itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:7, Sayı:1, 9-20
Kasım 2009

Bilgisayarlı hesaplama yöntemleri ile beş boyutlu uzayzamanlarda dalga denklemlerinin incelenmesi

Tolga BİRKANDAN*, Mahmut HORTAÇSU

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Genel görelilikte kullanılan instantonlar, Yang-Mills denklemlerinin sonlu eylem çözümleri olan Yang-Mills instantonlarına karşılık gelen çözümlerdir. Weierstarss'ın genel "yerel en-küçük yüzeyler" çözümü, genel bir instanton metriği verir. Nutku helikoit metriği de bu genel metriğin helikoit en-küçük yüzeyine karşılık gelen özel bir durumudur. Dirac ve Laplace denklemleri dört boyutlu durumda Mathieu fonksiyonları cinsinden çözülebilir. Bir zaman koordinatı metriğe doğrudan eklenirse çözümler, literatürde yüksek boyutlu çözümlerde karşılaşılan çift konfluent Heun fonksiyonları olurlar. Bir dönüşüm yardımıyla Mathieu denkleminin tekillik yapısı elde edilir. Beş boyutlu durum, bu dönüşüm sayesinde Mathieu fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Zaman koordinatından gelen ek terimle birlikte, radyal ve açısal kısımlar değişik sabitler içerdiğinden, dört boyutlu durumdaki gibi bir ilerletici yazmak için bu fonksiyonların toplanması oldukça zorlaşır. Metriğin orijinde bir eğrilik tekilliğine sahip olması bu bölgenin dışarılanmasını gerektirir. Bu da uygun sınır koşullarının kullanımını önemli kılar. Tek sayılı boyutlarda, Atiyah, Patodi ve Singer tarafından tanımlanmış olan yerel olmayan spektral sınır koşulları, topolojik engeller sebebiyle zorunludur. Çift sayılı boyutlarda yerel sınır koşulları kullanılabilse de, Dirac operatörünün γ^5 ve yük eşleniği simetrilerinin korunması isteniyorsa yerel olmayan spektral sınır koşulları kullanılmalıdır. Bu problemde sınır koşulları uygulanırken Atiyah-Patodi-Singer formalizmi kullanılmıştır. Manifoldun sınırında yazılan denklemler, sınır tanımlanmadan yazılan denklemlerden daha tekildir ve bu da çözümü zorlaştırır. Bilgisayar, denklemlerin çıkarılması ve analizlerinde yoğun olarak kullanılmıştır. Newman-Penrose formalizmini kullanan bir Maple paketi, çalışmadaki analitik hesapları yapmak için geliştirilmiştir. Paket ayrıca instanton metrikleri için tam bir Newman-Penrose hesaplayıcısı olarak kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler: *Dalga denklemleri, Atiyah-Patodi-Singer sınır koşulları, Heun fonksiyonları, sembolik hesaplama.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Tolga BİRKANDAN. birkandant@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 72 42.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "A study of wave equations in five dimensional spacetimes with computational methods" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 07.07.2008 tarihinde dergiye ulaşmış, 01.08.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

A study of wave equations in five dimensional spacetimes with computational methods

Extended abstract

The interest in higher dimensional wave equations is driven by the usage of higher dimensional metrics in general relativity and string theory. Instanton solutions of general relativity are the counterparts of Yang-Mills instantons which are finite-action solutions of the Yang-Mills equations. They have an important contribution to the path-integral in the quantization of the Yang-Mills fields. The general relativistic instantons are also expected to play a similar role in the path-integral approach to quantum gravity. Weierstrass' general local solution of minimal surfaces yields to a general instanton metric and Nutku's helicoid metric is a special case which corresponds to the helicoid minimal surface of this general metric. Dirac and Laplace equations can be solved in terms of Mathieu functions in the four dimensional case. If a time coordinate is added trivially to the metric, the solutions become double confluent Heun functions which are known to arise in higher dimensional solutions in the literature. One can trade the irregular singularity at zero by two regular singularities at plus and minus one by a transformation, to reach at the same singularity structure of the Mathieu equation and give the solutions in this form. But the main difference between the two cases is that, although both the radial and the angular parts can be written in terms of Mathieu functions, the constants are different, modified by the presence of the new term coming from the time-dependence, which makes the summation of these functions to form the propagator quite difficult. In four dimensions one can use the summation formula for the product of four Mathieu functions -two of them for the angular and the other two for the radial part- summing them to give us a Bessel type expression.

Nutku helicoid solution has a curvature singularity at the origin. Therefore, in order to have a precise result we tried to apply the Atiyah-Patodi-Singer spectral boundary conditions which was necessitated by the dimension of the spacetime. One is free to choose the local boundary conditions in even dimensions. However, we applied the same type of boundary conditions to conserve γ^5 *and charge conjugation symmetries of the Dirac operator in the four dimensional case. The application of the spectral boundary conditions involves the solution of the so called the little Dirac equation, the Dirac equation written on the boundary of the manifold. The analytical solutions of the little Dirac equation could not be obtained. The singularity structure of the little Dirac equation can reveal why we could not obtain an analytical solution. The singularity analysis shows that the equation has irregular singularities at zero and infinity and a regular singularity at minus one. We see that this equation has one more singularity than the Heun functions; thus, our solution is not one of the better known solutions in the literature, which are included in the computer packages like Maple or cited in the comprehensive books such as Ince's.*

The computer programs are involved intensively in the derivation and analysis of the equations. Newman-Penrose (NP) formalism is a strong technique for investigating the physical properties of the exact solutions of Einstein's field equations. Goldblatt has developed NP formalism for gravitational instantons. In the gravitational instanton case, the gravitational field decomposes into its self-dual and anti-self-dual parts and this decomposition is natural in the spinor approach which necessitates two independent spin frames for the spinor structure of 4-dimensional Riemann manifolds with Euclidean signature. A Maple package using the Goldblatt's Newman-Penrose formalism for instanton spaces is developed for the analytical computations needed in the work. The package also supplies a complete Newman-Penrose calculator for instanton metrics. Although the numerical methods are still important for the analytically non-solvable systems such as N-body dynamics, analytical methods are getting more and more crucial in the applicable cases as the capacity of the computer systems and the symbolic manipulation packages increase.

