itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:5, Sayı:1, 75-86
Kasım 2007

Kendine eş operatör fonksiyonlar için Riesz bazı ve özdeğer problemleri

Nurhan ÇOLAKOĞLU*, Mahir HASANOV
İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada bir ve iki parametreli kendine eş operatör fonksiyonların bazı sınıfları için Riesz bazı ve özdeğer problemleri ele alınmıştır. İlk olarak iki parametreli sınırsız dalga tipi operatör polinomların spektral yapısı incelenmiştir. Bu operatör polinomlar aşırı sönümlü olmayan operatör fonksiyonların ana sınıflarından birini oluşturur. Burada bir parametre sabit tutulduğu zaman spektrumun ayrık olması ile ilgili teoremler verilmiştir. Kök bölgelerinin bazı kısımlarında reel özdeğerler için varyasonel formüller belirlenmiştir. Bu, operatör polinomlar sınırlı biçime dönüştürülmeden yapılmıştır. Sözü edilen sınıf için sayısal bölge ve kök bölgelerinin yapısını incelemek amacıyla daha genel kendine eş operatör fonksiyonları da kapsayan bir model oluşturulmuştur. Bu model çerçevesinde kök bölgelerinin bazı kısımlarında köklerin ve özdeğerlerin dağılımı ile ilgili teoremler ispatlanmış ve kök bölgelerinin bazı bağlantılı kısımları belirlenmiştir. Dalga tipi operatör fonksiyonların bir çoğunda sağlanan bazı doğal ek koşullar altında kök bölgelerinin üst üste bindiği gösterilmiştir. Son olarak kendine eş sürekli operatör fonksiyonlar için Riesz bazı problemleri ele alınmıştır. Bazı koşullar altında, yoğun bir alt sınıf için özvektörlerin Riesz bazı oluşturduklarını gösteren bir teorem verilmiştir. Genelde bu konu ile ilgili çalışmalarda faktörizasyon yöntemi kullanılmaktadır. Bu çalışmada is Riesz bazı ile ilgili problemleri çözmek için spektral dağılım fonksiyonlarına dayalı tamamen farklı bir teknik kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Operatör fonksiyonlar, spektrum, özdeğer, spektral dağılım fonksiyonu, Riesz bazı.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Nurhan ÇOLAKOĞLU. colakn@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 38.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Riesz basis and eigenvalue problems for one and two parameter self-adjoint operator pencils" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 24.01.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 22.02.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2008 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Riesz basis and eigenvalue problems for self-adjoint operator pencils

Extended abstract

In this paper Riesz basis and eigenvalue problems for some classes of one and two parameter operator pencils are considered. Spectral problems for operator pencils arise naturally from differential equations and boundary value problems, operator matrices, evolution equations, controllable systems and equations depending on one or more parameters.

One part of the problems studied here are variational problems for real eigenvalues for nonoverdamped type operator pencils.

It is well known that discrete eigenvalues of a self-adjoint operator A on a Hilbert space H which lie below or above the limit spectrum (or essential spectrum) of A can be characterized by variational principles applied to the Rayleigh quotients $p(x) = (Ax, x)/(x, x)$, $x \in H$, $x \neq 0$.

These variational principles were generalized to the λ*-nonlinear eigenvalue problems of the form* $L(\lambda)x = 0$ *by many authors, where the Rayleigh quotient of a linear problem* $Ax = \lambda x$ *was replaced by the so-called Rayleigh functional p, which is a homogeneous, real-valued, nonlinear functional defined by the equation* $(L(p(x))x, x) = 0$ *for* $x \neq 0$.

There are two cases in the variational theory of λ*-nonlinear spectral problems:*

- *A) The Rayleigh functional* $p(x)$ *is defined on the entire space* $H \setminus \{0\}$ *and the conditions*
  - *a)* $L(\alpha) >> 0$, $L(\beta) << 0$,
  - *b) the equation* $(L(\lambda)x, x) = 0$ *has exactly one simple zero in* (α, β), *for every* $x \in H \setminus \{0\}$

  are satisfied. In this case the λ*-nonlinear eigenvalue problem* $L(\lambda)x = 0$ *is called overdamped.*
- *B) The Rayleigh functional* $p(x)$ *is defined only on a conic proper subset of* $H \setminus \{0\}$ *and the conditions given above are partially fulfilled. Such spectral problems are called the nonoverdamped ones.*

All operator functions considered in this paper are assumed to be self-adjoint in a separable Hilbert space H.

Notice that recent studies are concentrated on the case B). The operator pencils of waveguide type (w.g.t.) form one of the main classes of nonoverdamped operator pencils and have very important applications to physical problems.

In the first part of the present study, the spectral structure of two parameter operator pencils of w.g.t. is studied. Theorems on discreteness of the spectrum for a fixed parameter are given. Variational principles for real eigenvalues in some part of the root zones are established.

Also, the structure of the numerical range and root zones of a class of operator functions, arising from one or two parameter operator pencils of w.g.t is studied. We construct a general model of such kind of operator pencils. In the frame of this model theorems on distribution of roots and eigenvalues in some parts of root zones are proved. Some connected parts of the root zones are determined. It is proved that root zones, under some natural conditions which are satisfied for most of w.g.t. multiparameter spectral problems, overlap.

Another problem studied in this paper is the Riesz basis problem for a class of self-adjoint operator functions. It is known that if L is analytic in a symmetric neighborhood of an interval (a, b) *and the conditions*

- *i)* $L(a) << 0$, $L(b) >> 0$,
- *ii)* $(L(\lambda)x, x) = 0$, $x \in H \setminus \{0\}$ *has only one root in* (a, b),
- *iii)* $\pi(L) = \{\gamma\} \subset (a, b)$, *where* $\pi(L)$ *denotes the limit spectrum of L*

are satisfied then the eigenvectors, corresponding to eigenvalues in (a, b) *form a Riesz basis.*

But it is not clear still do we need a smoothness condition on $L(\lambda)$ *to obtain the same result. We prove it for a subclass of continuous operator functions and the last part is devoted to these problems.*

Keywords: *Operator pencils, spectrum, eigenvalue, spectral distribution function, Riesz basis.*

Giriş

Bu çalışmada bir ve iki parametreli operatör fonksiyonların bazı sınıfları için Riesz bazı ve özdeğer problemleri ele alınmaktadır. Operatör fonksiyonların spektral problemleri diferansiyel denklemler ve sınır değer problemlerinden, evolusyon denklemlerinden, kontrol edilebilir sistemlerden, operatör matrislerden ve bir veya daha çok parametreye bağlı denklemlerden kaynaklanır.

H Hilbert uzayında tanımlı kendine eş bir A operatörünün esaslı spektrumu $\sigma_{ess}(A)$'nın altında veya üstünde yer alan ayrık, yani izole ve sonlu katlı, özdeğerlerinin üç temel varyasyonel ilkeyle karakterize edilebileceği bilinmektedir. Bunlar Rayleigh, Poincare-Ritz ve Courant-Fisher-Weyl ilkeleridir ve Rayleigh oranı olarak adlandırılan $p(x)=(Ax,x)/(x,x)$, $x\in H\setminus\{0\}$ ifadesine uygulanırlar.

