{1}{2}\lambda\partial\bar{\lambda}_D + \frac{1}{2}\lambda_D\partial\bar{\lambda} - \\ -\frac{1}{2}\bar{\psi}\partial\lambda_D - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_D\partial\psi + \frac{i}{2}D_D(D_1 - D_2)\} \end{aligned} \quad (10)$$

Burada $F_{\mu\nu}$ herhangi bir ayar alanından bağımsız olan bir alandır. Dual alanların hareket denklemleri kullanılarak elde edilen orijinal teorinin eylemi Seiberg (2003) çalışmasında nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik U(1) ayar teorisi için önerilen eylemle aynıdır (Dayı vd., 2005):

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{g^2}\int d^4x\{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - i\lambda\partial\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 \\ -\frac{i}{2}C^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\bar{\lambda}\bar{\lambda}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Orijinal alanların hareket denklemleri kullanılarak elde edilen dual N=1/2 süpersimetrik ayar teorisinin eylemi ise

$$\begin{aligned} I_D = g^2\int d^4x\{ -\frac{1}{4}F_D^{\mu\nu}F_{D\mu\nu} - \frac{i}{2}\bar{\lambda}_D\partial\lambda_D - \frac{i}{2}\lambda_D\partial\bar{\lambda}_D \\ + \frac{1}{2}D_D^2 + \frac{i}{4}g^2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}C_{\lambda\kappa}F_{D\mu\nu}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D\} \end{aligned} \quad (12)$$

olarak bulunur. (11) ve (12) karşılaştırıldığında iki eylemin de aynı formda olduğu ve dualite dönüşümünün

$$\begin{aligned} g \to \frac{1}{g} \\ C^{\mu\nu} \to -\frac{1}{2}g^2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}C_{\lambda\kappa} \end{aligned} \quad (13)$$

olduğu gözlemlenebilir.

Nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik U(1) ayar teorisinin ve dual teorinin bölüşüm fonksiyonlarının eşitliği

(10) eylemine ait bölüşüm fonksiyonunun, (11) ve (12) eylemlerinin bölüşüm fonksiyonlarını üretmesi beklenmektedir. İntegrasyonları basitleştireceğinden Hamilton formülasyonunu kullanmak daha uygun olacaktır. Bu formülasyon için alanlara karşılık gelen kanonik momentumları tanımlamamız gerekmektedir. ($F_{\mu\nu}$, λ_α, $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$, ψ_α, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$, D_1, D_2) alanlarına ($P^{\mu\nu}$, Π_1^α, $\bar{\Pi}_{1\dot{\alpha}}$, Π_2^α, $\bar{\Pi}_{2\dot{\alpha}}$, P_1, P_2) momentumları,

$(A_{D\mu}, \lambda_{D\alpha}, \bar{\lambda}_D^{\dot\alpha}, D_D)$ alanlarına ise $(P_D^\mu, \Pi_D^\alpha, \bar\Pi_{D\dot\alpha}, P_D)$ momentumları karşılık gelsin. (10) eyleminden çıkan tüm kanonik momentumlar birincil bağlara yol açarlar. Ana eylemden elde edilen tüm birincil bağlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\phi_1^{0i} \equiv P^{0i} \approx 0 \quad , \quad \phi_2^{ij} \equiv P^{ij} \approx 0\,, \quad \chi_1^\alpha \equiv \Pi_1^\alpha \approx 0 \quad , \\
&\bar\chi_{1\dot\alpha} \equiv \bar\Pi_{1\dot\alpha} - \frac{i}{2g^2}\lambda^\alpha\sigma^0_{\alpha\dot\alpha} + \frac{1}{2}\lambda_D^\alpha\sigma^0_{\alpha\dot\alpha} \approx 0 \\
&\chi_2^\alpha \equiv \Pi_2^\alpha - \frac{i}{2g^2}\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{0\dot\alpha\alpha} - \frac{1}{2}\bar\lambda_{D\dot\alpha}\bar\sigma^{0\dot\alpha\alpha} \approx 0 \quad , \\
&\chi_{2\dot\alpha} \equiv \bar\Pi_{2\dot\alpha} \approx 0\,, \quad \Phi_1 \equiv \mathrm{P}_1 \approx 0 \quad , \quad \Phi_2 \equiv \mathrm{P}_2 \approx 0\,, \\
&\phi_{D_1} \equiv P_D^0 \approx 0 \quad , \quad \phi_{D_2}^i \equiv P_D^i - \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \approx 0\,, \\
&\chi_D^\alpha \equiv \Pi_D^\alpha - \frac{1}{2}\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\sigma^{0\dot\alpha\alpha} \approx 0 \quad , \\
&\chi_{D\dot\alpha} \equiv \bar\Pi_{D\dot\alpha} + \frac{1}{2}\lambda^\alpha\sigma^0_{\alpha\dot\alpha} \approx 0\,, \\
&\Phi_D \equiv \mathrm{P}_D \approx 0 \quad .
\end{aligned} \tag{14}$$