It is a strong estimate that we will encounter higher equations -in the sense of the singularity structure- than the hypergeometric equations gradually more in the literature, as the phenomena in higher dimensions or in different geometries are studied. Having different confluent types and special cases which reduce to less singular equations, Heun's equation has a special importance to bring together the known literature with the physics of the future.

Keywords: *Wave equations, Atiyah-Patodi-Singer boundary conditions, Heun functions, symbolic computation.*

Giriş

Weierstarss'ın genel "yerel en-küçük yüzeyler" çözümü, genel bir instanton metriği verir. Nutku helikoit metriği de bu genel metriğin helikoit en-küçük yüzeyine karşılık gelen özel bir durumudur (Nutku, 1996; Aliev vd., 1999). Dirac ve Laplace denklemleri dört boyutlu durumda Mathieu fonksiyonları cinsinden çözülebilir. Bir zaman koordinatı metriğe doğrudan eklenirse çözümler, literatürde yüksek boyutlu çözümlerde karşılaşılan çift konfluent Heun fonksiyonları olurlar (Heun, 1889; Ronveaux, 1995). Bir dönüşüm yardımıyla Mathieu denkleminin tekillik yapısı elde edilir (Birkandan ve Hortaçsu, 2007). Beş boyutlu durum, bu dönüşüm sayesinde Mathieu fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Zaman koordinatından gelen ek terimle birlikte, radyal ve açısal kısımlar değişik sabitler içerdiğinden, dört boyutlu durumdaki gibi bir ilerletici yazmak için bu fonksiyonların toplanması oldukça zorlaşır. Makalenin ilk bölümlerinde, metriğin tanımının ardından dalga denklemleri incelenecektir.

Metriğin orijinde bir eğrilik tekilliğine sahip olması, uygun sınır koşullarının kullanımını önemli kılar. Tek sayılı boyutlarda, Atiyah, Patodi ve Singer tarafından tanımlanmış olan yerel olmayan spektral sınır koşulları, topolojik engeller sebebiyle zorunludur (Atiyah vd., 1975; Atiyah vd., 1976; Atiyah vd., 1980). Çift sayılı boyutlarda Neumann, Dirichlet veya Robin gibi yerel sınır koşulları kullanılabilse de, Dirac operatörünün γ^5 ve yük eşleniği simetrilerinin korunması isteniyorsa yerel olmayan spektral sınır koşulları kullanılmalıdır (Hortaçsu vd., 1980; Hortaçsu, 1983). Bu problemde sınır koşulları uygulanırken Atiyah-Patodi-Singer formalizmi kullanılmıştır (Birkandan ve Hortaçsu, 2007). Makalenin ikinci bölümü, sınır şartlarının uygulanmasına ve sınırdaki Dirac denkleminin tekillik analizine ayrılmıştır.

Bilgisayar, denklemlerin çıkarılması ve analizlerinde yoğun olarak kullanılmıştır. Goldblatt'ın instanton uzayları için geliştirdiği Newman-Penrose formalizmini kullanan bir Maple paketi, çalışmadaki analitik hesapları yapmak için geliştirilmiştir (Newman ve Penrose, 1962; Goldblatt, 1994; Aliev ve Nutku, 1999). Paket ayrıca instanton metrikleri için tam bir Newman-Penrose hesaplayıcısı olarak kullanılabilir. Bu paketin kısa bir tanıtımı makalenin üçüncü bölümünü oluşturmaktadır.

Metrik

Dalga denklemlerinin çözüleceği metrik, Nutku helikoit metriğine bir zaman boyutu eklenerek oluşturulmuştur (Nutku, 1996; Aliev vd., 1999; Birkandan ve Hortaçsu, 2007):

$$\begin{aligned} ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}}}[dr^2 + (r^2+a^2)d\theta^2 + \left(1+\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta\right)dy^2 \\ -\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta\, dydz + \left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)dz^2] \end{aligned} \quad (1)$$

Ricci skaleri sıfır olan bu metrik için Einstein denklemleri oluşturulduğunda, tüm bileşenlerin sıfır olduğu görülür. Bu da alınan metriğin dört boyutlu halinde olduğu gibi, beş boyutta bir boşluk çözümüne karşılık geldiğini gösterir. $a=0$ durumu düz uzay durumudur.

Metriğe $r = a\sinh x$ dönüşümü yapılırsa elde edilen metrik,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + \frac{a^2}{2}\sinh 2x(dx^2+d\theta^2) \\ &+ \frac{2}{\sinh 2x}[(\sinh^2 x + \sin^2\theta)dy^2 \\ &- \sin 2\theta dydz + (\sinh^2 x + \cos^2\theta)dz^2] \end{aligned} \quad (2)$$

olur. Bu metriğin dört boyutlu hali (zamandan bağımsız durum) için Dirac denklemleri özel fonksiyonlar kullanılmadan, Sucu ve Ünal (2004) ve Villalba (2005) tarafından incelenmiştir.

Dört boyutlu metrik için dyad,

$$l^\mu = \frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{2}(1,i,0,0) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} m^\mu = \frac{1}{\sqrt{\sinh 2x}}(0,0,\cosh(x-i\theta), \\ i\sinh(x-i\theta)) \end{aligned} \quad (4)$$

olarak seçilebilir. Bu durumda metrik, Goldblatt'ın geliştirdiği Newman-Penrose formalizmi kullanılarak,

$$ds^2 = l \otimes \overline{l} + \overline{l} \otimes l + m \otimes \overline{m} + \overline{m} \otimes m \qquad (5)$$

şeklinde yazılmaktadır (Goldblatt, 1994; Aliev ve Nutku, 1999).