Örneğin eğer kendine eş bir A operatörünün esaslı spektrumunun minimumunun altında yer alan özdeğerleri, katlılıkları da hesaba katarak $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\le\ldots$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda özdeğerler Rayleigh ilkesi aracılığıyla

$$\lambda_n=\min_{\substack{x\neq 0,\,(x,x_i)=0\\ i=1,\ldots,n-1}} p(x)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada x_i'ler λ_i özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerdir ve minimum değer x_n özvektöründe alınır. Benzer şekilde sırasıyla Poincare-Ritz ilkesi aracılığıyla

$$\lambda_n=\min_{\substack{L\subset\mathcal{D}(A)\\ \dim L=n}}\ \max_{\substack{x\in L\\ x\neq 0}} p(x), \qquad (1)$$

veya Courant-Fisher-Weyl ilkesi aracılığıyla

$$\lambda_n=\max_{\substack{L\subset H\\ \dim L=n-1}}\ \min_{\substack{x\in\mathcal{D}(A)\\ x\perp L}} p(x)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada $\mathcal{D}$ ile ilgili operatörün tanım kümesi gösterilmektedir

Bu varyasyonel ilkeler birçok yazar tarafından $L(\lambda)x=0$ şeklinde λ parametresine göre lineer olmayan özdeğer problemlerine genelleştirilmiştir. Bu durumda, lineer $Ax=\lambda x$ problemindeki $p(x)=(Ax,x)/(x,x)$ Rayleigh oranı yerine $(L(p(x))x,x)=0$, $x\neq 0$ denklemi yardımıyla tanımlanan homojen, reel değerli ve lineer olmayan p Rayleigh fonksiyoneli alınır.

λ'ya göre lineer olmayan spektral problemlerin varyasyonel teorisinde iki durum söz konusudur:

A) Rayleigh fonksiyoneli $p(x)$, $H\setminus\{0\}$ uzayının tamamında tanımlıdır. Bu durumda λ'ya göre lineer olmayan $L(\lambda)x=0$ özdeğer problemine aşırı sönümlü denir ve uygulanan yöntemler $L(\lambda)$, $\lambda\in\Delta=[\alpha,\beta[$ operatör fonksiyonunun polinom şeklinde, analitik, düzgün veya düzgün-olmayan olmasına göre değişir. Bu konuda R. J. Duffin, R. Turner, E. H. Rogers, B. Werner'a ait klasik çalışmaları anmak yerinde olur (Werner, 1971). Ayrıca Abramov (1983), Markus (1988) ve Hasanov (2002)'a bakılabilir.

B) Rayleigh fonksiyoneli $p(x)$ yalnızca $H\setminus\{0\}$ uzayının konik bir alt kümesinde tanımlıdır ve yukarıda adı geçen çalışmalarda belirtilen şartlar yalnız kısmen gerçeklenir. Bu şartlar aşağıdaki gibidir:
   a) $L(\alpha)>>0$, $L(\beta)<<0$,
   b) Her $x\in H\setminus\{0\}$ için $(L(\lambda)x,x)=0$ denkleminin $]\alpha,\beta[$ aralığında yalnız bir $p(x)$ kökü olsun.

   Bu şekildeki spektral problemlere aşırı sönümlü olmayan adı verilir.

Son zamanlardaki çalışmalar B) durumuna yoğunlaşmaktadır. Dalga tipi operatör polinomlar aşırı sönümlü olmayan operatör fonksiyonların önemli sınıflarından birisidir ve fiziksel problemlere çok önemli uygulamaları vardır (Abramov, 1986; Abramov, 1993; Hasanov, 2006; Kostyuchenko ve Orazov, 1986; Silbergleit ve Kopilevich, 1996).

Bu çalışmanın ilk bölümünde de, B) durumuna dahil olan dalga tipi operatör polinomların spektral yapısı ve özdeğerlerinin varyasyonel ilkeler yardımıyla verilmesi ele alınmaktadır. E.M. Barston aşırı sönümlü olmayan ikinci derece özdeğer problemlerinin bir sınıfını ele almış ve sonlu boyutlu durumda reel özdeğerlerin varyasyonel karakterizasyonunu vermiştir (Barston, 1974). Sonsuz boyutlu durumda lineer olmayan, aşırı sönümlü olmayan özdeğer problemleri için minmax ilkeleri ilk olarak Voss ve Werner (1982)'de verilmiş gibi görünmektedir (ayrıca bkz. Voss (2003a) ve Voss (2003b)). Bu makalelerde varyasyonel ilkeler, etkileşime giren akışkan-katı yapıların titreşiminden kaynaklanan bir rasyonel özdeğer probleminin özdeğerlerini belirlemek için kullanılır.

Aşırı sönümlü olmayan spektral problemlerin daha geniş bir sınıfı da blok operatör matrislerin spektral problemleri ve λ-rasyonel Sturm-Liouville problemleriyle bağlantılıdır (Binding vd., 2000; Eschwé ve Langer, 2004). Aşırı sönümlü olmayan, **R** reel sayılar kümesinin bir $\left[\alpha,\beta\right[$ aralığında tanımlı ve değerleri sınırlı kendine eş operatörler olan daha genel operatör fonksiyonlar Binding ve diğerleri (2000)'nde ele alınmıştır. Burada, aşırı sönümlü spektral problemler için yukarıda a) ve b) ile verilen klasik koşullar sağlamaz (ayrıca bkz. Griniv ve Mel'nik (1997)).

Yukarıdaki a) koşulundan

$$\kappa_\alpha := \dim\{E \mid 0 \neq x \in E, (L(\alpha)x, x) < 0\} = 0$$

sonucu çıkar. Aşırı sönümlü spektral problemlerde indeks ötelemesi olmamasının sebebi budur. Binding ve diğerleri (2000) (bkz. Teorem 3.5) $\kappa_\alpha > 0$ durumunda klasik varyasonel ilke (1)'in yerini

$$\lambda_n = \min_{\substack{L \\ \dim L = n+\kappa_\alpha}} \sup_{\substack{x\in L \\ x\neq 0}} p(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

ifadesinin aldığını göstermiştir. Bu formülün ve Courant-Fisher-Weyl ilkesinin bir benzeri, değerleri kendine eş sınırsız operatörler sınıfından olan operatör polinomlar için Eshwé ve Langer (2004)'de (bkz. s. 293, Teorem 2.1) verilmiştir.

Genelde operatör polinomlar diferansiyel denklemlerden ortaya çıkarlar ve bundan dolayı sınırsız operatör fonksiyonlardır. Diğer taraftan bazı sınırsız operatör polinomları sınırlılara dönüştürmek için standart teknikler vardır. Ancak bazı durumlarda, özellikle de dalga tipi operatör polinomlar durumunda, sınırsız operatör polinomlarla uğraşmak daha iyidir. Bu nedenle, bu çalışmada Eschwé ve Langer (2004)'deki yöntemler ve verilen sonuçlar kullanılarak dalga tipi operatör polinomların reel özdeğerleri için varyasyonel ilkeler verilmektedir.

