itüdergisi/**c**
fen bilimleri
Cilt:5, Sayı:1, 67-74
Kasım 2007

Genelleştirilmiş Davey-Stewartson sistemi için iki yeni sonuç

Gülçin M. MUSLU*, Hüsnü A. ERBAY, Alp EDEN
İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi, $iu_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u$, $\varphi_{1,xx} + m_2\varphi_{1,yy} + n\varphi_{2,xy} = (|u|^2)_x$, $\lambda\varphi_{2,xx} + m_1\varphi_{2,yy} + n\varphi_{1,xy} = (|u|^2)_y$ *şeklinde verilmiş bir nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklem sistemidir. Burada* u *kompleks değerli,* φ_1 *ve* φ_2 *reel değerli fonksiyonlar olup,* x, y *uzaysal koordinatlarının ve* t *zamanını fonksiyonlarıdır.* $\sigma, \kappa, \gamma, m_1, m_2, \lambda$ *ve* n *reel parametrelerdir. Ayrıca, katsayılar arasında* $(\lambda - 1)(m_2 - m_1) = n^2$ *şeklinde bir bağıntı sağlanmaktadır. GDS sistemi sonsuz bir genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan quazi monokromatik dalgaların modulasyonunu karakterize eden sistem olarak önerilmiştir (Babaoğlu ve Erbay, 2004). Bu çalışmada* (σ, m_1, m_2, n) *katsayılarının işaretlerine göre* $(+,+,+,+)$ *Eliptik Eliptik Eliptik (EEE) ve* $(-,+,+,+)$ *Hiperbolik Eliptik Eliptik (HEE) durumları göz önüne alınacaktır (Eden vd., 2006). GDS sisteminin en önemli özel halleri Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ve Davey-Stewartson (DS) sistemidir. NLS denkleminde olduğu gibi, DS sisteminin çözümleri de pseudo-konformal dönüşüm altında invaryant kalmaktadır. DS sisteminin Hiperbolik-Eliptik (HE) durumunda pseudo-konformal dönüşüm yardımıyla bir analitik patlama profili elde edilirken, eliptik NLS denklemi için bu invaryantlık çözümlerin patlama profillerinin anlaşılmasında temel rol oynar. Bu çalışmada GDS sisteminin de çözümlerinin pseudo-konformal dönüşüm altında invaryant kaldığı gösterilmiş ve pseudo-konformal invaryantlık kullanılarak bulunan iki yeni sonuç sunulmuştur. HEE durumda, fiziksel parametreler üzerine bazı koşullar koyarak bir patlama profili elde edilmiştir. Ancak bu koşullar bir özel "radyal" çözümün varlığı için gerekli koşullara dönüşür. EEE durumda, düzgün çözümlerin* L^p *normunun zamanla cebirsel olarak sıfıra gittiği gösterilmiştir.*

Anahtar Kelimeler: *Pseudo-konformal invaryant, Patlama profili,* L^p *- stabilitesi.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Gülçin M. MUSLU. gulcin@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 57.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "Genelleştirilmiş Davey-Stewartson Sisteminin Patlama Çözümleri: Analitik ve Sayısal Sonuçlar" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 02.03.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 05.04.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2008 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Two remarks on a generalized Davey-Stewartson system

Extended abstract

The Generalized Davey-Stewartson (GDS) system is given by

$$iu_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u,$$
$$\varphi_{1,xx} + m_2\varphi_{1,yy} + n\varphi_{2,xy} = (|u|^2)_x,$$
$$\lambda\varphi_{2,xx} + m_1\varphi_{2,yy} + n\varphi_{1,xy} = (|u|^2)_y$$