Dirac operatörü

Kütleli spinör için eğri uzay Dirac denklemi, M spinör kütlesi olmak üzere,

$$i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi = M\psi \qquad (6)$$

olarak yazılır. Burada kovaryant türev,

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \Gamma_{\mu} \qquad (7)$$

ile verilmiştir. Γ_{μ} spin bağlantısıdır. Dirac matrisleri baz vektörleri cinsinden tanımlanabilir:

$$\gamma^{\mu} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & l^{\mu} & m^{\mu} \\ 0 & 0 & -\overline{m}^{\mu} & \overline{l}^{\mu} \\ \overline{l}^{\mu} & -m^{\mu} & 0 & 0 \\ \overline{m}^{\mu} & l^{\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Spin bağlantısı,

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{4}\gamma^{\nu}_{;\mu}\gamma_{\nu} \qquad (9)$$

olarak verilir.

Zamandan bağımsız metrik için inceleme

Denklem 2'deki metrikten zaman koordinatı çıkarılırsa orijinal Nutku helikoit metriği elde edilir. Denklem 6 kullanılarak Dirac denklemleri oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x + i\partial_\theta)\Psi_3 \\ &+a[\cos(\theta+ix)\partial_y + \sin(\theta+ix)\partial_z]\Psi_4 \\ &-\frac{Ma\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\Psi_1\} = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x - i\partial_\theta)\Psi_4 \\ &-a[\cos(\theta-ix)\partial_y + \sin(\theta-ix)\partial_z]\Psi_3 \\ &-\frac{Ma\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\Psi_2\} = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x - i\partial_\theta + \coth 2x)\Psi_1 \\ &-a[\cos(\theta+ix)\partial_y + \sin(\theta+ix)\partial_z]\Psi_2 \\ &-\frac{Ma\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\Psi_3\} = 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}(\partial_x + i\partial_\theta + \coth 2x)\Psi_2 \\ &+a[\cos(\theta-ix)\partial_y + \sin(\theta-ix)\partial_z]\Psi_1 \\ &-\frac{Ma\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\Psi_4 = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Kütlesiz durumda $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ ve $\{\Psi_3, \Psi_4\}$ çiftleri birbirinden ayrılır. Metrikte y ve z bağımlılığı bulunmadığından çözüm şu şekilde aranabilir:

$$\Psi_i = e^{i(k_y y + k_z z)}\Psi_i(x,\theta) \qquad (14)$$

Özdeğerler için $k_y = k\cos\phi, k_z = k\sin\phi$ dönüşümü yapılırsa ve

$$\Psi_1 = \frac{\sinh[x - i(\theta-\phi)]}{\sqrt{\sinh 2x}}\Psi_1 \qquad (15)$$

$$\Psi_2 = \frac{\sinh[x + i(\theta-\phi)]}{\sqrt{\sinh 2x}}\Psi_2 \qquad (16)$$

alınırsa denklemler basitleşir. Bulunan denklemlerin çözümleri Mathieu fonksiyonları cinsinden verilebilir:

$$\begin{aligned} &\Psi_1 = e^{ik(z\sin\phi + y\cos\phi)}\frac{\sinh[x - i(\theta-\phi)]}{\sqrt{\sinh 2x}}\times \\ &\{\left[Se(n_1, -\frac{a^2k^2}{4}, -ix) + So(n_1, -\frac{a^2k^2}{4}, -ix)\right] \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\times\left[Se(n_1,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)+So(n_1,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)\right]\}$$

$$\Psi_2=e^{ik(z\sin\phi+y\cos\phi)}\frac{\sinh[x+i(\theta-\phi)]}{\sqrt{\sinh 2x}}\times$$

$$\{\left[Se(n_2,-\frac{a^2k^2}{4},-ix)+So(n_2,-\frac{a^2k^2}{4},-ix)\right] \quad (18)$$

$$\times\left[Se(n_2,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)+So(n_2,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)\right]\}$$

$$\Psi_3=e^{ik(z\sin\phi+y\cos\phi)}\times\{$$

$$\left[Se(n_3,-\frac{a^2k^2}{4},-ix)+So(n_3,-\frac{a^2k^2}{4},-ix)\right] \quad (19)$$

$$\times\left[Se(n_3,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)+So(n_3,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)\right]\}$$

$$\Psi_4=e^{ik(z\sin\phi+y\cos\phi)}\times$$

$$\{\left[Se(n_4,-\frac{a^2k^2}{4},-ix)+So(n_4,-\frac{a^2k^2}{4},-ix)\right] \quad (20)$$

$$\times\left[Se(n_4,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)+So(n_4,-\frac{a^2k^2}{4},\theta+\phi)\right]\}$$

çözüm kümesi elde edilir (Birkandan ve Hortaçsu, 2007).

Zamana bağlı metrik için inceleme

Kütlesiz Dirac denklemleri şu halde bulunurlar:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x+i\partial_\theta)\Psi_3\\&+a[\cos(\theta+ix)\partial_y+\sin(\theta+ix)\partial_z]\Psi_4\\&+i\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_1\}=0\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x-i\partial_\theta)\Psi_4\\&-a[\cos(\theta-ix)\partial_y+\sin(\theta-ix)\partial_z]\Psi_3\\&+i\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_2\}=0\end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x-i\partial_\theta+\coth 2x)\Psi_1\\&-a[\cos(\theta+ix)\partial_y+\sin(\theta+ix)\partial_z]\Psi_2\\&-i\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_3\}=0\end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x+i\partial_\theta+\coth 2x)\Psi_2\\&+a[\cos(\theta-ix)\partial_y+\sin(\theta-ix)\partial_z]\Psi_1\\&-i\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_4\}=0\end{aligned} \quad (24)$$

Çözüm, dört boyutlu durumda olduğu gibi

$$\Psi_i=e^{i(k_y y+k_z z+k_t t)}\Psi_i(x,\theta) \quad (25)$$

şeklinde aranabilir. İlk iki denklemden Ψ_1 ve Ψ_2, Ψ_3 ve Ψ_4 cinsinden çözülürse ve diğer denklemlerde kullanılırsa sadece Ψ_3 ve Ψ_4 bağımlılığı bulunan iki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}&\{\partial_{xx}+\partial_{\theta\theta}+\frac{a^2k^2}{2}\{\cos[2(\theta+\phi)]-\cosh 2x\}\\&+\frac{a^2k_t^2}{2}\sinh 2x\}\Psi_{3,4}=0\end{aligned} \quad (26)$$

Değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılabilir:

$$\Psi_{3,4}(x,\theta)=R_{3,4}(x)S_{3,4}(\theta) \quad (27)$$

Açısal denklemlerin çözümleri dört boyutlu durumdaki gibi,

$$\begin{aligned}S_{3,4}(\theta)=&Se\left[n_{3,4},-\frac{a^2k^2}{4},\arccos(\sqrt{\frac{1+\cos(\theta+\phi)}{2}})\right]\\&+So\left[n_{3,4},-\frac{a^2k^2}{4},\arccos(\sqrt{\frac{1+\cos(\theta+\phi)}{2}})\right]\end{aligned} \quad (28)$$

çıkar. Radyal denklem ise şu duruma gelir:

$$\begin{aligned}&\{\partial_{xx}-\frac{a^2k^2}{2}\cosh 2x\\&+\frac{a^2k_t^2}{2}\sinh 2x-n_{3,4}\}R_{3,4}=0\end{aligned} \quad (29)$$

Bu denklemin çözümü çift konfluent Heun fonksiyonları cinsinden bulunur:

$$
\begin{aligned}
R_{3,4}(x) &= H_D\left[0,\frac{a^2k^2}{2}+n_{3,4},a^2k_t^2,\frac{a^2k^2}{2}-n_{3,4},\tanh x\right]\\
&+H_D\left[aynı\ parametreler\right]\\
&\times\int\frac{-dx}{H_D\left[aynı\ parametreler\right]^2}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Radyal denklem, birkaç dönüşümle Mathieu denklemi halinde de yazılabilir. Şu tanımlar yapılırsa:

$$A=\frac{a^2k_t^2}{2} \tag{31}$$

$$B=-n_{3,4} \tag{32}$$

$$C=-\frac{a^2k^2}{2} \tag{33}$$

ve şu dönüşüm yapılırsa:

$$z=e^{-2x} \tag{34}$$

Diferansiyel operatörün şu hale geldiği görülür:

$$O=4z^2\partial_{zz}+4z\partial_z+A'z+B+C'\frac{1}{z}. \tag{35}$$

Burada $A'=\frac{C-A}{2}$ ve $C'=\frac{C+A}{2}$'dir. Eğer

$$\sqrt{\frac{C'}{A'}}u=z, \tag{36}$$

alınırsa ve

$$w=\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u}) \tag{37}$$

dönüşümü yapılıp $E=\sqrt{A'C'}$ alınırsa,

$$O=(w^2-1)\partial_{ww}+w\partial_w+\frac{E}{2}w+\frac{B}{4} \tag{38}$$

operatörüne ulaşılır. Bu denklemin çözümleri Mathieu fonksiyonları cinsinden verilebilir:

$$
\begin{aligned}
R(w) &= Se(-B,E,\arccos\sqrt{\frac{w+1}{2}})\\
&+So(-B,E,\arccos\sqrt{\frac{w+1}{2}})
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Burada dört boyutlu uzaydakinden daha farklı bir durumla karşılaşılır. Açısal ve radyal kısımlar Mathieu fonksiyonları cinsinden yazılabilmişse de bu iki çözüm için sabitler farklı olmaktadır (Birkandan ve Hortaçsu, 2007). Radyal kısımdaki $\frac{a^2k_t^2}{2}$ sabiti açısal kısımda yoktur. Bu da fonksiyonların toplanmasını zorlaştıracağından propagatör yazmayı oldukça zorlaştırır. Dört boyutta sabitler aynı olduğundan toplamı yapmak kolaydır ve Bessel türü ifadeler bulunur (Aliev vd., 1999).

Skaler operatör

Skaler operatör,

$$
\begin{aligned}
H\Phi = \{&\partial_{xx}+\partial_{\theta\theta}+a^2\sinh^2 2x(\partial_{yy}+\partial_{zz})\\
&+a^2(\cos\theta\partial_y+\sin\theta\partial_z)^2\\
&-a^2\sinh x\cosh x\partial_{tt}\}\Phi
\end{aligned}
\tag{40}
$$

olarak bulunur. Açısal kısma şu şekilde bir tanım yapalım:

$$K=-\partial_{\theta\theta}-a^2(\cos\theta\partial_y+\sin\theta\partial_z)^2 \tag{41}$$

ve $K\Phi=\lambda\Phi$ olsun. Ayrıca,

$$\partial_t\Phi=k_t\Phi\,,\partial_y\Phi=k_y\Phi\,,\partial_z\Phi=k_z\Phi \tag{43}$$

ve

$$\Phi=e^{i(k_tt+k_yy+k_zz)}R(x)S(\theta) \tag{44}$$

olarak alınabilir. $k_y=k\cos\phi$, $k_z=k\sin\phi$ tanımı yapıldığında, açısal denklem,

$$\frac{d^2\tilde{S}}{d\tilde{\theta}^2}+(\lambda-a^2k^2\cos^2\tilde{\theta})\tilde{S}=0 \tag{45}$$

olarak yazılır. Burada $\tilde{\theta}=\theta-\phi$ ve $\tilde{S}$, bu yeni parametreye bağlı olan fonksiyondur. Çözüm,

$$S(\theta)=C_1Se(\frac{-a^2k^2}{2}+\lambda,\frac{a^2k^2}{4},\theta-\phi)$$
$$+C_2So(\frac{-a^2k^2}{2}+\lambda,\frac{a^2k^2}{4},\theta-\phi) \quad (46)$$

olarak bulunur. Radyal denklem ise,

$$\frac{d^2R}{dx^2}+a^2(\sinh x\cosh xk_t^2$$
$$-k^2\sinh^2 x-\frac{\lambda}{a^2})R=0 \quad (47)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin bu haliyle çözümü Dirac denkleminde olduğu gibi çift konfluent Heun fonksiyonları cinsinden bulunur. Dört boyuttakine benzer dönüşümler yapıldığında bu denklemin de Mathieu denklemine dönüştüğü görülür. Sonuçta,

$$\tilde{R}(z)=C_1Se(-B',E,\arccos\sqrt{\frac{2z+2}{2}})$$
$$+C_2So(-B',E,\arccos\sqrt{\frac{2z+2}{2}}) \quad (48)$$

olarak bulunur. Burada,

$$A=a^2k_t^2, B=-\lambda, C=-a^2k^2,$$
$$A'=A/4, B'=B-\tfrac{C}{2}, C'=C/4, \quad (49)$$
$$A''=-A'+C', C''=A'+C', E=\sqrt{A''C''}$$

olarak tanımlanmıştır.