Çalışmada ele alınan diğer bir konu da kendine eş operatör fonksiyonların bir sınıfı için Riesz bazı problemleridir. $\{Au_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektörler sistemi H Hilbert uzayının bir ortonormal bazı olacak şekilde bir A tersinir operatörü mevcutsa $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektörler sistemine H'ın bir Riesz bazı adı verilir. Kendine eş analitik operatör fonksiyonların özvektörlerinin Riesz bazı özellikleriyle ilgili olarak aşağıdaki teoremden Sonuç 1 elde edilir.

Teorem 1 (Markus, 1988)**.** Reel sayıların bir aralığı $\left[a,b\right]$, onun **R**'ye göre simetrik bağlantılı bir civarı U ve $L(\lambda)$ operatör fonksiyonu U üzerinde tanımlı, kendine eş ve analitik olsun. Eğer $L(a) << 0$, $L(b) >> 0$ ve, $(L(\lambda)x, x) = 0$ ($x \neq 0$) fonksiyonunun U'da bir ve yalnız bir kökü varsa, o zaman $L(\lambda)$ fonksiyonu $L(\lambda) = L_+(\lambda)(\lambda I - Z)$ şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Burada $L_+(\lambda)$ operatör fonksiyonu analitik ve U'da tersinirdir. Z sınırlı bir operatör ve $\sigma(Z) \subset (a,b)$ dir. Ayrıca Z kendine eş bir operatöre benzerdir.

Sonuç 1 (Markus, 1988)**.** Bir $\gamma \in (a,b)$ için $\pi(L) = \{\gamma\}$ olsun. Bu takdirde Teorem 1'in şartları altında L'nin (a,b) aralığındaki özdeğerlerine karşı gelen özvektörleri Riesz bazı oluştururlar.

Çalışmanın devamında $\pi(L)$ ile L operatör fonksiyonunun limit spektrumu yani

$$\pi(L) = \{\lambda \in (a,b) \mid \exists x_n, \|x_n\| = 1, \quad x_n \xrightarrow{w} 0, L(\lambda)x_n \to 0\}$$

kümesi gösterilmektedir (bazen esaslı spektrum olarak da adlandırılır ve $\sigma_{ess}(L)$ ile gösterilir.)

Benzer sonuçlar, yine çarpanlara ayırma formülü aracılığıyla, $C^2([a,b],S(H))$ sınıfından operatör fonksiyonlar için Markus ve Matsaev (1991, 1993)'de verilmiştir. $S(H)$ ile H Hilbert uzayında kendine eş sınırlı operatörler ve genel olarak $C^k([a,b],S(H))$ ile $[a,b]$'de tanımlı, k-defa sürekli diferansiyellenebilir ve değerleri $S(H)$'de olan operatör fonksiyonlar sınıfı gösterilmektedir. Ayrıca Azizov ve diğerleri (2000) ve Matsaev ve Spiegel (1993) makalelerine de bakılabilir.

$C([a,b],S(H))$ sınıfından olan ve Teorem 1'in şartlarını sağlayan operatör fonksiyonların özvektörlerinin, $\pi(L) = \{\gamma\} \subset (a,b)$ durumunda, Riesz bazı özellikleriyle ilgili problem hala açıktır. Daha net ifade edilecek olursa, $L \in C([a,b],S(H))$, $L(a) << 0$, $L(b) >> 0$, her $x \in H \setminus \{0\}$ vektörü için $(L(\lambda)x,x) = 0$ fonksiyonunun (a,b) aralığında bir ve yalnız bir kökü var ve $\pi(L) = \{\gamma\} \subset (a,b)$ ise L'nin (a,b)'deki özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerinin H uzayında bir Riesz bazı oluşturduğuna yada H'da tam olduğuna dair bir hipotez vardır. Yukarıdaki makalelerin tamamında özvektörlerin baz özellikleri çarpanlara ayırma yöntemi yardımıyla incelenmiştir ve bu yöntem L operatör fonksiyonunun bir kısım düzgünlük koşullarını sağlamasını gerektirir. Bu çalışmada ise aynı problem $C([a,b],S(H))$'in bir alt sınıfında spektral dağılım fonksiyonuna dayanan yeni bir varyasyonel yaklaşımla ele alınmaktadır.

Çalışmanın ilk bölümünde, iki parametreye bağlı dalga tipi sınırsız operatör polinomların spektral yapısı incelenmektedir. Bir parametre sabit tutulduğu zaman spektrumun ayrık olmasıyla ilgili teoremler verilmektedir. Kök bölgelerinin bazı kısımlarında reel özdeğerler için varyasyonel ilkeler ortaya konulmaktadır. İkinci bölümde, bir veya iki parametreli dalga tipi operatör polinomlardan kaynaklanan bir operatör fonksiyonlar sınıfı için sayısal bölge ve kök bölgeleri ele alınmaktadır. Bu tip operatör fonksiyonlar için genel bir model inşa edilmekte ve bu model çerçevesinde kök bölgelerinin bazı kısımlarında köklerin ve özdeğerlerin dağılımı ile ilgili teoremler verilmektedir. Kök bölgelerinin bazı bağlantılı kısımları belirlenmektedir. Çok parametreli dalga tipi spektral problemlerin çoğu için gerçeklenen bazı doğal ek koşullar altında kök bölgelerinin ayrık olmadığı gösterilmektedir. Son kısımda ise $C([a,b],S(H))$ sınıfından operatör fonksiyonların özvektörleri ile ilgili yukarıda sözü edilen hipotezin bazı koşullar altında yoğun bir alt sınıfta doğru olduğu gösterilmektedir.

Bu çalışmadaki sonuçların çoğu ayrıntılı olarak Çolakoğlu ve diğerleri (2006) ve Hasanov ve diğerleri (2006)'da verilmiştir. Bundan dolayı çoğu sonuçlar ispatsız olarak verilmektedir.

İki parametreli dalga tipi operatör polinomların özdeğerleri

Bu bölümde

$$L(k,w) := A + \sum_{s=1}^{n} k^{2s} C_{s-1} + \sum_{s=0}^{n-1} k^{2s+1} B_s + iwD - w^2 I \tag{2}$$

şeklindeki operatör polinomların spektral yapısı incelenmekte ve reel özdeğerleri için varyasyon ilkeleri verilmektedir. Burada A, D, B_s ve C_s, $s = 0,1,\ldots,n-1$ operatörleri H Hilbert uzayında simetrik operatörlerdir ve C_{n-1} dışındakiler sınırsız olabilirler. Ayrıca aşağıda Tanım 1'de verilen koşulların sağlandığını kabul edilmektedir. Bu sınıfa dalga tipi operatör polinomlar adı verilir (Abramov, 1993; Silbergleit ve Kopilevich 1983). Bu tip operatör polinomlar dalga sistemlerinden kaynaklanır ve k parametresi dalga sayısını, w ise frekansı göstermektedir.

Bu çalışmada bazı sonuçlar $D \neq 0$ durumu için verilse de, sonuçların bir kısmında $D = 0$ olduğu kabul edilmektedir.