where u *and* φ_1, φ_2 *are, respectively, the complex and the real valued functions of spatial coordinates* x, y *and the time* t. *The parameters* $\sigma, \kappa, \gamma, m_1, m_2, \lambda$ *and* n *are real constants and* σ *is normalized as* $|\sigma| = 1$. *The parametric relation* $(\lambda - 1)(m_2 - m_1) = n^2$ *follows from the structure of the physical constants and plays a key role in the analysis of these equations. The GDS system was derived to model* $2+1$ *dimensional wave propagation in a bulk medium composed of elastic material with couple stresses (Babaoğlu and Erbay, 2004). Four conserved quantities, corresponding to mass, momentum in the* x *and* y *directions and energy, were derived in (Babaoğlu et al., 2004). Furthermore, these equations were classified according to the signs of* (σ, m_1, m_2, n) *as Elliptic Elliptic Elliptic (EEE), Elliptic Elliptic Hyperbolic (EEH), Elliptic Hyperbolic Hyperbolic (EHH), Hyperbolic Elliptic Elliptic (HEE), Hyperbolic Hyperbolic Hyperbolic (HHH), Hyperbolic Elliptic Hyperbolic (HEH). Here we will only be considering* $(+,+,+,+)$ *EEE and* $(-,+,+,+)$ *HEE cases.*

It is well-known that many equations can be expressed as a NLS equation with additional and possibly non-local terms (Constantin, 1990). For example, in the elliptic elliptic and hyperbolic elliptic cases of the Davey-Stewartson (DS) system can be written as

$$iu_t + \delta u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + buE(|u|^2)$$

with $\delta = \pm 1$, *where* E *is a linear pseudo-differential operator with a homogeneous symbol of order zero. The non-local term* $buE(|u|^2)$ *acts in many ways like a cubic nonlinearity: they have similar scaling properties and the interaction between these two nonlinear terms determine the global behaviour of the solutions.*

In Babaoğlu et al., (2004), for the HEE and EEE cases the GDS system has been expressed as a NLS equation with additional term. This representation leads one to expect some of properties of the NLS equation to remain valid for the GDS system.

In two space dimensions, the solutions of the Schrödinger equations with cubic nonlinearity (NLS) are invariant under the pseudo-conformal transformation. In addition to its inherent interests, this invariance has far reaching consequences leading to a better understanding of the blow-up profiles; global existence of the solutions; as well as their L^p-*stability.*

As it is the case for the NLS equation, the solutions of the DS system are invariant under the pseudo-conformal transformation. For the elliptic NLS, this invariance plays a key role in understanding the blow-up profile of solutions, whereas in the hyperbolic-elliptic case of DS system an explicit blow-up profile is obtained via the pseudo-conformal invariance.

The main aim of this study, is to highlight the importance of the pseudo-conformal invariance for the GDS system (Eden et al., 2006). We start by recalling some of the work done for the classification of the GDS system as well as its conserved quantities. Then the solutions are also shown to be invariant under a scale transformation. The corresponding conserved quantity, denoted by S, *is used for a derivation of the virial identity. Next, the pseudo-conformal transformation for the GDS system is stated and its invariant, denoted by* M, *is found. Then, we focus on the HEE case for the GDS system. Starting from a solution ansatz in the spirit of (Ozawa, 1992), a set of conditions are found on the underlying parameters. These conditions also turn out to be necessary conditions for the existence of a "radial" steady state solution. The pseudo-conformal transformation converts this steady-state solution into a time dependent one which blows-up in finite time. Finally, following an idea given in (Weinstein, 1989) we show that for* $p > 2$, *the* L^p-*norms of smooth solutions of the GDS system in the EEE case converge to* 0 *as* $t \to \infty$.

Keywords: *Pseudo-conformal invariance, Blow-up profile,* L^p-*stability.*

Giriş

Bilindiği üzere kübik Nonlineer Schrödinger (NLS) denkleminin çözümleri, iki uzay boyutu için, pseudo-konformal dönüşüm altında invaryant kalmaktadır (Cazenave, 2003; Sulem ve Sulem, 1999). Bu invaryantlığın çözümlerin global varlığı (Bourgain, 1999), L^p stabilitesi (Constantin, 1990; Weinstein, 1989) ve patlama profillerinin (Nawa ve Tsutsumi, 1999; Ozawa, 1992; Weinstein, 1986; Weinstein, 1989) daha iyi anlaşılmasına neden olan çok önemli sonuçları vardır.

