

# Sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin kararlılığı

Şenay PASİNLİOĞLU\*, Can Fuat DELALE

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Bu çalışmada, yakınsak-ırsaksak bir lülede sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi kabarcıklı akış çözümlerinin, kabarcık/kabarcık etkileşimleri de göz önünde bulundurularak zamana göre kararlılığı incelenmiştir. Bunun için homojen kabarcıklı sıvı akışı modeli kullanılarak sanki-bir-boyutlu daimi olmayan kavitasyonlu lüle akış denklemleri kabarcık dinamiği yasasıyla birlikte (iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi) gözönünde bulundurulmuştur. Çekirdekleşme, kabarcık bölünme ve birleşmeleri ihmal edilmiştir. Tüm sönüm mekanizmaları, viskoz yutulma biçiminde tek bir sönüm katsayısıyla ele alınmış, kabarcıkların büyüme ve büzülmesinde kabarcık içindeki gaz için politropik yasa kullanılmıştır. Başlangıç dağılımları, giriş koşulları ve lüle geometrisi, lülede kavitasyon oluşacak şekilde alınmıştır. Bu varsayımlar altında, model denklem sistemi, akış hızı ve kabarcık yarıçapı için iki evrim denkleminde indirgenmiştir. Evrim denklemleri, daimi olmayan akışa göre pertürbe edilerek kabarcık yarıçapı ve akış hızı pertürbasyonları için kuple lineer kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu kuple lineer denklem sistemi genelleştirilmiş özdeğer problemine dönüştürülmüş ve lülenin belli bölgeleri için özdeğerler hesaplanmıştır. Özdeğer problemindeki denklem sisteminin tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde, normal mod analizi yöntemiyle problem kesin olarak çözülmüştür. Çeşitli akış parametrelerinin (kavitasyon sayısı, vs.)  $k$  pertürbasyon dalga sayısı ile değişimi için kararlılık diyagramları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlı olduğunu göstermiştir. Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgelerin, türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisi gözönünde bulundurulduğunda genişlediği görülmüştür.*

**Anahtar Kelimeler:** Kavitasyonlu akışlar, daimi akış çözümleri, zamana bağlı kararlılık.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Şenay PASİNLİOĞLU. pasinliogl@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 31 87.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Kabarcıklı sıvılarda kavitasyonlu daimi lüle akışlarının kararlılığı ve soliton oluşumu" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 21.04.2009 tarihinde dergiye ulaştırılmış, 09.06.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Temporal stability of steady-state quasi-one-dimensional bubbly cavitating nozzle flow solutions

### Extended abstract

*Cavitating flows through converging-diverging nozzles seem to be the simplest configurations for analysis in hydrodynamic cavitation. They have direct applications in cavitation in ducts and venturi tubes as well as in Diesel injection nozzles. The first model of bubbly liquid flow through a converging-diverging nozzle was proposed by Tangren et al. (1949) using a barotropic relation. The problem was reconsidered by Ishii et al. (1993) by taking into account unsteady effects, but still neglecting bubble dynamics. A summary of barotropic models can be found in the book by Brennen (1995). For cavitating flows it is essential to consider bubble dynamics together with the equations of nozzle flow. A continuum bubbly mixture flow model that couples spherical bubble dynamics, as described by the classical Rayleigh-Plesset equation, to the flow equations was proposed by van Wijngaarden (1968). Steady-state solutions of bubbly cavitating flows through converging-diverging nozzles have been investigated by Wang and Brennen (1998) and by Delale et al. (2001) using the continuum bubbly liquid flow model. Assuming that the gas pressure inside the bubble obeys the polytropic law and lumping all damping mechanisms, in a crude manner, by a single damping coefficient in the form of viscous dissipation, both investigations have demonstrated bifurcation of steady-state solutions to flashing flow instabilities by varying the inlet void fraction (or inlet bubble radius or inlet cavitation number). A numerical investigation of unsteady bubbly cavitating flows in converging-diverging nozzles on the same model has been carried out by Preston et al. (2002). They show that the instabilities encountered in the steady-state solutions of quasi-one-dimensional bubbly nozzle flows may correspond to unsteady bubbly shock waves formed in the diverging section of the nozzle and propagated downstream.*

*The aim of this investigation is to present a detailed analysis of quasi-one-dimensional unsteady bubbly cavitating flows in converging-diverging nozzles with the inclusion of bubble/bubble interactions as discussed in Delale et al. (2001). The description is, therefore, restricted solely to the investigation of the interplay between the overall compressibility of the continuum bubbly mixture and flow unsteadiness.*

*Although the stability of both inviscid and viscous bubbly parallel flows have been investigated by d'Agostino et al. (1997) and d'Agostino and Burzagli (2000), it is important to investigate the temporal stability of cavitating nozzle flows in the quasi-one-dimensional approximation to find out whether such steady-state solutions are stable with respect to temporal perturbations.*