Atiyah-Patodi-Singer sınır koşulları

Tek sayılı boyutlarda, Atiyah, Patodi ve Singer tarafından tanımlanmış olan yerel olmayan spektral sınır koşulları, topolojik engeller sebebiyle zorunludur (Atiyah vd., 1975; Atiyah vd., 1976; Atiyah vd., 1980). Çift sayılı boyutlarda Neumann, Dirichlet veya Robin gibi yerel sınır koşulları kullanılabilse de, Dirac operatörünün γ^5 ve yük eşleniği simetrilerinin korunması isteniyorsa yerel olmayan spektral sınır koşulları kullanılmalıdır (Hortaçsu vd., 1980; Hortaçsu, 1983).

Beş boyutta çözümler

Metriğe "Öklitsel zaman koordinatı" şu şekilde eklenebilir:

$$ds^2=dt^2+ds_4^2 \quad (50)$$

Beşinci boyutun zaman olarak işleme katılması nedensellikle ilgili sorunlar doğurur (Abrisokov, 2006). Yerel olmayan sınır şartlarını kullandığımızda bu şartlar tüm zamanlar için geçerli olur. Abrikosov, nedenselliği bozmayan yeni bir yöntem geliştirmiştir fakat elimizdeki sınırdaki Dirac denklemi üç spinör bileşeni cinsinden olduğundan uygulanamaz (Abrisokov, 2006; Abrikosov ve Wipf, 2007). Bu yüzden dört ve beş boyutta metrik Öklitsel olarak alınarak işlem yapılacaktır.

Sistem $L\psi=\Lambda\psi$ formunda yazarak çözüm aranacaktır. Denklemler,

$$\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x+i\partial_\theta)\Psi_3+$$
$$a[\cos(\theta+ix)\partial_y+\sin(\theta+ix)\partial_z]\Psi_4 \quad (51)$$
$$-\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_1\}=\Lambda\Psi_1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x-i\partial_\theta)\Psi_4$$
$$-a[\cos(\theta-ix)\partial_y+\sin(\theta-ix)\partial_z]\Psi_3 \quad (52)$$
$$-\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_2\}=\Lambda\Psi_2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x-i\partial_\theta+\coth 2x)\Psi_1$$
$$-a[\cos(\theta+ix)\partial_y+\sin(\theta+ix)\partial_z]\Psi_2 \quad (53)$$
$$+\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_3\}=\Lambda\Psi_3$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{\sinh 2x}}\{(\partial_x + i\partial_\theta + \coth 2x)\Psi_2$$
$$+a[\cos(\theta - ix)\partial_y + \sin(\theta - ix)\partial_z]\Psi_1 \qquad (54)$$
$$+\frac{a\sqrt{\sinh 2x}}{\sqrt{2}}\partial_t\Psi_4\} = \Lambda\Psi_4$$

şeklindedir. Çözüme ulaşmak için değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılacaktır. Çözüm şu şekilde aranabilir:

$$\Psi_i = e^{i(k_t t + k_y y + k_z z)}\Psi_{\text{i}}(x,\theta) \qquad (55)$$

$k_y = kcos(\phi), k_z = ksin(\phi)$ alınacaktır. $coth2x$ terimlerinden kurtulmak için $\psi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{sinh2x}} f_{1,2}$ dönüşümü yapılabilir. Bu durumda denklemler:

$$(\partial_x + i\partial_\theta)\Psi_3 + iak[\cos(\theta - \phi + ix)]\Psi_4$$
$$-iak_t f_1 = \Lambda\frac{a}{\sqrt{2}} f_1 \qquad (56)$$

$$(\partial_x - i\partial_\theta)\Psi_4 - iak[\cos(\theta - \phi - ix)]\Psi_3$$
$$-iak_t f_2 = \Lambda\frac{a}{\sqrt{2}} f_2 \qquad (57)$$

$$(-\partial_x + i\partial_\theta) f_1 + iak[\cos(\theta - \phi + ix)] f_2$$
$$+iak_t\Psi_3 = -\Lambda\frac{a\sinh 2x}{\sqrt{2}}\Psi_3 \qquad (58)$$

$$(-\partial_x - i\partial_\theta) f_2 - iak[\cos(\theta - \phi - ix)] f_1$$
$$+iak_t\Psi_4 = -\Lambda\frac{a\sinh 2x}{\sqrt{2}}\Psi_4 \qquad (59)$$

haline gelir.

Denklemlerden $f_{1,2}$ çekilerek diğer denklemlerde kullanıldığında ikinci derece ama tek bileşene bağlı denklemler elde edilir.

$$(\partial_{xx} + \partial_{\theta\theta} + \frac{a^2}{2}[k^2\left(-\cos[2(\theta - \phi)] - \cosh 2x\right)$$
$$-(k_t^2 + \Lambda^2)\sinh 2x)\Psi_{3,4} = 0 \qquad (60)$$

Bu denklem $\Psi_{3,4} = R(x)S(\theta - \phi)$ çözüm önerisiyle iki adi diferansiyel denkleme indirgenebilir ve Mathieu fonksiyonları cinsinden çözülebilir:

$$S(\theta) = C_1 So[n, \frac{a^2k^2}{4}, \theta - \phi]$$
$$+C_2 Se[n, \frac{a^2k^2}{4}, \theta - \phi] \qquad (61)$$

$$R(x) = D_1 So[n, A, i(x+b)]$$
$$+D_2 Se[n, A, i(x+b)] \qquad (62)$$

Burada C_1, C_2, D_1, D_2 keyfi sabitlerdir ve $A = \frac{a^2}{4}[k^4 - (k_t^2 + \Lambda^2)^2]^{1/2}$ olarak tanımlanır. Bu sabit *R(x)* için yazılan denklemi çift konfluent Heun denkleminden Mathieu denklemine dönüştürürken oluşmuştur. *b* şu şekilde tanımlanmıştır:

$$e^{-2b} = \sqrt{\frac{k^2 - k_t^2 - \Lambda^2}{k^2 + k_t^2 + \Lambda^2}} \qquad (63)$$