Birçok evrim denkleminin yerel olmayan terimlere sahip bir NLS denklemi olarak yazılabildiği bilinmektedir (Constantin, 1990; Ghidaglia ve Saut, 1993). Örneğin, Davey-Stewartson (DS) sistemi Eliptik-Eliptik (EE) ve Hiperbolik-Eliptik (HE) durumlarında $\delta = \pm 1$ ve E bir pseudo-diferansiyel operatör olmak üzere

$$iu_t + \delta u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + buE(|u|^2)$$

şeklinde yazılabilir (Ghidaglia ve Saut, 1990). Buradaki $buE(|u|^2)$ yerel olmayan terimi birçok şekilde kübik nonlineer terim gibi katkı verir. Bu iki nonlineer terim benzer ölçek özelliklerine sahip olup, aralarındaki etkileşim çözümlerin global davranışını belirler (Ghidaglia ve Saut, 1993).

NLS denkleminde olduğu gibi, DS sisteminin çözümleri de pseudo-konformal dönüşüm altında invaryant kalmaktadır (Cipolatti ve Kavian, 2001; Ozawa, 1992). DS sisteminin HE durumunda pseudo-konformal dönüşüm yardımıyla bir analitik patlama profili (Ozawa, 1992) elde edilirken, eliptik NLS denklemi için bu invaryantlık çözümlerin patlama profillerinin anlaşılmasında temel rol oynar (Nawa ve Tsutsumi, 1989; Weinstein, 1986; Weinstein 1989).

Babaoğlu ve Erbay, (2004)'de genelleştirilmiş elastik bir ortamdaki dalga yayılımını modellemek için benzer bir sistem türetilmiş ve Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi olarak adlandırılmıştır. Babaoğlu ve diğerleri (2004)'de Hiperbolik-Eliptik-Eliptik (HEE) ve Eliptik-Eliptik-Eliptik (EEE) durumlar için GDS sistemi,

$$\alpha = \alpha(\xi_1, \xi_2) = \frac{\lambda \xi_1^4 + (1 + m_1 - 2n)\xi_1^2 \xi_2^2 + m_2 \xi_2^4}{(\lambda \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + m_1 \xi_2^2)}$$

olmak üzere

$$\widehat{K(f)}(\xi) = \alpha(\xi)\hat{f}(\xi)$$

dönüşüm değişkenlerine bağlı olarak

$$iu_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma u K(|u|^2) \qquad (1)$$

şeklinde ifade edilmiştir. (1) denklemi ile verilen gösterim, NLS denkleminin bazı özelliklerinin GDS sistemi için de geçerli olduğu beklentisine yol açar.

Bu çalışmanın temel amacı, GDS sistemi için pseudo-konformal invaryantlığın önemini ortaya çıkarmaktır (Eden vd., 2006). İlk olarak, GDS sisteminin sınıflandırılmasının yapıldığı ve korunan büyüklüklerinin elde edildiği bazı çalışmalar hatırlatılmıştır (Babaoğlu vd., 2004). Daha sonra çözümlerin ölçek dönüşümü altında invaryant kaldığı gösterilmiştir. Ölçek dönüşümüne karşılık gelen S ile gösterilen korunan büyüklük virial özdeşliğin türetilmesi için kullanılmıştır. Bir sonraki adımda, GDS sistemi için pseudo-konformal dönüşüm ifade edilmiş ve ona karşılık gelen ve M ile gösterilen invaryant bulunmuştur. Daha sonra, GDS sisteminin HEE durumuna odaklanılmıştır. (Ozawa, 1992)'deki yaklaşıma benzer bir şekilde, başlangıçta bir çözüm önermesi yapılarak parametreler üzerine bazı koşullar bulunmuştur. Aslında bu koşullar bir "radyal" daimi-durum çözümünün varlığı için gerekli koşullara dönüşür. Pseudo-konformal dönüşüm, bu daimi-durum çözümü sonlu zamanda patlayan zamana bağlı bir çözüme dönüştürür. Son olarak, Weinstein, (1989)'da verilen fikri takip ederek, $p > 2$ için EEE durumda GDS sisteminin düzgün çözümlerinin L^p normlarının $t \to \infty$ iken sıfıra gittiği gösterilmiştir.