*In this study the stability of steady-state bubbly cavitating nozzle flows is considered. For this reason, quasi-one-dimensional unsteady bubbly cavitating nozzle flows are considered by employing a homogeneous bubbly liquid flow model together with the nonlinear dynamics of cavitating bubbles, described by a modified Rayleigh-Plesset equation. Nucleation, coagulation of bubbles and bubble fission are neglected. The various damping mechanisms are lumped together by a single damping coefficient in the form of viscous dissipation. A polytropic law for the expansion and compression of the gas inside the bubble is assumed. The initial distributions, inlet conditions and nozzle geometry are chosen such that cavitation can occur in the nozzle. Under these assumptions the complete system of equations, by appropriate uncoupling, are reduced to two evolution equations, one for the flow speed and the other for the bubble radius. The evolution equations for the bubble radius and flow speed are then perturbed with respect to flow unsteadiness resulting in a coupled system of linear partial differential equations for the radius and flow speed perturbations. This system of coupled linear PDE's is then cast into an eigenvalue problem. The eigenvalues for the resulting system are found by normal mode analysis in the inlet region of the nozzle where the coefficients of the system of the PDE's are almost constant. Stability diagrams are obtained by varying the various flow parameters (cavitation number, etc.) against the perturbation wave number  $k$ . Results found show that the steady-state bubbly cavitating nozzle flow solutions are temporally stable only for perturbations with very small wave numbers. The effect of damping mechanisms on the stability of the steady-state solutions seems to be negligible in the inlet region because of the very small growth rate of the bubbles. The stable regions of the stability diagram for the inlet region of the nozzle are seen to be broadened by the effect of turbulent wall shear stress.*

**Keywords:** *Bubbly cavitating flows, steady-state solutions, temporal stability.*

## **Giriş**

Kavitasyon, yani başlangıçta homojen olan bir sıvıda buhar boşluklarının görülmesi olayı, değişik durumlarda oluşabilir. Kavitasyon oldukça düşük basınçlar altında sıvı ortamın faz geçişi yoluyla iki-fazlı sıvı-kabarcık karışımına dönüşümü olarak tanımlanabilir. Bu faz geçişi, sıvının durgun ya da akış halinde olduğu durumlarda meydana gelebilir. Kavitasyon olayına, genellikle, sıvı basıncını yaklaşık olarak sabit bir sıcaklıkta sıvının doyma basıncının altına düşürmekle erişilir. Akış halindeki bir sıvıda, özellikle, sıvı akışının küçük kesitlerden büyük hızla geçişi kavitasyon olayını doğurmaktadır. Bir su türbini, gemi pervanesi, su pompası vb. kavitasyona elverişli koşullar altındadır. Kavitasyonlu akışlarda sıvı içindeki kabarcıklar yeterli derecede düşük bir basınç bölgesine taşındığında, adeta patlarcasına büyüyerek makro boyutlara erişir ve yeniden yüksek basınç bölgesine taşındıklarında şiddetli bir şekilde büzülürler. Kavitasyon buhar boşluklarının sıvıda doğup kaybolmaları son derece yüksek frekanslarla tekrarlanır ve buhar boşluklarının yok olması sırasında, çevredeki sıvının hücumu sonucu şok dalgaları oluşur ve bu dalgalar boru cidarı, makina pervanesi gibi katı cisim üzerinde darbe etkisi yaratır. Sonucunda bu elemanların darbelere maruz kaldığı bölgeler aşınır.

Kavitasyon konusundaki literatür çok zengin olmasına karşın, verilen bir akış hali için kavitasyonun fiziksel mekanizması tam olarak anlaşılmış değildir. Konunun belli başlı kitapları arasında Hammitt (1980), Young (1989), Brennen (1995) ile Franc ve Michel (2004) sayılabilir. Ayrıca, bazı ayrıntılar için van Wijngaarden (1972) ile Plesset ve Prosperetti (1977)'nin derleme makalelerine de başvurulabilir. Kavitasyon, kuramsal olarak, modellenmesi zor bir olaydır. Daimi olmayan kavitasyonlu akışların sayısal simülasyonu için genellikle homojen iki-fazlı akış modeli kullanılır. Bu akışlar için, geometrik açıdan en basit konfigürasyonu kavitasyonlu yakınsak-ıraksak lüle akışları oluşturur. Yakınsak-ıraksak bir lüleden geçen kabarcıklı sıvı akış modeli ilk kez Tangren ve diğerleri (1949) tarafından barotropik bir bağıntı kullanılarak incelenmiştir. Problem, daimi olmayan