X_i ve P_{X_i} tüm alanlar ve onların momentumlarını göstermek üzere;

$$H_{pc} = \sum_l \dot X_l P_{X_l} - L$$

olarak tanımlanan kanonik Hamilton yoğunluğunun

$$\begin{aligned}
H_{pc} = &\frac{1}{g^2}[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\lambda\nabla\bar\lambda + \frac{i}{2}\bar\psi\nabla\psi - \\
&-\frac{1}{4}(D_1^2 + D_2^2) + \frac{i}{4}C^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\overline{\lambda\lambda} + \overline{\psi\psi})] - \\
&-\varepsilon^{ijk}F_{0i}\partial_j A_{D\kappa} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{ij}\partial_\kappa A_{D0} - \frac{1}{2}\lambda\nabla\bar\lambda_D - \\
&-\frac{1}{2}\lambda_D\nabla\bar\lambda + \frac{1}{2}\bar\psi\nabla\lambda_D + \frac{1}{2}\bar\lambda_D\nabla\psi - \\
&-\frac{i}{2}D_D(D_1 - D_2)
\end{aligned} \tag{15}$$

olduğu gösterilebilir. Genişletilmiş Hamilton yoğunluğu ise, $(\{\Phi_i\})$ tüm birincil bağları göstermek üzere;

$$H_E = H_{pc} + c^i\Phi_i \tag{16}$$

ile verilir. Bağların zaman içerisinde sabit olmaları koşulu olan

$$\{H_E, \Phi_i\} = \dot\Phi_i = \{H_{pc}, \Phi_i\} + c^i\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0 \tag{17}$$

ifadesinden elde edilen ikincil bağlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 \equiv \{H_{pc}, \mathrm{P}_1\} = -\frac{1}{2g^2}D_1 - \frac{i}{2}D_D \approx 0\,, \\
&\Delta_2 \equiv \{H_{pc}, \mathrm{P}_2\} = -\frac{1}{2g^2}D_2 + \frac{i}{2}D_D \approx 0\,, \\
&\Delta_D \equiv \{H_{pc}, \mathrm{P}_D\} = \frac{i}{2}(D_1 - D_2) \approx 0\,, \\
&\varphi_D \equiv \{H_{pc}, P_D^0\} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_k F_{ij} \approx 0\,, \\
&\varphi_1^{0i} \equiv \{H_{pc}, P_{0i}\} = F^{0i} - g^2\varepsilon^{ijk}\partial_j A_{Dk} + \\
&\qquad + \frac{ig^2}{2}C^{0i}(\overline{\lambda\lambda} + \overline{\psi\psi}) \approx 0\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Teorinin S–dual değişmezliğine sahip olup olmadığına karar verebilmemiz için ilgili yol integraline bakmamız gerekir. Yol integralinde kullanılacak olan bu bağların birinci sınıf mı ikinci sınıf mı olduklarını belirleyelim. ϕ_{D1} birinci sınıf bir bağdır. Aynı zamanda

$$\phi_{D_3} \equiv \partial_i\phi_{D_2}^i + \varphi_D = \partial_i P_D^i \approx 0 \tag{20}$$

lineer kombinasyonu da birinci sınıf bir bağdır. Bununla beraber $\phi_{D_2}^i$'nin rotasyonunu almaktan gelen iki lineer bağımsız bağ daha vardır.

$$\phi_{D_4}^n \equiv K_i^n\phi_{D_2}^i = K^{ni}\varepsilon_{ijk}\partial^j\phi_{D_2}^k \approx 0 \tag{21}$$

Burada $n = 1, 2$ ve K_i^n'ler açık ifadeleri bu çalışmada kullanılmayacak olan bazı sabitlerdir. φ_1^{0i}'i de aynı şekilde ayırırsak hesaplarımız kolaylaşır.

$$\varphi_2 \equiv \partial_i\varphi_1^{0i} = -\partial_i F^{0i} - \frac{i}{2}\partial_i C^{0i}(\overline{\lambda\lambda} + \overline{\psi\psi}) \approx 0 \tag{22}$$

$$\varphi_3^n \equiv L_i^n \varphi_1^{0i} = L^{ni}\varepsilon_{ijk}\partial^j \varphi_1^{0k} \approx 0. \quad (23)$$

Burada L^{nj}'ler yine açık ifadeleri bize gerekli olmayan sabitlerdir. Bu bağların gerekli olanları kullanılarak hem normal hem de dual Hamilton fonksiyonunu bulabilmemiz gerekir.