GDS sistemi ve yeni invaryantlar

GDS sistemi:

$$iu_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u, \quad (2)$$

$$\varphi_{1,xx} + m_2\varphi_{1,yy} + n\varphi_{2,xy} = (|u|^2)_x, \quad (3)$$

$$\lambda\varphi_{2,xx} + m_1\varphi_{2,yy} + n\varphi_{1,xy} = (|u|^2)_y \quad (4)$$

kuple gerilmeleri içeren elastik bir malzemeden yapılmış sonsuz bir ortamdaki $2+1$ boyutlu dalga yayılımını modellemek için Babaoğlu ve Erbay, (2004)'de önerilmiştir. Burada u kısa enine dalga modunun kompleks genliğini, φ_1 ve φ_2, sırasıyla, uzun boyuna ve uzun enine dalga modlarını gösterir. σ, κ, γ, m_1, m_2, λ ve n parametreleri reel sabitlerdir. Ayrıca σ parametresi $|\sigma|=1$ olarak normalize edilmiştir. Parametreler arasında geçerli olan $(\lambda-1)(m_2-m_1)=n^2$ bağıntısı fiziksel sabitlerin yapısından kaynaklanır ve bu denklemlerin analizinde önemli bir rol oynar. Babaoğlu ve diğerleri, (2004)'de GDS sistemi (σ, m_1, m_2, n) parametrelerinin işaretlerine göre sınıflandırılmıştır. Bu çalışmada sadece $(+,+,+,+)$ EEE ve $(-,+,+,+)$ HEE durumları göz önüne alınacaktır. EEE durumda başlangıç-değer probleminin varlık ve tekliği $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ için Babaoğlu ve diğerleri (2004)'de verilmiştir. Ghidaglia ve Saut, (1990)'da da önerildiği gibi, bu yaklaşım HEE duruma da genişletilebilir. Kütlenin korunumuna, x ve y yönlerindeki momentumların korunumuna ve enerjinin korunumuna karşlık gelen dört korunan büyüklük Babaoğlu ve diğerleri, (2004)'de, sırasıyla, aşağıdaki şekilde türetilmiştir:

$$N = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dxdy$$

$$P_x = \int_{\mathbb{R}^2} i(u^* u_x - uu_x^*)dxdy$$

$$P_y = \int_{\mathbb{R}^2} i(u^* u_y - uu_y^*)dxdy$$

$$H = \int_{\mathbb{R}^2} \{\sigma |u_x|^2 + |u_y|^2 + \frac{\kappa}{2}|u|^4$$

$$+\frac{\gamma}{2}\Big[\left(\varphi_{1,x}\right)^2 + m_2\left(\varphi_{1,y}\right)^2\Big] + \lambda\left(\varphi_{2,x}\right)^2 + m_1\left(\varphi_{2,y}\right)^2$$
$$+ n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})]\}dxdy. \quad (5)$$

Başlangıç-değer probleminin $(u, \varphi_1, \varphi_2)$ çözümünün varolduğu fonksiyon uzayları, bu korunan büyüklükleri matematiksel olarak anlamlı yapar. Babaoğlu ve diğerleri, (2004)'de, başlangıç-değer probleminin ağırlıklı uzaylarda varolan çözümleri için bir virial tipi özdeşlik türetilmiştir. Bu özdeşliği kullanarak EEE durum için bir patlama sonucu elde edilmiştir.

(5) denklemleriyle verilen dört korunan büyüklüğe ek olarak şimdi iki yeni invaryant sunulacaktır. İlk olarak, GDS sisteminin bir ölçek değişmezliğini kabul ettiği gösterilecektir. GDS sistemi:

$$\begin{aligned}
&(x,y,t,u,\varphi_1,\varphi_2) \to (x',y',t',u',\varphi_1',\varphi_2') \\
&u'(x',y',t') = \mu u(x,y,t), \\
&\varphi_1'(x',y',t') = \mu\varphi_1(x,y,t), \\
&\varphi_2'(x',y',t') = \mu\varphi_2(x,y,t), \\
&x' = x/\mu,\ y' = y/\mu,\ t' = t/\mu^2
\end{aligned} \quad (6)$$

ile tanımlanan ölçek dönüşümü altında invaryant kalır. Noether teoremini uygulayarak, ölçek dönüşümüne karşılık gelen invaryant

$$S = i\int_{\mathbb{R}^2} \{x(uu_x^* - u^* u_x) + y(uu_y^* - u^* u_y)\}dxdy - 4tH \quad (7)$$