Bu şekilde, Dirac denkleminin alt bileşenlerinin sıfırda düzenli yapıda olan fonksiyonlarla ifade edilebildiği görülmüştür. Aynı durum üst bileşenler için doğru değildir. Bunlar, bulduğumuz alt bileşenlerin çözümlerinin türevleri ve bunları bölen, sıfırda ıraksayan bir fonksiyon olduğu halde bulunurlar. Hiperbolik sinüs olarak açılabilen "Tek Mathieu fonksiyonları" kullanılsa bile türevleri hiperbolik kosinüs fonksiyonları olacaktır. Bileşenleri elde etmek için sonuç $\sqrt{sinh2x}$ ile bölünmelidir ve bu da sıfırda ıraksamayı engellenemez duruma getirir. Bununla birlikte, bu çözümler için sıfır etrafında bir sonlu skaler çarpım tanımlanabilir:

$$\int \Psi_i^* \Psi_i \sqrt{g}\, d\tau \quad (i = 1..4) \qquad (64)$$

Burada $d\tau$ beş boyutlu uzayın hacim elemanıdır. Tekrarlanan indisler üzerinden toplam yoktur. $\sqrt{g}$ metriğin determinantının kareköküdür ve invaryant bir hacim elemanı için gereklidir. x sonsuza giderken çözümler normalize değildir. Bununla beraber metriğin sıfırda eğrilik tekilliği vardır. İntegrasyonu $0 < x < F$ aralığında yapmak sorunu çözer. Burada F fonksiyonun ıraksamaya başladığı noktadır. Bu durum uzaya bir sınır koymak anlamına gelmektedir. Bu denklemler çözümler üzerine bir sınır koşulu uygulanmadıkça anlamlı değildir ve sistem tek sayılı boyutta olduğundan bu koşullar spektral sınır koşullarıdır (Atiyah vd., 1975; Atiyah vd., 1976; Atiyah vd., 1980; Hortaçsu vd., 1980; Hortaçsu, 1983).

Küçük Dirac denklemi, Dirac denkleminin sınırdaki değerine karşılık gelmektedir. Burada x sabit bir değer (x_0) alır. Önceki dönüşümle $\coth 2x$ 'li terimlerden kurtulduktan sonra denklemler yazılırsa:

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{i\partial_\theta\Psi_3 + ika\cos(\theta-\phi+ix_0)\Psi_4 - \frac{iak_t}{\sqrt{2}}f_1\} = \lambda f_1 \tag{65}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{-i\partial_\theta\Psi_4 - iak\cos(\theta-\phi-ix_0)\Psi_3 - \frac{iak_t}{\sqrt{2}}f_2\} = \lambda\Psi_2 \tag{66}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{-i\partial_\theta f_1 - iak\cos(\theta-\phi+ix_0)f_2 + \frac{iak_t}{\sqrt{2}}\Psi_3\} = \lambda\Psi_3 \tag{67}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{i\partial_\theta f_2 + iak\cos(\theta-\phi-ix_0)f_1 + \frac{iak_t}{\sqrt{2}}\Psi_4\} = \lambda\Psi_4 \tag{68}$$

bulunur. Burada λ küçük Dirac denkleminin özdeğeridir.

Çözümler x_0 'ın iki sabit değeriyle belirlenmiş sınırda küçük Dirac denkleminin artı ve eksi λ özdeğerleri üzerinden açılabilir. Alt bileşenler için

$$\Psi^{\Lambda}_{3,4}(\Theta,x_0) = \sum_{\lambda} h_\lambda(\Theta,x_0) \tag{69}$$

yazılabilir. Burada k_t, k_y, k_z sabit değerler almaktadır. Sınırda,

$$\Psi^{\Lambda}_{3,4}(\Theta,x_0)\,|_{\partial B} = \sum_{\lambda>0} h_\lambda(\Theta,x_0) \tag{70}$$

yazılabilir. Sınır üzerinde negatif λ özvektörleri sıfıra eşitlenir. Sonraki aşamada $\Psi_{1,2}$, $\Psi_{3,4}$ cinsinden şu denklemler kullanılarak bulunabilir:

$$\{(\partial_x + i\partial_\theta)\Psi_3 + iak[\cos(\theta+ix)cos(\phi) + \sin(\theta+ix)sin(\phi)]\Psi_4 - iak_t f_1\} = \Lambda\frac{a}{\sqrt{2}}f_1 \tag{71}$$

$$\{(\partial_x - i\partial_\theta)\Psi_4 - iak[\cos(\theta-ix)cos(\phi) + \sin(\theta-ix)sin(\phi)]\Psi_3 - iak_t f_2\} = \Lambda\frac{a}{\sqrt{2}}f_2 \tag{72}$$

Denklemler yazıldıktan sonra, sınırda x değerleri x_0 'a eşitlenir. $x = x_0$ durumunda diğer terimler gibi x türevi de bu noktada hesaplanır. $\Psi_{3,4}$ için özfonksiyonları cinsinden verilen açılım kullanılabilir:

$$\Psi^{\Lambda}_{3,4}(\Theta,x_0) = \sum_{\lambda} h_{\lambda,3,4}(\Theta,x_0) \tag{73}$$

Burada toplam tüm λ değerleri üzerindendir. Sınır üzerinde $f_{1,2}$ 'nin $\Psi_{3,4}$ cinsinden sabitlenmesi için açılımın $\lambda < 0$ kısmı kullanılır:

$$\Psi^{\Lambda}_{3,4}(\Theta,x)\,|_{\partial B} = \sum_{\lambda<0} h_{\lambda,3,4}(x_0,\Theta) \tag{74}$$

Bu sınır koşulları yerel olmamakla birlikte tek sayılı boyutlu Öklitsel uzaylarda tutarlı tek seçim oldukları Atiyah-Patodi-Singer tarafından gösterilmiştir (Atiyah vd., 1975; Atiyah vd., 1976; Atiyah vd., 1980; Birkandan ve Hortaçsu 2007).