Faz uzayındaki bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki yazılabilir (Fradkin, 1973; Senjanovic, 1976).

$$Z = \int \prod_i D\Phi_i \; DP_{\Phi_i} \; M \; e^{i\int d^3x(\dot{\Phi}_i P_{\Phi_i} - H_p)} \quad (24)$$

$$M = N\det(\partial_i^2)\delta(\partial \cdot \mathbf{P}_D)\delta(\partial \cdot \mathbf{A}_D)\delta(P_{D0}) \\ \delta(A_{D0}) sdet\, M \prod_z \delta(S_z), \quad (25)$$

S_z tüm ikinci sınıf bağları göstermektedir: $S_z \equiv (\phi_1,\ \phi_2,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \phi_{D_4},\ \Phi_D,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \varphi_D,\ \Delta_D,\ \chi_1,\ \bar{\chi}_1,\ \chi_2,\ \bar{\chi}_2,\ \chi_D,\ \bar{\chi}_D)$.

Birinci sınıf bağlar ϕ_{D_1} ve ϕ_{D_3} için ayar koşulları

$$A_{D_0} = 0\,, \partial_i A_{D_i} = 0 \quad (26)$$

N ise normalizasyon sabitidir. İkinci sınıf bağların genelleştirilmiş Poisson parantezleri matrisi $M = \{S_z, S_{z'}\}$ şu şekildedir:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (27)$$

Burada BB = Bozonik bağlar, FB= Fermiyonik bağları göstermek üzere A = {BB, BB}, B = {BB, FB}, C = {FB, BB} = $-B^T$, D = {FB, FB} antikomutasyonlarından oluşmaktadır. M nin süperdeterminantı;

$$sdetM = (\det D)^{-1}\det(A - BD^{-1}C). \quad (28)$$

ile verilir. Süperdeterminanta bozonik kısımdan gelen katkı Dayı ve Yapışkan (2004) çalışmasında;

$$\det A = \det\left(\varepsilon_{ijk}\partial^i K_1^j K_2^k\right)\det\left(\varepsilon_{ijk}\partial^i L_1^j L_2^k\right). \quad (29)$$

olarak hesaplanmıştır. K_i^n ve L_i^n operatörleri (21) ve (23)'te tanımlanmıştır. Fermiyonik bağların katkısı ise şu şekildedir (Dayı vd., 2005):

$$\det D = -\left(\frac{1}{4\det g^2}\right)^2 \quad (30)$$

(24) denkleminde fermiyonik alanlara karşılık gelen tüm momentum integralleri ilgili delta fonksiyonları sayesinde kolayca yapılabilir:

$$\begin{aligned} Z = \int & DF^{\mu\nu}\; D\lambda\; D\psi\; D\bar{\lambda}\; D\bar{\psi}\; DD_1\; DP_1\; DD_2 \\ & DP_2\; DA_{D\mu}\; D\lambda_D\; D\bar{\lambda}_D\; DP_{D\mu}\; DD_D\; DP_D \\ & M\; exp\{i\int d^3x[P_1\dot{D}_1 + P_2\dot{D}_2 + P_D^0\dot{A}_{D0} + \\ & P_D^i\dot{A}_{Di} + P_D\dot{D} - \frac{1}{4g^2}F^{0i}F_{0i} - \\ & -\frac{1}{4g^2}F^{ij}F_{ij} - \frac{i}{2g^2}\lambda\partial\bar{\lambda} - \frac{i}{2g^2}\bar{\psi}\partial\psi + \\ & +\frac{1}{4g^2}(D_1^2 + D_2^2) - \frac{i}{2g^2}C^{0i}F_{0i}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi}) - \\ & -\frac{i}{4g^2}C^{ij}F_{ij}(\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \bar{\psi}\bar{\psi}) + \varepsilon^{ijk}F_{0i}\partial_j A_{Dk} - \\ & -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{ij}\partial_k A_{D0} + \frac{1}{2}\lambda\partial\bar{\lambda}_D + \frac{1}{2}\lambda_D\partial\bar{\lambda} - \\ & -\frac{1}{2}\bar{\psi}\partial\lambda_D - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_D\partial\psi + \frac{i}{2}D_D(D_1 - D_2)]\}.(31) \end{aligned}$$