etkiler gözönüne alınarak Ishii ve diğerleri (1993) tarafından yeniden ele alınmış, fakat kabarcık dinamiği ihmal edilmiştir. Kavitasyonlu akışlar için kabarcık dinamiği yasası ile lüle akış denklemlerini birlikte düşünmek zorunludur. Klasik Rayleigh-Plesset denklemi ile tanımlanan küresel kabarcık dinamiği yasasını akış denklemlerine bağlayan sürekli bir kabarcıklı karışım akış modeli van Wijngaarden (1968) tarafından önerilmiştir. Bu model kullanılarak sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak lülelerdeki kabarcıklı kavitasyonlu daimi akışların çözümleri Wang ve Brennen (1998) ile Delale ve diğerleri (2001) tarafından incelenmiştir. Daimi akış çözümleri yanısıra patlayan çözümler bulunmuştur. Bu modelin daimi olmayan akış hallerinde incelenmesi, özellikle deneylerde gözlenen bazı kavitasyonlu akış rejimlerinin (örneğin salınım yapan kavitasyon akışları, kavitasyonlu akışlarda şok dalgaları oluşumu) yorumlanmasına yol açmıştır (Preston vd., 2002).

Bu çalışmanın amacı, yakınsak-ıraksak bir lülede sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi kabarcıklı akış çözümlerinin zamana göre kararlılığını incelemektir. Bunun için homojen kabarcıklı sıvı akışı modeli kullanılıp, sanki-bir-boyutlu daimi olmayan kavitasyonlu lüle akış denklemleri kabarcık dinamiği yasasıyla birlikte (iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi) gözönünde bulundurulmuştur. Çekirdekleşme, kabarcık bölünme ve birleşmeleri ihmal edilmiştir. Tüm sönüm mekanizmaları viskoz yutulma biçiminde tek bir sönüm katsayısıyla ele alınmış, kabarcıkların büyüme ve büzülmelerinde kabarcık içindeki gaz için politropik yasa kullanılmıştır. Başlangıç dağılımları, giriş koşulları ve lüle geometrisi, lülede kavitasyon oluşacak şekilde alınmıştır. Bu varsayımlar altında önerilen model denklem sistemi akış hızı ve kabarcık yarıçapı için iki evrim denkleminde indirgenmiştir. Evrim denklemleri daimi olmayan akışa göre pertürbe edilerek kabarcık yarıçapı ve akış hızı pertürbasyonları için kuple lineer kısmi diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Kuple lineer denklem sistemi genelleştirilmiş özdeğer probleminde dönüştürülmüş ve özdeğer problemi, denklem sisteminin tüm katsayılarının hemen hemen sabit olduğu lüle giriş bölgesinde,

normal mod analizi yöntemiyle kesin olarak çözülmüştür. Çeşitli akış parametrelerinin (kavitasyon sayısı, hacimsel kabarcık oranı, vs.)  $k$  dalga sayısı ile değişimi için kararlılık diyagramları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, kavitasyonlu daimi lüle akışı çözümlerinin sadece çok küçük dalga sayıları için zamana göre kararlı olduğunu göstermiştir. Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgelerin türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisi gözönünde bulundurulduğunda genişlediği görülmüştür.

### Kavitasyonlu kabarcıklı sıvı akışları için model denklemler

Bu bölümde, sanki-bir-boyutlu yakınsak-ıraksak bir lülede kavitasyonlu daimi olmayan akışlar için model denklemler göz önünde bulundurulacak, başlangıç ve sınır koşulları ile lüle geometrisi, lülede kavitasyon oluşacak tarzda ele alınacaktır. Kavitasyonlu akışı modellemek için Kogarko (1961) ve van Wijngaarden (1968, 1972) tarafından önerilen, Wang ve Brennen (1998), Delale ve diğerleri (2001) ile Preston ve diğerleri (2002) tarafından geliştirilen, daimi olmayan sanki-bir-boyutlu lüle akış denklemleri ile küresel kabarcık dinamiğini birbirine bağlayan model denklemler kullanılacaktır. Kabarcıklı karışımın sanki-bir-boyutlu lüle akışı için süreklilik ve momentum denklemleri

$$A' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\rho' u' A') = 0 \quad (1)$$

$$\rho' \frac{du'}{dt'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{P'}{A'} \tau_w' \quad (2)$$

ve karışım yoğunluğu

$$\rho' = \rho'_i (1 - \beta) \quad (3)$$

biçiminde yazılabilir. (1)-(3) denklemlerinde  $u'$  akış hızını,  $p'$  karışım basıncını,  $\rho'$  karışım yoğunluğunu,  $\rho'_i$  sıkıştırılmaz varsayılan sıvının sabit yoğunluğunu,  $\beta$  hacimsel kabarcık oranını, ve  $\tau_w'$  türbülanslı cidar kayma gerilmesini göstermektedir. Ayrıca  $A'$  lüle kesit alanını,  $P'$  ıslak kesit çevresini,  $x'$  lüle eksen koordinatını (orijin