şeklinde elde edilmiştir. (2) denkleminde $\sigma = 1$ alınırsa, u çözümünün varyansı (atalet momenti)

$$V(t) = \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2)|u|^2\, dxdy$$

şeklinde verilir ve varyansın zamana göre türevi

$$\frac{dV}{dt} = 2i \int_{\mathbb{R}^2} \{x(uu_x^* - u^* u_x) + y(uu_y^* - u^* u_y)\} dxdy$$

denklemini sağlar. Bu denklem zamana göre türetilir ve (7) denklemi kullanılırsa, virial özdeşlik

$$\frac{d^2V}{dt^2} = 8H$$

elde edilir. Babaoğlu ve diğerleri (2004)'de bu özdeşlik (2)-(4) denklemlerinden doğrudan türetilmiştir ve EEE durumda çözümlerin patladığının gösterilmesinde kullanılmıştır.

Ayrıca GDS sisteminin çözümleri

$$(x, y, t, u, \varphi_1, \varphi_2) \to (x', y', t', u', \varphi_1', \varphi_2')$$
$$u'(x', y', t') = (a + bt)\exp(-ib\frac{\sigma x^2 + y^2}{4(a+bt)}) u(x, y, t),$$
$$\varphi_1'(x', y', t') = (a + bt)\varphi_1(x, y, t),$$
$$\varphi_2'(x', y', t') = (a + bt)\varphi_2(x, y, t),$$
$$x' = \frac{x}{(a+bt)},\ y' = \frac{y}{(a+bt)},\ t' = \frac{c+dt}{a+bt},$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \qquad (8)$$

ile tanımlanan pseudo-konformal dönüşüm altında da invaryant kalmaktadır. Pseudo-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklük, enerjiyi

$$H' = \int_{\mathbb{R}^2} \{\sigma |u'_{x'}|^2 + |u'_{y'}|^2 + \frac{\kappa}{2}|u'|^4$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left[\left(\varphi'_{1,x'}\right)^2 + m_2\left(\varphi'_{1,y'}\right)^2\right] + \lambda\left(\varphi'_{2,x'}\right)^2 + m_1\left(\varphi'_{2,y'}\right)^2$$
$$+ n(\varphi'_{1,y'}\varphi'_{2,x'} + \varphi'_{1,x'}\varphi'_{2,y'})]\} dx'dy'$$

yeni koordinat takımında yazarak elde edilir. $a = d = 0, b = -1\ ve\ \ c = 1$ olduğu durumda H' enerjisi

$$M = 4H' = \int_{\Re^2} \{\sigma | xu + 2i\sigma tu_x|^2 + | yu + 2itu_y|^2$$
$$+2t^2(\kappa |u|^4 + \gamma[(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 + \lambda(\varphi_{2,x})^2$$
$$+m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})])\} dxdy$$

şeklini alır ve bu büyüklük zamanda korunur.

Uyarı: M korunan büyüklüğü, bağımsız olarak, Noether teoremi yardımıyla da türetilmiştir.

HEE durumda bir patlama profili

Bu bölümde, HEE durum göz önüne alınacak ve $\sigma = -1$ varsayılacaktır. A, B, C_1, C_2 keyfi sabitler olmak üzere (Ozawa, 1992)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + Ax^2 + By^2},$$
$$\varphi_1(x, y, t) = C_1 \frac{2Ax}{1 + Ax^2 + By^2},$$
$$\varphi_2(x, y, t) = C_2 \frac{2By}{1 + Ax^2 + By^2}, \qquad (9)$$

şeklinde çözüm aranacaktır. Bu çözüm (2)-(4) denklemlerinde kullanılırsa, aşağıdaki koşullar elde edilir:

$$\lambda = m_1(1-n), m_2 = 1 - \frac{n}{m_1}, \kappa = -\frac{\gamma}{2}(1 + \frac{1}{m_1}), \quad (10)$$

$$C_1 = m_1 C_2, A = B = \frac{\gamma}{16}(1 - \frac{1}{m_1}),$$
$$AC_1 = \frac{1}{4}, BC_2 = \frac{1}{4m_1} \qquad (11)$$

A, B, C_1, C_2 sabitlerinin γ ve m_1 cinsinden ifadeleri (9) denkleminde kullanılırsa istenilen çözüm elde edilir.