İki parametreli operatör fonksiyonlar için spektrum $\sigma(L)$ ve özdeğerler kümesi $\sigma_p(L)$

$$\sigma(L)=\{(k,w)\,|\,0\in\sigma\left(L(k,w)\right)\},$$
$$\sigma_p(L)=\{(k,w)\,|\,0\in\sigma_p\left(L(k,w)\right)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\sigma\left(L(k,w)\right)$ ile L operatör fonksiyonunun (k,w) noktasındaki değeri olan $L(k,w)$ operatörünün spektrumu gösterilmektedir. Regüler noktalar kümesi $\rho(L)$ ve limit spektrum $\pi(L)$ de benzer şekilde tanımlanır. Bunların dışında w parametresinin sabit bir değerine karşı gelen özdeğerler ve k dalga sayısının sabit bir değerine karşı gelen özdeğerler sırasıyla

$$\sigma_p^w(L)=\{k\,|\,(k,w)\in\sigma_p\left(L\right)\},$$
$$\sigma_p^k(L)=\{w\,|\,(k,w)\in\sigma_p\left(L\right)\}$$

şeklinde tanımlanır. $\sigma_w(L)$, $\sigma_k(L)$, $\pi_w(L)$ ve $\pi_k(L)$ spektral kümeleri de benzer şekilde tanımlanır. Bu bölümde esas olarak $\sigma_p^w(L)$ ve $\sigma_p^k(L)$ kümelerinin yapısı ve $\sigma_p^w(L)$'deki reel özdeğerlerin varyasyonel formüllerle verilmesi ele alınmaktadır.

Tanım 1 (Silbergleit ve Kopilevich 1983, s.285). Aşağıda verilen şartları sağlayan, (2) formundaki iki parametreli $L(k,w)$ operatör polinomuna dalga tipi operatör polinom adı verilir:

(I) A kendine eş negatif olmayan bir operatör, $(A+I)^{-1}\in S_\infty$, D simetrik bir operatör ve $D(A+I)^{-1/2}\in S_\infty$'dur. Burada S_∞ kompakt operatörler kümesidir.

(II) C_{n-1} sınırlı ve pozitif definit bir operatördür: $0<c_1\le c_2$ sayıları vardır öyle ki $c_1(u,u)\le(C_{n-1}u,u)\le c_2(u,u),\quad u\in H,$

(III) B_s, $s=0,1,\ldots,n-1$ ve C_s, $s=0,1,\ldots,n-2$ operatörleri simetrik ve

$$(A+I)^{-1/2}B_s(A+I)^{-1/2}\in S_\infty,$$
$$(A+I)^{-1/2}C_s(A+I)^{-1/2}\in S_\infty$$

dir. Bu şartlar, özel olarak

$$\mathcal{D}((A+I)^{1/2})\subset\mathcal{D}(B_s),\ s=0,1,\ldots,n-1$$
$$\mathcal{D}((A+I)^{1/2})\subset\mathcal{D}(C_s),\ s=0,1,\ldots,n-1$$

olduğu anlamına gelir.

(IV) Her $k\in\mathbf{R}$ ve $u\in\mathcal{D}((A+I)^{1/2})$ için

$$(Au,u)+\sum_{s=1}^{n}k^{2s}(C_{s-1}u,u)+ +\sum_{s=0}^{n-1}k^{2s+1}(B_su,u)\ge\mu^2(u,u)$$

olacak şekilde bir $\mu\ge0$ sayısı vardır.

Buna ek olarak iki parametreli dalga tipi bir operatör polinom, eğer aşağıdaki koşulu sağlarsa, enerji stabilite koşulunu sağlıyor denir:

(V) Her $k\in\mathbf{R}$ ve $u\in\mathcal{D}((A+I)^{1/2})$ için

$$(Au,u)+\sum_{s=1}^{n}k^{2s}(C_{s-1}u,u)+ +\sum_{s=0}^{n-1}k^{2s+1}(B_su,u)\ge(c_0^{2n}k^{2n}+\varsigma)(u,u)$$

olacak şekilde $\varsigma\ge0$ ve $c_0>0$ sayıları vardır.

Yukarıda sözü edildiği gibi (I)-(V) koşulları doğal olarak fiziksel problemlerden ortaya çıkar ve dalga sistemlerinin geniş bir sınıfı tarafından sağlanır (Kostyuchenko ve Orazov, 1986; Silbergleit ve Kopilevich, 1996).

Şimdi $\sigma_w(L)$ ve $\sigma_k(L)$ spektral kümelerinin ayrık olduğunu, yani sonlu katlı izole özdeğerlerden oluştuğunu gösteren teoremler verilmektedir.

Teorem 2 (Çolakoğlu vd., 2006). $L(k,w)$ enerji stabilite şartını sağlayan dalga tipi bir operatör polinom olsun. Bu takdirde her $w\in\mathbf{R}$ için

$\sigma_w(L)$ ayrıktır. Ayrıca, eğer $D=0$ ise $\sigma_w(L)$ her $w\in\mathbf{C}$, kompleks sayılar kümesi için ayrıktır.

Teorem 3 (Çolakoğlu vd., 2006)**.** $L(k,w)$ operatör polinomu (I)-(III) koşullarını sağlasın. Bu takdirde her $k\in\mathbf{C}$ için $\sigma_k(L)$ ayrıktır.

$n=1$ durumunda, genelleştirilmiş

$$(L_w(k)x,x)=(Ax,x)+k(Bx,x)$$
$$+k^2(Cx,x)-w^2(x,x)=0,\ x\in\mathcal{D}$$

kuadratik form denklemi Rayleigh fonksiyonelleri olarak adlandırılan

$$p_\pm(x,w)=\frac{-(Bx,x)\pm\sqrt{d(x,w)}}{2(Cx,x)}$$

fonksiyonellerini tanımlar. Burada

$$d(x,w)=(Bx,x)^2-4((A-w^2I)x,x)(Cx,x)$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{D}:=\mathcal{D}[(A+I)^{1/2}]$'dir.

Dalga tipi operatör polinomlar aşırı sönümlü olmayan operatör fonksiyonlar sınıfına girerler dolayısıyla $d(x,w)\geq 0$ koşulu her $x\in\mathcal{D}$ için sağlanmaz. Bunu hesaba katarak

$$G(w)=\{x\in\mathcal{D}\mid d(x,w)>0\}$$

ve $p_\pm(x,w)$ fonksiyonellerinin tanım kümesi

$$G'(w)=\{x\in \mathrm{D}\setminus\{0\}\mid d(x,w)\geq 0\}$$

konik kümeleri ve bu kümeler üzerinde $p_\pm(x,w)$ fonksiyonellerinin sınırları

$$k_-(w)=\inf_{x\in G(w)} p_-(x,w),\quad k'_-(w)=\inf_{x\in G'(w)} p_-(x,w),$$
$$k_+(w)=\sup_{x\in G(w)} p_+(x,w),\quad k'_+(w)=\sup_{x\in G'(w)} p_+(x,w),$$
$$\delta_-(w)=\inf_{x\in G(w)} p_+(x,w),\quad \delta_+(w)=\sup_{x\in G(w)} p_-(x,w).$$

tanımlansın. Burada

$$k'_-(w)\leq k_-(w)\leq\delta_-(w)\leq\delta_+(w)\leq k_+(w)\leq k'_+(w)$$

olduğu açıktır ($\delta_-(w)\leq\delta_+(w)$ eşitsizliği için bkz. Abramov (1993)).