boğazda olacak şekilde) ve  $t'$  gerçek zamanı göstermektedir. Momentum denklemi (2)'de viskoz ile yerçekimi terimleri ihmal edilmiş olup  $d/dt' = \partial/\partial t' + u' \partial/\partial x'$  materyal türevi göstermektedir. Eğer kabarcıkların oluşumu (çekirdekleşme ve kabarcık bölünmesi Brennen, 2002; Delale ve Tunç, 2004; Delale vd., 2005) ve birleşmesi ihmal edilirse, karışımın birim hacimdeki kabarcık sayısı yoğunluğu  $n'$  hacimsel kabarcık oranı  $\beta$  cinsinden

$$n' = \eta_0' (1 - \beta) \quad (4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $\eta_0'$  sıvının birim hacimdeki kabarcık yoğunluğu sayısıdır ve akış boyunca sabittir. Ayrıca, yarıçapı  $R'$  olan küresel kabarcıklardan oluşan karışımın  $\beta$  hacimsel kabarcık oranı

$$\beta = \frac{4}{3} \pi R'^3 n' = \frac{(4/3) \pi R'^3 \eta_0'}{1 + (4/3) \pi R'^3 \eta_0'} \quad (5)$$

olarak tanımlıdır. (4) ve (5) denklemlerinden

$$\frac{R'^3 (1 - \beta)}{\beta} = \frac{3}{4 \pi \eta_0'} = \text{sabit} \quad (6)$$

bağıntısı elde edilir. Burada küresel kabarcık dinamiği için kabarcıkların birbirleriyle etkileşimini göz önünde bulunduran

$$\begin{aligned} \frac{p'_v - p'}{\rho'_i R'} &= \frac{[1 + (2/3) \pi \eta_0' (3\Lambda^2 - 1) R'^3]}{[1 + (4/3) \pi \eta_0' R'^3]} R' \frac{d^2 R'}{dt'^2} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{[1 + (8/3) \pi \eta_0' (2\Lambda^2 - 1) R'^3 + (16/9) \pi^2 \eta_0'^2 \Lambda^2 R'^6]}{[1 + (4/3) \pi \eta_0' R'^3]^2} \left( \frac{dR'}{dt'} \right)^2 \\ &+ \frac{2S'}{\rho'_i R'} + \frac{4\mu'_{eff}}{\rho'_i R'} \frac{dR'}{dt'} - p'_{gi} \left( \frac{R'_0}{R'} \right)^{3k}. \end{aligned} \quad (7)$$

iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi kullanılacaktır (Delale vd., 2001). (7) denkleminde  $S'$  yüzey gerilim katsayısını,  $p'_v$  kabarcığın kısmi buhar basıncını,  $p'_{gi}$  kabarcığın lüle girişindeki kısmi gaz basıncını,  $k$  politropik üssü (sabit sıcaklıkta hal değişimi için  $k=1$ , izentropik hal değişimi için  $\gamma$  adyabatik üs olmak üzere  $k=\gamma$  olur),  $\mu'_{eff}$  viskoz yutulma şeklinde tüm sönüm

mekanizmalarını betimleyen karışımın efektif viskozitesini,  $\Delta r'$  kabarcıklar arası etkileşme erimi olmak üzere (Kubota vd., 1992; Delale vd., 2001)

$$\Lambda = \frac{\Delta r'}{R'} \quad (8)$$

bağıntısı ile tanımlanan  $\Lambda$  ise kabarcık/kabarcık etkileşim parametresini göstermektedir. Önce akış hızı, karışım yoğunluğu, karışım basıncı ve kabarcık içindeki gaz ve buharın kısmi basınçları

$$\rho = \frac{\rho'}{\rho'_l} = 1 - \beta, \quad p = \frac{p'}{p'_i}, \quad p_v = \frac{p'_v}{p'_i}, \quad (9)$$

$$p_g = \frac{p'_g}{p'_i}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{p'_i/\rho'_l}}$$

şeklinde boyutsuzlaştırılır. Burada  $p'_i$  lüle giriş basıncını ve  $\sqrt{p'_i/\rho'_l}$  karakteristik hızı göstermektedir. Ayrıca  $x'$  eksen koordinatı,  $H'_i$  (lüle giriş yüksekliği olarak seçilebilir) karakteristik bir makroölçek uzunluğu ile,  $A'$  kesit alanı  $A'_i$  lülenin giriş kesit alanı ile,  $t'$  zaman koordinatı  $\Theta' = \frac{H'_i}{\sqrt{p'_i/\rho'_l}}$  karakteristik akış zamanı ile,  $R'$  kabarcık yarıçapı  $R'_i$  karakteristik mikroölçek uzunluğu (lüle girişindeki kabarcık yarıçapı)

$$x = \frac{x'}{H'_i}, \quad A = \frac{A'}{A'_i}, \quad t = \frac{t'}{\Theta'} = \frac{\sqrt{p'_i/\rho'_l} t'}{H'_i}, \quad R = \frac{R'}{R'_i} \quad (10)$$