Öte yandan g fonksiyonu r değişkeninin sonsuzda sıfıra giden keyfi bir fonksiyonu ve c_1, c_2, c_3 keyfi reel sabitler olmak üzere

$$u(r,\theta)=\frac{g(r)}{c_3 r},\ \varphi_1(r,\theta)=c_1 g(r)\cos(\theta),$$
$$\varphi_2(r,\theta)=c_2 g(r)\sin(\theta), \qquad (12)$$

şeklinde bir özel radyal çözümün varlığı kabul edildiğinde, fiziksel parametreler için elde edilen (10) koşulları doğal olarak ortaya çıkar. (3) ve (4) denklemlerinden $c_1=m_1c_2$ ve $g(r)$ fonksiyonunun

$$c_1[g''(r)+(\frac{g(r)}{r})']-\frac{1}{c_3^2}(\frac{g^2(r)}{r^2})'=0$$

denklemini sağladığı ortaya çıkar. Bu denklemin çözülmesi, K keyfi bir sabit olmak üzere,

$$g(r)=\frac{2c_1c_3^2 r}{1+Kr^2}$$

fonksiyonunu verir. $g(r)$ fonksiyonu (12) denkleminde kullanılırsa,

$$u(r,\theta)=\frac{2c_1c_3}{1+Kr^2},\ \varphi_1(r,\theta)=\frac{2c_1^2c_3^2 r}{1+Kr^2}\cos\theta,$$
$$\varphi_2(r,\theta)=\frac{1}{m_1}\frac{2c_1^2c_3^2 r}{1+Kr^2}\sin\theta \qquad (13)$$

çözümü elde edilir. (10) denkleminde verilen koşullara ek olarak $K=\gamma c_1^2c_3^2(1-1/m_1)/4$ denkleminin de parametreler tarafından sağlanması koşuluyla, (13) ile verilen ifadeler GDS sisteminin bir çözümüne karşılık gelir. Eğer kartezyen koordinatlara dönülürse, (10)'da verilmiş kısıtlamaların sağlanması koşuluyla GDS sisteminin bir zamandan bağımsız çözümü

$$u(x,y)=\frac{\mu}{1+A\mu^2(x^2+y^2)},$$
$$\varphi_1(x,y)=\frac{\mu^2 x}{2[1+A\mu^2(x^2+y^2)]},$$
$$\varphi_2(x,y)=\frac{\mu^2 y}{2m_1[1+A\mu^2(x^2+y^2)]} \qquad (14)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mu=2c_1c_3$ ve $A=\gamma(1-1/m_1)/16$ olur. (14)'de verilen çözümün (9)'da verilen çözümden (6) ölçek dönüşümü yardımıyla elde edilebildiğine işaret edilmelidir.

Kolaylık sağlamak için, GDS sisteminin zamandan bağımsız çözümü

$$v_A(x,y)=\frac{\mu}{1+A\mu^2(x^2+y^2)},$$
$$\psi_{1A}(x,y)=\frac{\mu x v_A}{2},$$
$$\psi_{2A}(x,y)=\frac{\mu y v_A}{2m_1} \qquad (15)$$

şeklinde yazılır. Burada $v_A\in L^2(\mathbb{R}^2)$ ve $\|v_A\|_2=(\pi/A)^{1/2}$ olmasına rağmen, hem $(x^2+y^2)^{1/2}v_A$ fonksiyonunun $L^2(\mathbb{R}^2)$ uzayının elemanı olmadığına hem de ∇v_A gradyanının $L^2(\mathbb{R}^2)$ uzayının elemanı olmadığına dikkat edilmelidir. Bu nedenle elde edilen çözüm Babaoğlu ve diğerleri, (2004)'de göz önüne alınmış çözüm uzaylarının içine düşmez.

GDS sistemininin çözümleri pseudo-konformal dönüşüm altında invaryant kaldığından,

$$u_A(x,y,t)=\frac{1}{a+bt}\exp(ib\frac{y^2-x^2}{4(a+bt)})v_A(x',y'),$$
$$\varphi_{1A}(x,y,t)=\frac{1}{a+bt}\psi_{1A}(x',y'),$$
$$\varphi_{2A}(x,y,t)=\frac{1}{a+bt}\psi_{2A}(x',y'),$$