Aşağıdaki teorem $[k_-(w),\ \delta_-(w))$ aralığındaki özdeğerler için ifade edilmiştir. Benzer şekilde $(\delta_+(w),\ k_+(w)]$ aralığı için de ifade edilebilir.

Teorem 4 (Çolakoğlu vd., 2006)**.** $L_w(k)$ ikinci dereceden dalga tipi bir operatör polinom ($n=1$), $\Delta=[k_-(w),\ \delta_-(w))$ ve $k_-(w)<\delta_-(w)$ olsun. Bu takdirde

a) Δ'da yalnız sonlu sayıda özdeğer vardır: bunlar, katlılıklar da hesaba katılarak $k_1^-(w)\leq k_2^-(w)\leq\ldots\leq k_n^-(w)$ şeklinde sıralansın,
b) Tüm özdeğerler negatif tiptir, yani her $x\in\ker L_w(k)\setminus\{0\}$ ve $k\in\sigma_w(L)\cap\Delta$ için $(L'_w(k)x,x)<0$'dır,
c) $k_i^-(w)=\min\limits_{\substack{L\subset\mathcal{D}\\ \dim L=i}}\max\limits_{\substack{x\in L\\ x\neq 0}} p_-(x,w),\quad i=1,2,\ldots,n$

$k_i^-(w)=\max\limits_{\substack{L\subset H\\ \dim L=i-1}}\inf\limits_{\substack{x\in\mathcal{D},x\neq 0\\ x\perp 0}} p_-(x,w), i=1,2\ldots,n$

$n>1$ durumunda benzer bir teorem uygun şekilde seçilen bir Δ aralığındaki özdeğerler için verilebilir. Hazırlık amacıyla aşağıdaki koşulu verilmektedir.

Koşul 1. Her $x\in\mathcal{D}$, $x\neq 0$ için aşağıdakilerden birisi sağlanır:

a) $l_w(k)[x]>0, \forall k\in\Delta$,
b) $l_w(k)[x]<0, \forall k\in\Delta$,
c) $l_w(k_0)[x]=0$ olacak şekilde bir tek $k_0\in\Delta$ vardır ve $l_w(k)[x]$ fonksiyonu k_0 değerinde azalandır.

Burada $l_w(k)[x]:=(L_w(k)x,x)$'tir.

Rayleigh fonksiyoneli yalnız c) durumunda, $p(x)=k_0$ olarak, iyi tanımlıdır. $\mathcal{D}$ kümesindeki diğer vektörler için $p(x)$ fonksiyoneli

$$p(x):=\begin{cases}-\infty, & \text{eğer } \forall k\in\Delta \text{ için } l_w(k)[x]<0 \text{ ise,}\\ +\infty, & \text{eğer } \forall k\in\Delta \text{ için } l_w(k)[x]>0 \text{ ise,}\end{cases}$$

şeklinde genişletilebilir. Bu şekilde genişletilmiş olan fonksiyonele genelleştirilmiş Rayleigh fonksiyoneli adı verilir (Binding vd., 2000).

Teorem 5 (Çolakoğlu vd., 2006)**.** $L_w(k)$ dalga tipi bir operatör polinom ve $w,k\in\mathbf{R}$ olsun. Bu takdirde $\sigma_k(L)$ ve $\sigma_w(L)$ ayrıktır. Ayrıca, eğer $L_w(k)$ bir $\Delta=[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ aralığında Koşul 1'i sağlarsa, $[\alpha,\beta]$ aralığındaki $\{k_i(w)\}_{i=1}^n$ özdeğerleri katlılıklar hesaba katılarak azalmayan sırada sıralanmış olmak üzere aşağıdaki varyasyonel ilkelerle verilir:

$$k_i(w)=\min_{\substack{L\subset\mathcal{D}\\ \dim L=i+\kappa_-(\alpha)}}\ \max_{\substack{x\in L\\ x\neq 0}} p(x,w),$$

$$k_i(w)=\max_{\substack{L\subset H\\ \dim L=\kappa_-(\alpha)+i-1}}\ \inf_{\substack{x\in\mathcal{D},x\neq 0\\ x\perp L}} p(x,w).$$

Burada

$$\kappa_-(\alpha):=\max\dim\left\{E \mid l_w(\alpha)[x]<0, 0\neq x\in E\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde son olarak $n=1$ durumunda reel özdeğerlerin hareketi ile ilgili bir sonuç verilmektedir. $k_i^-(w)$ $\left(k_i^+(w)\right)$ ile $[k_-(w),\delta_-(w))$ $\left((\delta_+(w),k_+(w)]\right)$ aralığındaki özdeğerler azalmayan (artmayan) sırada gösterilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2 (Çolakoğlu vd., 2006)**.** i indisini sabit tutulduğunda $w\to+\infty$ için $k_i^+(w)$ özdeğeri sağa ve $k_i^-(w)$ özdeğeri sola hareket eder.

Kendine eş operatör fonksiyonların bir sınıfı için sayısal bölge

Bu bölümde bir ve iki parametreli dalga tipi operatör polinomlardan kaynaklanan bir kendine eş operatör fonksiyonlar sınıfı için sayısal bölge ve kök bölgelerinin yapısı incelenmektedir. Bunlar özellikle dalga tipi operatör polinomların varyasyonel teorisi için önemlidir. Çok parametreli operatör fonksiyonların spektrumunun varyasyonel teorisindeki esas zorluklar kök bölgelerinin üst üste binmesinden, yani operatör fonksiyonların aşırı sönümlü olmamasından kaynaklanır. Bu nedenle yalnız dalga tipi operatör polinomları değil ama daha geniş bir aşırı sönümlü olmayan operatör fonksiyonlar sınıfını içine alan genel bir model oluşturulmaktadır. Sözü edilen problemler bu model çerçevesinde ele alınmaktadır. Bunu yaparken, ilgilenilen problemlerden dolayı, katsayılarla ilgili koşullar yerine onlardan elde edilen ve incelenen durumda uygulanması daha kolay olan koşullarla uğraşmak tercih edilmektedir. Böylece aşağıdaki koşullarla verilen bir model kurulmaktadır:

(A1) $L(k):[a,b]\to S(H)$, $L\in C^1[a,b]$ ve H Hilbert uzayındaki bir G' konisine ait her $x\neq 0$ elemanı için $(L(k)x,x)=0$ denkleminin $[a,b]$ aralığında yalnız iki kökü $p_-(x)$ ve $p_+(x)$ vardır (burada katlılıklar göz önüne alınmıştır ve $p_-(x)\le p_+(x)$'tir) ve diğer $x\in H\setminus\{0\}$ için $[a,b]$ aralığında kökü yoktur.

(A2) Eğer $x\in G$ ise $(L'(p_-(x))x,x)<0$ ve $(L'(p_+(x))x,x)>0$ olur. Burada $G=\left\{x\in G' \mid p_-(x)\neq p_+(x)\right\}$.

(A3) $(L(k)x,x)<0$ olacak şekilde bir $k\in[a,b]$ sayısının bulunması için gerek ve yeter şart $x\in G$ olmasıdır.