biçiminde boyutsuzlaştırılır (Delale vd., 2006). (1)-(7) denklemleri bu boyutsuzlaştırmalarla

$$\rho = 1 - \beta \quad (11)$$

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0 \quad (12)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} - C_w \varphi \rho u^2 \quad (13)$$

$$R^3 \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right) = \frac{1-\beta_i}{\beta_i} = \kappa_i^3 \quad (14)$$

$$\frac{p_v - p}{L^2} = \frac{[1 + (3\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 / 2]}{[1 + (R/\kappa_i)^3]} R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{[1 + 2(2\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 + \Lambda^2 (R/\kappa_i)^6]}{[1 + (R/\kappa_i)^3]^2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{S_0}{L^2 R} + \frac{4}{L^2 (\text{Re}) R} \frac{dR}{dt} - \frac{p_{gi}}{L^2 R^{3k}} \quad (15)$$

normalize şeklini alır. Burada  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  ve  $R$  sırasıyla, boyutsuz akış hızını, karışım basıncını, karışım yoğunluğunu, hacimsel kabarcık oranını ve kabarcık yarıçapını göstermektedir. Ayrıca,  $L$  mikro ile makro boyutlar arasındaki oran

$$L = \frac{R'_i}{H'_i}, \quad (16)$$

$C_w$  cidar kayma gerilmesi katsayısı

$$C_w = \frac{\tau'_w}{(1/2)\rho' u'^2}, \quad (17)$$

$\varphi$  ıslanan çevrenin kesit alanına oranını betimleyen boyutsuz katsayı

$$\varphi = \frac{H'_i P'}{2A'}, \quad (18)$$

$\kappa_i$  hacimsel kabarcık oranını betimleyen bir parametre

$$\kappa_i^3 = \frac{1 - \beta_i}{\beta_i}, \quad (19)$$

$S_0$  boyutsuz yüzey gerilim katsayısı

$$S_0 = \frac{2S'}{p'_i R'_i}, \quad (20)$$

ve  $\mu'_{eff}$  tüm sönüm katsayısı olmak üzere  $Re$  tipik Reynolds sayısı

$$Re = \frac{\rho'_l H'_i \sqrt{p'_i/\rho'_l}}{\mu'_{eff}} \quad (21)$$

olarak tanımlıdır. Yukarıdaki (11)-(15) denklemleri  $p$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $u$ ,  $R$  bilinmeyenler ve  $A = A(x)$  verilen kesit alanı değişimi olmak üzere kavitasyonlu daimi olmayan lüle akışları için model denklemleri oluştururlar.

### Akış hızı ve kabarcık yarıçapı için evrim denklemleri

(11), (12) ve (14) denklemleri arasında hacimsel kabarcık oranı  $\beta$  ile karışım yoğunluğu  $\rho$  yok edilirse,

$$\frac{dR}{dt} - \frac{R}{3\beta(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{R}{3\beta A} \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \quad (22)$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca (15) iyileştirilmiş Rayleigh-Plesset denklemi  $x$ 'e göre türetilip, (22) denklemden de  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{dR}{dt})$  ve  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{d^2R}{dt^2})$  kısmi türev ifadeleri elde edildiğinde, (13) momentum denklemi ile aralarında  $p$  basıncı yok edilebilir. Daha sonra birtakım düzenlemeler yapılarak kabarcık yarıçapı  $R(x,t)$  ve akış hızı  $u(x,t)$  için

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{3R^2} (R^3 + \kappa_i^3) \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t) \quad (24)$$

evrim denklemleri elde edilir. Burada yerel ani ivmesi  $a(x,t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + g(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) \frac{\partial a}{\partial x} + h(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) a \\ = s(R, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, x) \end{aligned} \quad (25)$$

lineer kısmi diferansiyel denklemini sağlar. Yukarıdaki  $g$ ,  $h$ , ve  $s$  fonksiyonları sırasıyla

$$g(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) = \frac{F_1(R)}{F_2(R)} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}, \quad (26)$$