şeklinde verilen ifadeler de GDS sisteminin bir çözümünü oluşturur. Ayrıca, basit bir hesaplama $\|u_A\|_2=(\pi/A)^{1/2}$ iken $u_A\notin H^1(\mathbb{R}^2)$ olduğunu gösterir. $ab<0$ olmak üzere $T=-a/b$ alınır ve $\varepsilon=a+bt=-b(T-t)$ tanımı yapılırsa, $|u_A(x,y,t)|^2$ ifadesi $\varepsilon^{-2}|v_A(x/\varepsilon,y/\varepsilon)|$ şeklini alır. Böylece $t\to T^-$ iken $\varepsilon\to 0^+$ ve

$$|u_A(t)|^2\to\frac{\pi}{A}\delta_0$$

olur. Burada δ_0 orijindeki Dirac ölçüsünü göstermektedir. Ayrıca $v_A(x,y)$ radyal simetrik çözümle başlanmasına rağmen, $u_A(x,y,t)$ çözümü radyal simetrik değildir. Bununla beraber $|u_A(x,y,t)|$ radyal simetriktir ve maksimum değerini orijinde alır. Bu maksimum değer $\mu^2 b^{-2}(T-t)^{-2}$ ifadesine eşittir. Böylece $t \to T^-$ iken bu maksimum değer patlayacaktır.

Uyarı: $u_A \notin H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $s > 2/3$ için $(x^2+y^2)^{s/2} u_A \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ olduğu gözlenir. Bu gerçek, eliptik NLS denkleminin çözümlerinin global varlığı (Bourgain, 1999, Önerme 3.53) için verilen sonuçlarla uyumludur. Aslında, eliptik NLS denklemi için verilen bu sonuçların gösterilmesinde de pseudo-konformal dönüşüm önemli bir rol oynar.

EEE durumda çözümlerin asimptotik davranışı

Daha önce de belirtildiği gibi, pseudo-konformal dönüşüm GDS sisteminin hem EEE hem de HEE durumlarında geçerlidir. $\sigma = -1$ varsayımı EEE durumda geçersiz olduğundan, bir önceki bölümde bahsedilen analiz EEE duruma taşınamaz. (Nawa ve Tsutsumi, 1989)'da yazarların eliptik NLS denklemi için pseudo-konformal invaryantı kullanarak bir patlama profili bulduklarını belirtmek gerekir.

Burada Weinstein, (1989)'da verilen fikir uygulanacaktır. Şimdi (2)-(4) denklemlerinin $\Sigma = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) : (x^2+y^2)^{1/2} u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ uzayından alınan çözümünün, $t > 0, p > 2$ ve N sabiti u_0 başlangıç çözümüne bağlı olmak üzere,

$$\| u(t) \|_{L^p}^p \le N(1+|t|)^{2-p}$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilecektir.

Buradaki esas fikir Babaoğlu ve diğerleri, (2004)'de sunulana benzerdir: Babaoğlu ve diğerleri, (2004)'de $m_1 > 0$, $\kappa \ge \max\{-\gamma \max\{1, 1/m_1\}, 0\}$ ise, her $\xi \in \mathbb{R}^2$ için $\kappa + \alpha(\xi)\gamma > 0$ olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu koşullar iyileştirilerek $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$, $n > 0$ ve

$$\delta_1 = \frac{1+m_1-2n}{\lambda m_1 + m_2}$$

olmak üzere

$$\gamma > 0,\ \kappa \ge -\gamma \min\left(\delta_1, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\right) \tag{16}$$

$$\gamma < 0,\ \kappa \ge -\gamma \max\left(\frac{1}{m_1}, 1\right) \tag{17}$$

koşullarının sağlanması durumunda her $\xi \in \mathbb{R}^2$ için $\kappa + \alpha(\xi)\gamma > 0$ olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla (5) denkleminden

$$\| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \le H(u)(t)$$

olduğu ve kütlenin ve enerjinin korunumundan

$$\| u \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 \le H(u_0) + \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. Diğer taraftan, $(5)_4$ denkleminde ilk iki terimden sonraki terimlerin $|u|$ fonksiyonuna bağlı olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\| \nabla |u| \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Stampacchia eşitsizliği kullanılırsa,