Önce "D" indisi taşımayan alanlar üzerinden integral almak istiyoruz. Yapılışının ayrıntıları Dayı ve diğerleri (2005) çalışmasında bulunan bu integral alındıktan sonra bölüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} Z = \int & DA_{Di}\; D\bar{\lambda}_D\; DP_{Di}\; DD_D\; DP_D\; (\det g^2) \\ & \det\partial_i^2(\det\partial)^2\; \delta(D_D)\delta(P_D)\;\delta(\partial\cdot\mathbf{P}_D) \\ & \delta(\partial\cdot\mathbf{A_D})\; exp\{i\int d^3x[P_D^i\dot{A}_{Di} + P_D\dot{D}_D - \\ & -\frac{1}{2g^2}P_{Di}P_D^i - iC_D^{0i}P_{Di}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D - \frac{g^2}{4}F_D^{ij}F_{Dij} - \\ & -\frac{i}{2}g^2C_D^{ij}F_{Dij}\bar{\lambda}_D\bar{\lambda}_D - ig^2\lambda_D\partial\bar{\lambda}_D + \frac{g^2}{2}D_D^2]\}.(32) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de (31) denkleminde, "D" indisi taşıyan alanlar üzerinden integral alalım. Bu durumda bölüşüm fonksiyonu şu hale gelir:

$$
\begin{aligned}
Z = \int & DA_i \, DP^i \, D\lambda \, D\bar{\lambda} \, DD_1 \, D\mathrm{P}_1 \, (\det g^2) \\
& (\det \partial_i^2)(\det\partial)^2 \, \delta(D_1)\delta(P_1)\delta(\partial \cdot \mathbf{P})\delta(\partial \cdot \mathbf{A}) \\
& exp\{i\int d^3x[P^i \dot{A}_i + \dot{D}_1 \mathrm{P}_1 - \frac{g^2}{2}(P_i)^2 - iC^{0i} P_i \bar{\lambda}\bar{\lambda} - \\
& -\frac{1}{4g^2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 - \frac{i}{g^2}\lambda\partial\bar{\lambda} + \frac{1}{2g^2}D_1^2 - \\
& -\frac{i}{2g^2}C^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\bar{\lambda}\bar{\lambda}]\}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Eksponansiyelde orijinal teorinin 1. dereceden eylemini, (10) ifadesini görüyoruz.

(32) ve (33) ifadelerini kıyasladığımızda nonantikomutatif N=1/2 süpersimetrik U(1) ayar teorisinin ve dualinin bölüşüm fonksiyonlarının birbirine denk olduğunu görmüş oluruz.

$$
Z_{NA} = Z_{NAD} \tag{34}
$$

Dolayısıyla nonantikomutatif *N=1/2* süpersimetrik U(1) ayar teorisi zayıf–kuvvetli etkileşme dualitesi altında değişmezdir.

Kaynaklar

de Boer, J., Grassi, P.A., van Nieuwenhuizen, P., (2003) Non-commutative superspace from string theory, *Physics Letters,* **B 574** 98, hep-th/0302078.

Buscher, T.H., (1987) A symmetry of the string background field equations, *Physics Letters,* **B 194,** 59.

Buscher, T.H., (1988) Path-integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma models, *Physics Letters***, B 201,** 466.

Dayi, Ö.F., Kelleyane, L.T. ve Ülker, K., (2005) Duality invariance of non–anticommutative N=1/2 supersymmetric U(1) gauge theory, *Journal of High Energy Physics,* **10,** 035, hep–th/0504167.

Dayi, Ö.F., Ülker, K. ve Yapışkan, B., (2003) Duals of noncommutative supersymmetric U(1) gauge theory, *Journal of High Energy Physics,* **10,** 010, hep–th/0309073.

Dayi, Ö.F. ve Yapışkan, B., (2004) Equivalence of partition functions for noncommutative U(1) gauge theory and its dual in phase space, *Journal of High Energy Physics* 0411 064, hep–th/0407269.

Fradkin, E.S., (1973) Hamiltonian formalism in covariant gauge and the measure in quantum gravity in New Developments in Relativistic Quantum Field Theory, Proceedings of the 10th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland.

Ganor, O.J., Rajesh, G. ve Sethi, S., (2000) Duality and noncommutative gauge theory, *Physical Review*, **D 62,** 125008, hep-th/0005046.

Ooguri, H. ve Vafa, C., (2003) The C–Deformation of Gluino and Non–planar Diagrams, *Advances in Theoretical and Mathematical Physics,* **7,** 53, hep–th/0302109.

Seiberg, N., (2003) Noncommutative superspace, N = 1/2 supersymmetry, field theory and string theory, *Journal of High Energy Physics,* **0306** 010.

Seiberg, N. ve Witten, E., (1994) Electric–magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N = 2 supersymmetric Yang–Mills theory, *Nuclear Physics* **B426,** 19, hep–th/9407087.

Senjanovic, P., (1976) Path integral quantization of field theories with second class constraints, *Annals of Physics*, **100,** 227.