$$h(R, \frac{\partial R}{\partial x}, x) = \frac{F_1(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_3(R)}{F_2(R)} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} s(R, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, x) = - \left\{ u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \\ + \left[ \frac{F_1(R)}{F_2(R)} u \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} u \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ + \frac{F_6(R)}{F_2(R)} \frac{\partial R}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[ \frac{F_7(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) - 3 \frac{F_3(R)F_5(R)}{RF_2(R)} \right] \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \frac{F_4(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[ \frac{F_8(R)}{F_2(R)} u \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right. \\ + \frac{F_9(R)}{F_2(R)} u \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 + \frac{F_5(R)}{F_2(R)} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F(R)_3}{F_2(R)} u \left. \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \left[ \frac{F_6(R)}{F_2(R)} u^2 \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right)^2 - 3 \frac{F_3(R)F_5(R)}{RF_2(R)} u \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \right. \\ + \frac{F_1(R)}{F_2(R)} u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{F_{10}(R)}{F_2(R)} \left. \right] \frac{\partial R}{\partial x} \\ + \frac{F_9(R)}{F_2(R)} u^2 \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + u^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \\ + \left. \frac{F_5(R)}{F_2(R)} u \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \frac{[\partial p_v / \partial x + \kappa_i^3 C_w \rho u^2 / (R^3 + \kappa_i^3)]}{F_2(R)} \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. (26)-(28) denklemlerindeki  $F_j$ ,  $j=1,2,\dots,10$  fonksiyonları Pasinlioğlu (2009)'da tanımlanmıştır. (23)-(25) denklemleri, verilen bir lüle geometrisi için, başlangıçtaki kabarcık yarıçapı ve akış hızı dağılımı ve belirlenen sınır koşulları ile birlikte çözülür. Bu durumda diğer hidrodinamik değişkenler bu çözümle ilişkilendirilerek elde edilir. Özellikle, basınç alanı

$$\begin{aligned} p = p_v - \frac{L^2 \kappa_i^6}{18R^4} \left[ (6\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^6 \right. \\ + (6\Lambda^2 - 2)(R/\kappa_i)^3 - 1 \left. \right] \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 \\ - \frac{L^2 \kappa_i^3}{6R} \left[ 2 + (3\Lambda^2 - 1)(R/\kappa_i)^3 \right] \left[ \frac{\partial a}{\partial x} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) a \right. \\ + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \left. \right] - \frac{S_0}{R} + \frac{P_{gi}}{R^{3k}} \\ - \frac{4\kappa_i^3}{3(Re)R^3} \left[ 1 + (R/\kappa_i)^3 \right] \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) u + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

bağıntısı ile bulunur. Son olarak  $\beta$  hacimsel kabarcık oranı ve  $\rho$  karışım yoğunluğu

$$\beta = 1 - \rho = \frac{R^3}{R^3 + \kappa_i^3} \quad (30)$$

bağıntılarıyla hesaplanır.

**Sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışlarının kararlılığı**

Bu bölümde, (23) ve (24) evrim denklemleri kullanılarak sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışları için model denklemlerin çözümlerinin zamana bağlı kararlılığı incelenecektir. Wang ve Brennen (1998) ile Delale ve diğerleri (2001), lüle geometrisi ve diğer parametreler sabit alınıp sadece bir parametrenin belirli bir aralıkta değiştirilmesi durumunda, sanki-bir-boyutlu lülelerde daimi akış çözümlerinin var olduğunu göstermişlerdir. Bu parametre, genellikle, giriş başlangıç hacimsel kabarcık oranı  $\beta_i$  veya

$$\sigma_i = \frac{p'_i - p'_v}{(1/2)\rho'_i u_i'^2} = \frac{1 - p_v}{(1/2)u_i'^2} \quad (31)$$

ile tanımlanan giriş başlangıç kavitasyon sayısı  $\sigma_i$  olarak seçilir. Burada  $u_i'$  ve  $u_i$ , sırasıyla, boyutlu ve boyutsuz lüle girişindeki akış hızlarıdır. Parametrelerden herhangi birinin belirli bir kritik değerinin altında ya da üzerinde değiştirilmesi durumunda daimi akış çözümlerinde kararsızlıklar görülür. Bu nedenle, daimi akış çözümlerinin var olduğu durumda, bu çözümlerin zamana bağlı kararlılığının incelenmesinde yarar vardır. Sanki-bir-boyutlu kavitasyonlu daimi lüle akışlarının zamana bağlı kararlılığını incelemek için önce daimi olmayan lüle akışı için elde (23) ve (24) evrim denklemlerine daimi akışlardaki  $\bar{u}(x)$  akış hızı ve  $\bar{R}(x)$  kabarcık yarıçapı alanları baz alınarak,

$$u = \bar{u}(x)[1 + \varepsilon w(x, t)] \quad (32)$$

$$R = \bar{R}(x)[1 + \varepsilon \phi(x, t)] \quad (33)$$

şeklinde zamanla değişen  $w$  ve  $\phi$  (her ikisi de  $O(1)$  mertebesinde) yerel pertürbasyonları uygulanır. (32) ve (33) denklemlerindeki  $\varepsilon > 0$  parametresi  $o(1)$  mertebesinde. Buradaki  $\bar{u}$  ve  $\bar{R}$  değişkenleri, daimi lüle akışı denklemlerinin çözümlerinden elde edilmiştir (Delale vd., 2001). (23) ve (24) evrim denklemlerine verilen pertürbasyonlar uygulanıp birtakım düzenlemeler yapıldığında  $w(x, t)$  ve  $\phi(x, t)$  için