Dört boyutta çözümler

Dört boyutlu durum, k_t 'nin sıfıra eşit olduğu durumla verilebilir. sistemi $L\psi = \Lambda\psi$ şeklinde yazabiliriz. Çözümler şu şekilde elde edilir:

$$S(\theta) = C_1 Se[n,\frac{a^2k^2}{4},\theta-\phi] + C_2 So[n,\frac{a^2k^2}{4},\theta-\phi] \tag{75}$$

$$R(x) = D_1 Se[n,B,i(x+b)] + D_2 So[n,B,i(x+b)] \quad (76)$$

Burada C_1, C_2, D_1, D_2 keyfi sabitlerdir ve $B = \frac{\sqrt{k^4 - \Lambda^4}}{2}$ olarak verilir. b değeri, denklem 1.192'da $k_t = 0$ kullanılmasıyla bulunur. Ayrılma sabiti n, açısal Mathieu denklemi $S(\Theta)$'nın periyodik çözümlerinin olabilmesi için ayrık değerler almalıdır.

$R(x)$ denklemi tablolarda Mathieu tipi denklem olarak görülmez; bu duruma getirmek için önceki bölümde açıklanan dönüşümler yapılmalıdır. Sıfır noktasında alt bileşenler sonluyken üst bileşenlerin ıraksadığı görülür. Sonsuzda iki tür bileşen de ıraksaktır.

Metriğin sıfırda eğrilik tekillikleri vardır, bu da çözümlerin $0 < x < F$ aralığında kalması gerektiği koşulunu getirir. Burada F fonksiyonun ıraksamaya başladığı noktadır.

Sınır koşullarını uygulamak için küçük Dirac denklemi yazılır. Sınırda x, x_0 değerini alır. Denklemler şu formda yazılabilir:

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{i\partial_\theta \Psi_3 + ika\cos(\theta - \phi + ix_0)\Psi_4\} = \lambda f_1 \quad (77)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{-i\partial_\theta \Psi_4 - ika\cos(\theta - \phi - ix_0)\Psi_3\} = \lambda f_2 \quad (78)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{-i\partial_\theta f_1 - ika\cos(\theta - \phi + ix_0) f_2\} = \lambda \Psi_3 \quad (79)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{i\partial_\theta f_2 + ika\cos(\theta - \phi - ix_0) f_1\} = \lambda \Psi_4 \quad (80)$$

Burada λ küçük Dirac denkleminin özdeğeridir.

Çözümler x_0'ın iki sabit değeriyle belirlenmiş sınırda küçük Dirac denkleminin artı ve eksi λ özdeğerleri üzerinden açılabilir. Alt bileşenler için

$$\Psi_i^\Lambda(\Theta, x_0) = \sum_\lambda g_{i,\lambda}(\Theta, x_0) \quad (81)$$

k_y, k_z değerleri sabittir. Sınırda negatif değerli özvektörler sıfıra eşitlenir:

$$\Psi_{3,4}^\Lambda(\Theta, x)|_{\partial B} = \sum_{\lambda>0} g_{\lambda,3,4}(\Theta, x_0) \quad (82)$$

Diğer bileşenler $f_{1,2}$, $\Psi_{3,4}$ cinsinden şu denklemler kullanılarak bulunabilir:

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{(\partial_x + i\partial_\theta)\Psi_3 + a[\cos(\theta - \phi + ix)]\Psi_4\} = \lambda f_1 \quad (83)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{a}\{(\partial_x - i\partial_\theta)\Psi_4 - a[\cos(\theta - \phi - ix)]\Psi_3\} = \lambda f_2 \quad (84)$$

Sınırda x değerleri x_0'a eşitlenir. $\Psi_{3,4}$ için özfonksiyonları cinsinden verilen açılım kullanılabilir:

$$\Psi_{3,4}^\Lambda(\Theta, x_0) = \sum_\lambda g_{\lambda,3,4}(\Theta, x_0) \quad (85)$$

Burada toplam tüm λ değerleri üzerindendir. Sınır üzerinde $f_{1,2}$'nin $\Psi_{3,4}$ cinsinden sabitlenmesi için açılımın $\lambda < 0$ kısmı kullanılır:

$$\Psi_{3,4}^\Lambda(\Theta, x)|_{\partial B} = \sum_{\lambda<0} g_{\lambda,3,4}(x_0, \Theta) \quad (86)$$

Bunlar yerel olmamakla birlikte kendine eşlenikliğe uyumlu, γ^5 and yük eşlenikliği simetrisini koruyan sınır şartlarıdır (Birkandan ve Hortaçsu, 2007).

Küçük Dirac denkleminin tekillik analizi

$\lambda = 0$'da küçük Dirac denkleminden örnek olarak f_2 bileşeni için çözüm aranırsa çözülmesi gereken denklem,

$$-\frac{d^2}{d\tilde{\Theta}^2} f_2 - \tan\tilde{\Theta}\frac{d}{d\tilde{\Theta}} f_2 + \frac{(ak)^2}{2}[\cos(2\tilde{\Theta})\cosh(2x_0) - i\sin(2\tilde{\Theta})\sinh(2x_0) + \cosh(2x_0)] f_2 = 0 \quad (87)$$

olarak bulunur ($\tilde{\Theta} = \theta - \phi - ix_0$).

$$u = e^{2i\tilde{\Theta}} \tag{88}$$

dönüşümü yapılabilir. Bu dönüşüm yardımıyla tekillik durumu daha iyi incelenebilir.

Bu durumda denklem,

$$\begin{aligned}&\{4(u+1)u[u\frac{d^2}{du^2}+\frac{d}{du}]-2iu(u-1)\frac{d}{du}\\&+\frac{(ak)^2}{2}(u+1)[ue^{-2x_0}\\&+\frac{1}{u}e^{2x_0}+\cosh(2x_0)]\}f_2=0\end{aligned} \tag{89}$$

haline gelir. Bu denklemin $u = 0$ ve sonsuzda düzensiz, $u = -1$'de ise düzenli tekillikleri vardır ve bu durumuyla Heun denklemi veya onun konfluent durumlarından daha yüksek mertebede bir tekillik yapısına sahiptir.