(A4) Eğer $\{x_n\}\subset G'$ dizisi $x\in G'$ elemanına zayıf yakınsaksa $\liminf p_-(x_n)\ge p_-(x)$ ve $\limsup p_+(x_n)\le p_+(x)$ olur.

L operatör fonksiyonu için

$$W'_{p_\pm}:=\left\{p_\pm(x) \mid x\in G'\right\},$$
$$W_{p_\pm}:=\left\{p_\pm(x) \mid x\in G\right\}$$

kümelerine kök bölgeleri adı verilir.

$(L(k)x,x)=0$ denkleminin reel bir k_0 köküne, $(L'(k_0)x,x)$ ifadesinin işaretine bağlı olarak pozitif tip, negatif tip veya nötr denir. Benzer şekilde L operatör fonksiyonun k, x özdeğer özvektör çiftine yine $(L'(k)x,x)$'nın işaretine bağlı olarak pozitif tip, negatif tip veya nötr denir. Bir k özdeğeri, karşı gelen bütün özvektörlerle pozitif tip çift oluşturuyorsa k özdeğeri pozitif tiptir denir. Negatif ve nötr özdeğer kavramları da benzer şekilde tanımlanır.

$p_{\pm}$ fonksiyonellerinin G ve G' kümeleri üzerindeki sınırları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta_{-}=\inf_{x\in G} p_{+}(x),\ k_{-}=\inf_{x\in G} p_{-}(x),\ k'_{-}=\inf_{x\in G'} p_{-}(x),$$
$$\delta_{+}=\sup_{x\in G} p_{-}(x),\ k_{+}=\sup_{x\in G} p_{+}(x),\ k'_{+}=\sup_{x\in G'} p_{+}(x).$$

Teorem 6. L operatör fonksiyonu (A1)-(A4) koşullarını sağlasın. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

(i) $k_{\pm}\in\sigma_R(L):=\sigma(L)\cap\mathbf{R}$,

(ii) Eğer k_{+} (k_{-}) noktası $\sigma(L)$'nin bir limit noktası değilse, o zaman her $k\in W'_{p_{+}}\cap(\delta_{+},k_{+}]$ $\quad(k\in W'_{p_{-}}\cap[k_{-},\delta_{-}))$ pozitif (negatif) tip bir köktür. Özel olarak, $(\delta_{+},k_{+}]$ $([k_{-},\delta_{-}))$ aralığındaki tüm özdeğerler pozitif (negatif) tiptir.

İspat. İlk olarak (i) şıkkı k_{+} için ispatlanacaktır.

$$x_n\in G,\ \|x_n\|=1,\ p_{+}(x_n)\to k_{+},\ x_n\xrightarrow{w}x \qquad (3)$$

koşullarını sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi alınsın,

$$|(L(k_{+})x_n,x_n)|\le\|L(k_{+})-L(p_{+}(x_n))\|$$

eşitsizliğinden $\lim\limits_{n\to\infty}(L(k_{+})x_n,x_n)=0$ elde edilir. (A2)-(A3)' koşullarından ve k_{+}'nın tanımından $L(k_{+})\ge 0$'dır. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty}L(k_{+})x_n=0,\quad L(k_{+})x=0 \qquad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4)'ü sağlayan bir dizinin var olmasından $k_{+}\in\sigma_R(L)$ sonucu çıkar. Benzer şekilde $k_{-}\in\sigma_R(L)$ olduğu da ispatlanır.

(ii)'yi ispatlamak için $W'_{p_{+}}\cap(\delta_{+},k_{+}]$'deki köklerin pozitif tip olduğunu gösterilecektir. İlk olarak k_{+}'nın özdeğer olduğunu ve pozitif tip çift oluşturduğu bir özvektöre sahip olduğu gösterilecektir. (3) ve (4) özelliklerini sağlayan bir dizi seçerilirse k_{+} $\sigma(L)$'nin bir limit noktası olmadığı için $x\ne 0$ ve (4)'ten x, k_{+} özdeğerine karşı gelen bir özvektördür. (A4) koşulundan

$$p_{+}(x)-p_{-}(x)\ge\limsup p_{+}(x_n)-\liminf p_{-}(x_n)$$

olur. $p_{+}(x_n)\to k_{+}$ olduğu için bir alt dizi için

$$p_{+}(x)-p_{-}(x)\ge\lim_{n\to\infty}p_{+}(x_n)-\lim_{n\to\infty}p_{-}(x_n)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafı pozitiftir ve $\lim\limits_{n\to\infty}p_{+}(x_n)-\lim\limits_{n\to\infty}p_{-}(x_n)=0$ durumunda

$$k_{+}=\lim_{n\to\infty}p_{+}(x_n)=\lim_{n\to\infty}p_{-}(x_n)\le\delta_{+}$$

olacaktır ki $\delta_{+}<k_{+}$ olmasıyla çelişir. Böylece $p_{-}(x)<p_{+}(x)$ ve $x\in G$ olur. (A4) koşulundan $k_{+}\le p_{+}(x)$ olduğu için $k_{+}=p_{+}(x)$ elde edilir ve k_{+}, x çifti (A2)'den dolayı pozitif tiptir.

Şimdi k_{+}'nın pozitif tip bir özdeğer olduğunu gösterilecektir. k_{+}'ya karşı gelen bir özvektör $z\ne 0$ olsun. Eğer z negatif tip olursa bu k_{+}'nın tanımıyla çelişir. z nötr de olamaz. $(L'(k_{+})z,z)=0$ olduğu kabul edilirse ve x, k_{+}'ya karşı gelen pozitif tip bir özvektör olmak üzere $z_t=tx+(1-t)z$, $t\in[0,1]$ alınırsa $L(k_{+})z_t=0$ olduğundan dolayı $t\in[0,1]$ için $z_t\in G'$ ve $p_{+}(z_t)=k_{+}$ olur. $K=\{z_t\mid t\in[0,1]\}$ olmak üzere $K\subset G'$ yol bağlantılı bir küme olur. p_{-}'nin G' üzerinde sürekli, $p_{-}(z_0)=p_{-}(z)=k_{+}$ ve $p_{-}(z_1)=p_{-}(x)\le\delta_{+}$ olduğuna dikkat ediniz. $p_{-}(K)$ bağlantılı olduğu için her $k\in\left(p_{-}(x),p_{-}(z)\right)$ bir $z_{t_*}\in K$ vardır öyle ki $p_{-}(z_{t_*})=k$ olsun. Eğer k, $\delta_{+}<k<k_{+}$ olacak şekilde seçilirse $p_{-}(z_{t_*})=k<k_{+}$,

$p_+(z_{t*}) = k_+$ ve $z_{t_*} \in G$ sonucu elde edilir. $p_-(z_{t_*}) = k > \delta_+$ olduğu için bu δ_+'nin tanımıyla çelişir. Dolayısıyla z nötr olamaz ve k_+'nın pozitif tip bir özdeğerdir.