$$A_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + A_5 \frac{\partial w}{\partial x} + A_6 \frac{\partial w}{\partial t} + A_7 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_8 w + A_9 \phi = 0 \quad (34)$$

$$C_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + C_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + C_5 \frac{\partial w}{\partial x} + C_6 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} + C_7 w + C_8 \phi = 0 \quad (35)$$

denklemleri elde edilir. (34) ve (35) denklemlerinde  $\lambda_i = (1 - \beta_i)u_i$  ve  $(\bar{u}A - \lambda_i) \neq 0$  olmak üzere

$$C_1 = \bar{u} \frac{A_1}{A_7}, C_2 = \bar{u} \frac{A_2}{A_7}, C_3 = \bar{u} \frac{A_3}{A_7}, C_4 = \bar{u} \frac{A_4}{A_7}, C_5 = \bar{u} \frac{A_5}{A_7} + \frac{\bar{u}^2 A}{3(\bar{u}A - \lambda_i)}, C_6 = \bar{u} \frac{A_6}{A_7}, C_7 = \bar{u} \frac{A_8}{A_7}, C_8 = \bar{u} \frac{A_9}{A_7} - \frac{\lambda_i}{\bar{u}A - \lambda_i} \left[ \frac{d\bar{u}}{dx} + \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \bar{u} \right] \quad (36)$$

biçimindedir ve  $A_j, j = 1, \dots, 9$  katsayıları Pasinlioğlu (2009)'da tanımlanmıştır. (34) ve (35) denklemlerindeki  $A_j, j = 1, \dots, 9$  ve  $C_j, j = 1, \dots, 8$  katsayıları, daimi akışlardaki  $\bar{u}(x)$  akış hızı (veya  $\bar{R}(x)$  kabarcık yarıçapı)  $A(x)$  lüle alanı ve türevlerinin fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

**Lüle giriş bölgesi için normal mod analizi**

Lülelerde en önemli bölgeler giriş ve boğaz bölgeleridir. Eğer verilen bir akış, lülenin giriş bölgesinde kararlı değilse, lülenin tamamında da kararlı olmayacaktır. Bu yüzden kararlılık problemi için lülenin önce giriş bölgesini incelemek gereklidir. (34) ve (35) denklemlerindeki  $A_j, j = 1, \dots, 9$  ve  $C_j, j = 1, \dots, 8$  katsayılarının, lülenin giriş bölgesinde hemen hemen sabit olduğu gösterilebilir (Pasinlioğlu, 2009). Dolayısıyla, zamana bağlı kararlılık problemini lüle giriş bölgesinde normal mod analizi yöntemiyle kesin olarak çözmek olasıdır.  $k$  pertürbasyon dalga sayısı,  $\omega$  açısal frekans,  $w$  ve  $\phi$ , sırasıyla, pertürbasyon akış hızı ve yarıçapı genliği olmak üzere (34) ve (35) denklemlerine

$$w = \hat{w} e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{ve} \quad \phi = \hat{\phi} e^{i(kx - \omega t)} \quad (37)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$L\omega^2 + M\omega + N = 0 \quad (38)$$

dispersiyon bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki (38) bağıntısında  $L$ ,  $M$  ve  $N$  katsayıları pertürbasyon dalga sayısı  $k$ 'nin karmaşık değerlikli fonksiyonları olup

$$L = L_R + iL_I = (A_6 - A_2k^2) + iA_4k \quad (39)$$

$$M = M_R + iM_I \\ = [(A_4C_8 - A_5 - A_9C_4 - A_7C_6)k + (A_1 + A_7C_2)k^3] + i[(A_8 - A_6C_8 + A_9C_6) + (A_2C_8 - A_3 - A_7C_4 - A_9C_2)k] \quad (40)$$

$$N = N_R + iN_I \\ = [(A_8C_8 - A_9C_7) + (A_7C_5 + A_9C_3 - A_5C_8)k^2 - A_7C_1k^4] + i[(A_5C_8 - A_7C_7 - A_9C_5)k + (A_7C_3 + A_9C_1 - A_1C_8)k^3] \quad (41)$$

olarak tanımlanır. Burada  $R$  ve  $I$  indisleri, sırasıyla, reel ve sanal kısımları göstermektedir. Zamana bağlı kararlılık için  $k$  dalga sayısı reel,  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  açısal frekansı da kompleks sayı olarak alınır. Sistemin kararlılığı için  $\omega_I$  sanal kısmı negatif olmalıdır. (38) dispersiyon bağıntısından  $\omega$  için 4. dereceden

$$\varepsilon_4\omega_I^4 + \varepsilon_3\omega_I^3 + \varepsilon_2\omega_I^2 + \varepsilon_1\omega_I + \varepsilon_0 = 0 \quad (42)$$