Bilgisayar programı

Analitik işlemler için GRTensor paketi kullanılarak Maple altında bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Program, Öklitsel metriklerde Newman-Penrose formalizmi kullanarak hesap yapmaktadır (Newman ve Penrose, 1962; Goldblatt, 1994; Aliev ve Nutku, 1999). GRTensor paketinin yanında, Maple 11 ile birlikte gelen diferansiyel hesap paketi de diferansiyel form hesabı kısmında kullanılmıştır. Program, üzerinde çalıştığı bilgisayarın bellek özelliklerini daha verimli kullanabilmek için, bellek temizleme frekansına ulaşarak Maple çekirdeğine etki eder duruma getirilmiş ve bu şekilde hızlanma sağlanmıştır. Program çıktıları, Dirac γ matrisleri, Ricci dönme katsayıları, bağlantı 1-form'lar, spin bağlantıları, Dirac denklemleri, skaler denklem, kaynaksız Maxwell denklemleri, Weyl skalerleri, izsiz Ricci skalerleri, baz 2-form'lar, eğrilik 2-form'lar, topolojik sayılar (Euler sayısı ve Hirzebruch imzası için gereken integrallerin içleri hesaplanmaktadır) ve Petrov sınıfı olarak verilebilir.

Sonuçlar

Nutku helikoit çözümü fonunda yazılan Dirac denklemlerinin çözümleri Mathieu fonksiyonları cinsinden verilebilir (Sucu ve Ünal, 2004; Villalba, 2005, Birkandan ve Hortaçsu, 2007). Olası daha yüksek bir yapı elde edebilmek için bir zaman boyutu metriğe doğrudan eklenmiştir. Bu durumda dalga denklemleri çift konfluent Heun denklemi halindedir ve bir dönüşüm yardımıyla Mathieu denklemine dönüşebilirler. Açısal ve radyal kısımlar aynı tür fonksiyonlar cinsinden yazılabiliyorsa da zaman koordinatından gelen terimin katkısı sabitleri değiştirir. Bu da bir ilerletici yazmayı zorlaştırır (Birkandan ve Hortaçsu, 2007).

Nutku helkoit çözümü, orijinde bir eğrilik tekilliğine sahiptir. Bu da uygun sınır koşullarının kullanımını önemli kılar. Uzay-zamanın boyut sayısı Atiyah-Patodi-Singer spektral sınır koşullarının kullanımını zorunlu hale getirir (Atiyah vd., 1975; Birkandan ve Hortaçsu, 2007). Spektral sınır koşulları uygulanırken manifoldun sınırındaki Dirac denkleminin çözümleri de kullanılır. Bu çalışmada bu denklemin analitik çözümleri bulunamamıştır. Tekillik analizi yapıldığında bu denklemin tekil nokta sayısının Heun denklemlerinden bir fazla olduğu görülmüştür (Ronveaux, 1995).

Denklemlerin oluşturulmaları ve çözülmelerinde bilgisayar programları yoğun olarak kullanılmıştır. Newman-Penrose formalizmini kullanan bir Maple paketi, çalışmadaki analitik hesapları yapmak için geliştirilmiştir. Bu paket ayrıca instanton metrikleri için bir Newman-Penrose hesaplayıcısı olarak kullanılabilir (Newman ve Penrose, 1962; Goldblatt, 1994; Aliev ve Nutku, 1999).

Kaynaklar

Abrikosov, A.A., (2006). Modified spectral boundary conditions in the bag model, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* **39**, 6109.

Abrikosov, A.A. ve Wipf, A., (2007). The integral form of APS boundary conditions in the bag model, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* **40**, 5163.

Aliev, A.N., Hortaçsu, M., Kalaycı, J. ve Nutku, Y., (1999). Gravitational instantons from minimal surfaces, *Classical and Quantum Gravity*, **16**, 631.

Aliev, A.N. ve Nutku Y., (1999). Gravitational instantons admit hyper-Kaehler structure, *Classical and Quantum Gravity,* **16**, 189.

Atiyah, M.F., Patodi, V.K. ve Singer, I.M., (1975). Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 1, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **77**, 43.

Atiyah, M.F., Patodi, V.K. ve Singer, I.M., (1976). Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 2, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **78**, 405.

Atiyah, M.F., Patodi, V.K. ve Singer, I.M., (1980). Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 3, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **79**, 71.

Birkandan, T. ve Hortaçsu, M., (2007). Examples of Heun and Mathieu functions as solutions of wave equations in curved spaces, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **40**, 1.

Birkandan, T. ve Hortaçsu, M., (2007). Dirac equation in the background of the Nutku helicoid metric, *Journal of Mathematical Physics*, **48**, 092301.

Goldblatt, E., (1994). A Newman-Penrose formalism for gravitational instantons, *General Relativity and Gravitation,* **26**, 979.

Goldblatt, E., (1994). Symmetries of type D+ D-gravitational instantons, *Journal of Mathematical Physics,* **35**, 3029.

Heun, K., (1889). Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten**,** *Mathematische Annalen***, 33,** 161**.**

Hortaçsu, M., Rothe, K.D. ve Schroer, B., (1980). Zero energy eigenstates for the Dirac boundary problem, *Nuclear Physics B,* **17**, 530.

Hortaçsu, M., (1983). Index theorem for merons, *Lettere al Nuovo Cimento,* **36**, 109.

Newman, E.T. ve Penrose, R., (1962). An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients, *Journal of Mathematical Physics,* **3**, 566.

Newman, E.T. ve Penrose, R., (1962). An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients, *Journal of Mathematical Physic,.* **4**, 998.

Nutku, Y., (1996). Gravitational instantons and minimal surfaces, *Physical Review Letters,* **77**, 4702.

Ronveaux A., ed. (1995). *Heun's Differential Equation*, Oxford University Press, Oxford.

Sucu, Y. ve Ünal, N., (2004). Dirac equation in Euclidean Newman-Penrose formalism with applications to instanton metrics, *Classical and Quantum Gravity,* **21**, 1443.

Villalba, V. M., (2005). Exact solution of the Dirac equation in the presence of a gravitational instanton *Journal of Physics: Conference Series,* **24**, 136.