Şimdi ise $(L(k_+)z,z) = 0$ ise $(L'(k_+)z,z) > 0$ olacağını ispatlanacaktır. $L(k_+) \geq 0$ olduğu için

$$\|L(k_+)z\|^2 \leq \|L(k_+)\|\left(L(k_+)z,z\right)$$

yazılabilir. Buradan k_+'nın özdeğer, z'nin ise ona karşı gelen özvektör olduğu ve dolayısıyla pozitif tip bir çift oluşturdukları görülür.

k noktası $\delta_+ < k < k_+$ eşitsizliğini sağlasın ve z için $(L(k)z,z) = 0$ denkleminin bir kökü olsun. $(L'(k)z,z) < 0$ olamaz çünkü buradan $z \in G$ ve $k = p_-(z)$ olduğu sonucu çıkar ki $\delta_+ < k$ eşitsizliğiyle çelişir. $(L'(k)z,z) = 0$ olduğu kabul edilirse $k = p_\pm(z)$ olacaktır. k_+ özdeğerine karşı gelen pozitif tip bir x özvektörü alınsın ve $z_\alpha = z + \alpha x$ tanımlansın. Gerektiğinde x yerine $-x$ yazarak $\operatorname{Re}(L(k)z,x) \leq 0$ olduğunu kabul edilebilir. $\delta_+ < k < k_+$ olduğu için $(L(k)x,x) < 0$ olacaktır ve bundan dolayı $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}(L(k)z_\alpha, z_\alpha) = (L(k)z,z) + 2\alpha \operatorname{Re}(L(k)z,x) + \\ + \alpha^2 (L(k)x,x) < 0\end{aligned}$$

olacaktır. (A3) koşulundan $\alpha > 0$ için $z_\alpha \in G$ ve buradan da

$$\delta_+ \geq \lim_{\alpha \to 0+} p_-(z_\alpha) = p_-(z) = k$$

elde edilir ki $\delta_+ < k$ ile çelişir. $W'_{p_-} \cap [k_-, \delta_-)$ durumu da benzer şekilde incelenir.

Teorem 7. L operatör fonksiyonu (A1)-(A4) koşullarını sağlasın. Eğer $k \in W'_{p_+} \cap (k_+, k'_+]$ $(k \in W'_{p_-} \cap [k'_-, k_-))$ ise k nötr bir özdeğerdir.

(A1)-(A4) koşullarını sağlayan operatör fonksiyon için $W_{p_\pm}$ kümeleri bağlantılı olmayabilir. $W_{p_\pm}$ kümelerinin bazı kısımlarının bağlantılı olduğunu gösterilecektir. Bu amaçla

$$G_+ = \{x \in G \mid p_+(x) > \delta_+\},$$
$$G_- = \{x \in G \mid p_-(x) < \delta_-\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer G_+ (G_-) boş değilse $W_{p_\pm}$'nin bazı parçaları bağlantılıdır.

$J_\pm := p_\pm(G_\pm)$ olsun. Eğer G_+ (G_-) boşsa J_+ (J_-)'yi boş kabul edilsin. $G_\pm \neq \varnothing$ durumunda $J_+ = W_{p_+} \cap (\delta_+, k_+]$ ve $J_- = W_{p_-} \cap [k_-, \delta_-)$ olacaktır.

Teorem 8. L operatör fonksiyonu (A1)-(A4) koşullarını sağlasın. Eğer H kompleks bir Hilbert uzayıysa, $G_\pm$ yol bağlantılı ve $J_\pm$ bağlantılıdır.

İspat. $p_\pm$ fonksiyonelleri G üzerinde sürekli olduğu için $J_\pm$'nin bağlantılı olması $G_\pm$'nin yol bağlantılı olmasından çıkar. G_+'nın yol bağlantılıdır. $x, y \in G_+$ ise $p_+(x) > \delta_+$, $p_+(y) > \delta_+$, $p_-(x) \leq \delta_+$ ve $p_-(y) \leq \delta_+$ olacaktır. $\varepsilon > 0$ sayısı $p_+(x) > \delta_+ + \varepsilon$, $p_+(y) > \delta_+ + \varepsilon$ olacak şekilde seçilir ve $k = \delta_+ + \varepsilon$ alınırsa

$$k \in (p_-(x), p_+(x)) \cap (p_-(y), p_-(y)) \tag{5}$$

olur. $\lambda = 1$ veya -1 seçilsin öyle ki $\operatorname{Re}\left[\lambda(L(k)x,y)\right]$ pozitif olmasın. $\tilde{x} = \lambda x$, $z_\alpha = \alpha\tilde{x} + (1-\alpha)y$, $\alpha \in [0,1]$ şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned}(L(k)z_\alpha, z_\alpha) = \alpha^2 (L(k)x,x) + \\ +2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Re}\left[\lambda(L(k)x,y)\right] + \\ +(1-\alpha)^2 (L(k)y,y)\end{aligned}$$

olur. Eğer $x \in G$ ise (A2) ve (A3)'ten dolayı

$$(L(t)x,x) < 0 \Leftrightarrow t \in (p_-(x), p_+(x))$$

olacaktır. $t = k$ seçilirse (5)'ten $(L(k)x, x) < 0$ ve $(L(k)y, y) < 0$ sonucu çıkar. Buradan $\alpha \in [0,1]$ için $(L(k)z_\alpha, z_\alpha) < 0$ olur. Bu da $z_\alpha \in G$ ve $k < p_+(z_\alpha)$ sonucu verir. $k > \delta_+$ olduğuna göre $\alpha \in [0,1]$ için $z_\alpha \in G_+$ olur. Dolayısıyla $\tilde{x}$ ile y vektörleri G_+'nın içinde kalan bir doğru parçası ile birleştirilebilirler. H kompleks bir uzay olduğu için $\lambda = -1$ durumunda x ve $-x$ vektörleri G_+'da $xe^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$ eğrisi aracılığıyla birleştirilebilir. Benzer bir ispat G_- için de verilebilir.

Bazı ek koşullar altında kök bölgeleri üst üste biner.

Teorem 9. L operatör fonksiyonu (A1)-(A4) koşullarını sağlasın. Eğer $G \ne \varnothing$ ve $G \ne H \setminus \{0\}$ ise $\delta_- \le \delta_+$ olur.

İspat. $G \ne \varnothing$ koşulundan $x_1 \in G$ vardır. Diğer taraftan $G \ne H \setminus \{0\}$ koşulundan $x_2 \notin G$ vardır. x_1'den x_2'ye bir yol $z_t = (1-t)x_1 + tx_2$, $0 \le t \le 1$ şeklinde olacaktır. $x_1 \in G$, $x_2 \notin G$ ve G açık olduğu için bir $t_* \in (0,1]$ sayısı vardır öyle ki her $t \in [0, t_*)$ için $z_t \in G$ olsun. $\overline{G} = G'$ olduğu için $z_{t_*} \in G'$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}\delta_- &= \inf_{z \in G} p_+(z) \le \lim_{t \to t_* - 0} p_+(z_t) = p_+(z_{t_*}) = \\ &= p_-(z_{t_*}) = \lim_{t \to t_* - 0} p_-(z_t) = \sup_{z \in G} p_-(z) = \delta_+\end{aligned}$$

yazılabilir.