$$H(|u|)(t) \le H(u)(t) \tag{16}$$

elde edilir. Enerjinin korunumu ve (16) denklemi kullanılırsa

$$H(|v|)(\frac{c+dt}{a+bt}) \le H(v)(\frac{c+dt}{a+bt}) \le H(v)(\frac{c}{a})$$

bulunur. v fonksiyonunun pseudo-konformal dönüşüm altında görüntüsü u fonksiyonu ise ve $T = (c+dt)/(a+bt)$ tanımı hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
H(|u|)(T) &= (a+bt)^2 H(|v|)(T) \\
&\le (a+bt)^2 H(v)(\frac{c}{a}) \\
&= (d-bT)^{-2} H(v)(\frac{c}{a})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$H(|u|)(T) \le k(1+|T|)^{-2}$$

olacaktır. Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\| u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\le C \| \nabla |u| \|^{p-2}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\le CH(|u|)^{(p-2)/2} \| u_0 \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\le N(1+|t|)^{2-p}
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$, $n > 0$ iken, (16)-(17) koşullarının sağlanması durumunda (2)-(4) ile verilen GDS sisteminin $\sum$ kümesinden seçilen çözümlerinin, $p > 2$ için, L^p -normlarının sıfıra gittiği gösterilmiştir.

Uyarı 1**:** $\kappa > \gamma$ için benzer bir yaklaşım eliptik-eliptik DS sistemine de taşınabilir.

Uyarı 2**:** Pseudo-konformal invaryantlığı kullanmadan da GDS sistemi için asimptotik davranış kestirimlerini elde etmek mümkündür. Aslında şimdiki çalışmada $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^2), |x|^2 u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2), |x| \nabla u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ olduğu için, Constantin, (1990)'da sunulan yaklaşım burada da uygulanabilir. Böylece çözümlerin L^∞ normlarının $t \to \infty$ iken sıfıra gittiği gösterilebilir.

Sonuçlar

Bu çalışmada GDS sisteminin çözümlerinin pseudo-konformal dönüşüm altında invaryant kaldığı gösterilmiş ve pseudo-konformal invaryantlık kullanılarak bulunan iki yeni sonuç sunulmuştur. HEE durumda, fiziksel parametreler üzerine bazı koşullar koyarak bir patlama profili elde edilmiştir. Ancak bu koşullar bir özel "radyal" çözümün varlığı için gerekli koşullara dönüşür. EEE durumda, düzgün çözümlerin L^p normunun zamanla cebirsel olarak sıfıra gittiği gösterilmiştir.

Kaynaklar

Babaoğlu, C., Eden, Erbay, S., (2004). Global existence and nonexistence results for a generalized Davey-Stewartson equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37**, 11531-11546.

Babaoğlu, C., Erbay, S., (2004). Two dimensional wave packets in an elastic solid with couple stresses, *International Journal of Non-linear Mechanics,* **39**, 941-949.

Bourgain, J., (1999). Global solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *AMS Colloquim Publications,* **46**.

Cazenave, T., (2003). Semilinear Schrödinger equations, *AMS Courant Lecture Notes in Mathematics,* **10**.

Cipolatti, R., Kavian, O., (2001). Existence of pseudo-conformally invariant solutions to the Davey-Stewartson system, *Journal of Diffeential Equations*, **176**, 1, 223-247.

Constantin, P., (1990), Decay estimates for Schrödinger equations, *Communications in Mathematical Physics,* **127**, 101-108.

Eden, A., Erbay, H.A., Muslu, G. M., (2006). Two remarks on a generalized Davey-Stewartson system, *Nonlinear Analysis,* **64**, 979-986.

Ghidaglia, J.M., Saut, J.C., (1993). Nonelliptic Schrödinger equations, *Journal of Nonlinear Science,***3**, 169-195.

Nawa, H., Tsutsumi, M., (1989). On blow-up for the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation, *Funkcialaj Ekvacioj*, **32**, 417-428.

Ozawa, T., (1992). Exact blow-up solutions to the Cauchy problem for the Davey-Stewartson systems, *Proceedings of the Royal Society London,* **436**, 345-349.

Sulem, C., Sulem, P., (1999). The nonlinear Schrödinger equation self-focusing and wave collapse, Springer, Toronto.

Weinstein, M.I., (1986). On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations, *Communications in Partial Differential Equations*, **11,** 5, 545-565.

Weinstein, M. I., (1989), The nonlinear Schrödinger equation-singularity formation and dispersion, *Contemporary Mathematics,* **99,** 213-232.