Analitik olmayan operatör fonksiyonların bir sınıfı için özvektörlerden oluşan Riesz bazları

Bu bölümde kendine eş ve sürekli operatör fonksiyonların bir sınıfı için Riesz bazı özelliklerini ele alınmaktadır. Bölümün devamında aşağıdaki koşulun sağlandığını kabul edilmektedir:

Koşul 2. $L(a) << 0$, $L(b) >> 0$, her $x \in H \setminus \{0\}$ için $(L(\alpha)x, x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığında tek bir kökü vardır ve $\pi(L) = \{\gamma\} \in (a,b)$.

$C([a,b], S(H))$ uzayının yoğun bir alt uzayında, eğer γ'nın sağında yada solundaki özdeğerler sonlu sayıda ise, Koşul 2 altında L operatör fonksiyonunun (a,b) aralığındaki özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerinin Riesz bazı oluşturduğunu gösteren bir teorem verilmektedir. Sözü geçen sınıf $C_\gamma^F([a,b], S(H))$ ile gösterilmektedir. Bu bölümde verilen esas sonuç aşağıda tanımlanan yaklaşık Riesz bazı kavramıyla bağlantılıdır.

Tanım 2. $L \in C([a,b], S(H))$ olsun. Eğer $n \to \infty$ için $L_n \Rightarrow L$ (düzgün) olacak şekilde bir $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \in C([a,b], S(H))$ dizisi var ve her n için L_n'in özvektörleri H uzayında Riesz bazı oluşturuyorsa L operatör fonksiyonunun özvektörleri yaklaşık Riesz bazı oluşturuyor denir.

$PW([a,b], S(H))$ ile parçalı lineer ve sürekli operatör fonksiyonları gösterilsin (Hasanov, 2002; Maksudov ve Gasanov 1993). $PW_\gamma^F([a,b], S(H))$ alt uzayı $C_\gamma^F([a,b], S(H))$ alt uzayı benzer şekilde tanımlanıyor. Esas olarak yukarıdaki kaynaklarda verilen yaklaştırım yöntemini kullanılmaktadır. Bu yönteme göre Rayleigh sistemi aksiyomlarını (bkz. Abramov, 1983; Maksudov ve Gasanov 1993) sağlayan bir sürekli operatör fonksiyona aynı sınıftan parçalı lineer olanlarla yaklaşılabilir. Bu bölümde ele alınan operatör fonksiyonlar Rayleigh sistemlerinin bir alt sınıfını oluşturur. Bu nedenle ilk olarak parçalı lineer operatör fonksiyonlar için baz problemiyle ilgili bir teorem verilmektedir.

Teorem 10 (Hasanov vd., 2006)**.** $L \in PW([a,b], S(H))$ operatör fonksiyonu Koşul 2'yi sağlansın. Eğer L operatör fonksiyonu γ noktasında türetilebilir veya $L \in PW_\gamma^F([a,b], S(H))$ ise $[a,b]$ aralığındaki özdeğerlerine karşı gelen özvektörleri H da Riesz bazı oluştur.

Bu teorem yardımıyla sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 11 (Hasanov vd., 2006)**.** Eğer bir L operatör fonksiyonu Koşul 2'yi sağlar ve $L \in C_{\gamma}^{F}([a,b], S(H))$ ise bu takdirde L'nin özvektörleri yaklaşık Riesz bazı oluştur.

Kaynaklar

Abramov, Yu., (1983). *Variational methods in the theory of operator pencils*, Leningrad Univ., Leningrad (Russian).

Abramov, Yu., (1986). Two parameter operator pencils of waveguide type, *Russian Academy of Sciences Doklady Mathematics,* **286**, 4, 777-781.

Abramov, Yu., (1993). Pencils of waveguide type and related extremal problems, *Journal of Soviet Mathematics*, **64**, 6, 1278-1289 .

Azizov, T. Ya., Dijksma, A. ve Sukhocheva, L. I., (2000). On basis properties of selfadjoint operator functions, *Journal of Functional Analysis*, **178**, 306- 342.

Barston, E. M., (1974). A minimax principle for nonoverdamped systems, *International Journal of Engineering Science*, **12**, 413-421.

Binding P., Eschwé D. ve Langer H., (2000). Variational principles for real eigenvalues of self-adjoint operator pencils, *Integral Equations and Operator Theory*, **38**, 2, 190-206.

Çolakoğlu, N., Hasanov, M. ve Ünalmış Uzun, B., (2006). Eigenvalues of two parameter polynomial operator pencils of waveguide type, *Integral Equations and Operator Theory,* **56,** 381-400.

Eschwé, D. ve Langer M., (2004). Variational principles for eigenvalues of self-adjoint operator functions, *Integral Equations and Operator Theory*, **49**, 3, 287-321.

Griniv, R. O. ve Mel'nik, T. A., (1997). On a singular Rayleigh functional, *Mathematical Notes*, **60,** 1-2, 97-100.

Hasanov, M., (2002). An approximation method in the variational theory of the spectrum of operator pencils, *Acta Applicandae Mathematicae*, **71**, 117-126.

Hasanov, M., (2006). On the spectrum of a weak class of operator pencils of waveguide type, *Mathematische Nachrichten*, **279**, 8, 1-10.

Hasanov, M., Uzun B. Ü. ve Çolakoğlu, N., (2006). A note on Riesz basis of eigenvectors for a class of nonanalytic operator functions, *Rocky Mountain Journal of. Mathematics,* **36,** 2, 487-496.

Kostyuchenko, A. G. ve Orazov, M. B., (1986). The problem of oscillations of an elastic half cylinder and related selfadjoint quadratic pencils, *Journal of Soviet Mathematics*, **33,** 1025-1065.

Maksudov, F. G. ve Gasanov, M. G., (1993). On the variational theory of the spectrum of the operator pencils, *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*, **46,** 1, 126-130.

Markus, A. S., (1988). *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Translations of Mathematical Monographs, Vol.71, American Mathematical Society, Providence, RI.

Markus, A. S. ve Matsaev, V., (1991). Principal part of resolvent and factorization of an increasing nonanalytic operator function, *Integral Equations and Operator Theory*, **14**, 716-746.

Markus, A. S. ve Matsaev, V., (1993). Factorization of a selfadjoint nonanalytic operator function II, *Integral Equations and Operator Theory*, **16**, 539- 564.

Matsaev, V. ve Spigel, E., (1993). Conditions for eigenvectors of a selfadjoint operator-function to form a basis, *Integral Equations and Operator Theory*, **17**, 3, 443- 449.

Silbergleit, A. S. ve Kopilevich, Yu. I., (1983). *Spectral theory of regular waveguides*, Fiziko-Tekhnicheskiy Institut, Leningrad (Russian).

Silbergleit, A. S. ve Kopilevich, Yu. I., (1996). *Spectral theory of guided waves*, Institute of Physics Publishing, Bristol.

Voss, H. ve Werner, B., (1982). A minimax principle for nonlinear eigenvalue problems with applications to nonoverdamped systems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **4**, 415-424.

Voss, H., (2003a). A rational spectral problem in fluid-solid vibration, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **16,** 94-106.

Voss, H., (2003b). A maxmin principle for nonlinear eigenvalue problems with application to a rational spectral problem in fluid- solid vibration, *Applications of Mathematics*, **48**, 6, 607-622.

Werner, B., (1971). Das spektrum von Operatorenscharen mit verallgemeinerten Rayleighquotienten, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **42**, 223-238.