cebrik denklemi elde edilir. Buradaki  $\varepsilon_j$  katsayılarının  $k$ 'ya bağlı ifadeleri Pasinlioğlu (2009)'da tanımlanmıştır. Ayrıca  $\varepsilon_j$ ,  $j=0, \dots, 4$  katsayılarının  $k$ 'nin çift fonksiyonları olduğu ispatlanabilir. Bu yüzden (42) denklemi ile verilen  $\omega_I$ 'nin işaretini incelemek için yalnızca  $k > 0$  durumunu incelemek yeterli olacaktır. Bu  $k$  değerlerini bulmak için önce,  $k^2$ 'ye göre 5. dereceden bir polinom olan  $\varepsilon_0$ 'ın pozitif reel  $k_j$ ,  $j \leq 5$  kökleri bulunur ki bu  $k_j$ ,  $j \leq 5$  noktalarında  $\omega_I$  sıfırdır. Sonra  $\varepsilon_1 / \varepsilon_4$ 'ün işaretinin yardımıyla, her  $k_j$ ,  $j \leq 5$ 'in en yakın civarında  $\omega_I$ 'nin işareti bulunur. Daha sonra elde edilen bu  $k_j$  köklerinin fiziksel olanları belirlenir. Bunun için, lüle akış denklemlerindeki  $\mu'_{eff} / \mu'_c$  sö-

nüm katsayısı arttırılarak kararlı bölgenin artıp artmadığı incelenir. Eğer verilen bir kök için sönüm katsayısı arttırıldığında kararlı bölge genişliyorsa, bu kök fiziksel bir köktür. Böylece  $\omega_I$ 'nin işaretinden, sanki bir boyutlu kaviteyonlu daimi lüle akışlarının kararlı olduğu bölgeler belirlenir ve çeşitli akış parametreleri için kararlılık diyagramları elde edilir.

### Kararlılık diyagramları ve sonuçlar

Sayısal sonuçlar için su/su buharı-hava iki-fazlı sıvı/kabarcık karışımı ele alınmıştır. Kabarcıkların içindeki su buharı-hava gaz karışımının izotermal olarak genişlediği ve sıkıştırıldığı varsayılarak suyun sıcaklığı  $20^\circ\text{C}$  alınmıştır. Kabarcıkların içindeki kısmi buhar basıncı  $p'_v = 0.0234$  bar, yüzey gerilim katsayısı  $S' = 7.1 \times 10^{-2}$  N/m ve suyun viskozitesi  $\mu'_c = 10^{-3}$  kg/m-s olarak alınmıştır. Lüle giriş basıncı  $p'_i = 1.013$  bar değerinde sabit tutulmuştur. Geometrik özellikleri Şekil 1 ve Şekil 2'de gösterilen ve kesit alanı

$$A(x) = 1 - 0.25 \exp \left[ - \left( \frac{x - 150L}{30L} \right)^2 \right] \quad (43)$$

olan yakınsak-ıraksak bir lüle kullanılmıştır (Preston vd., 2002). Cidar kayma gerilmesi katsayısı  $C_w$ , türbülanslı akış durumunda (Ward ve Smith, 1980)

$$\frac{1}{C_w^{1/2}} = 1.768 \ln \left[ (\text{Re}_f) C_w^{1/2} \right] - 0.94 \quad (44)$$

kullanılarak hesaplanmıştır (ideal akış durumunda  $C_w = 0$  değerindedir). Buradaki  $\text{Re}_f$  Reynolds sayısı, (21) denklemi ile verilen  $\text{Re}$  Reynolds sayısı ile

$$\text{Re}_f = 2uA(\text{Re}) \frac{\mu'_{eff}}{\mu'_c} \quad (45)$$

bağıntısıyla ilişkilendirilebilir. Lüle giriş kabarcık yarıçapı  $R'_{i0} = 40 \mu\text{m}$  ve  $L = 8 \times 10^{-4}$  olarak



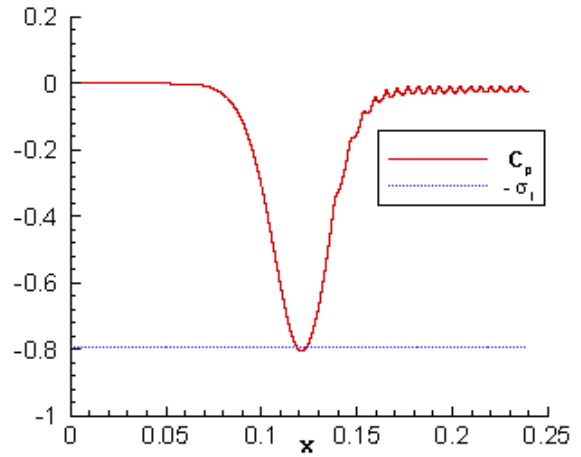
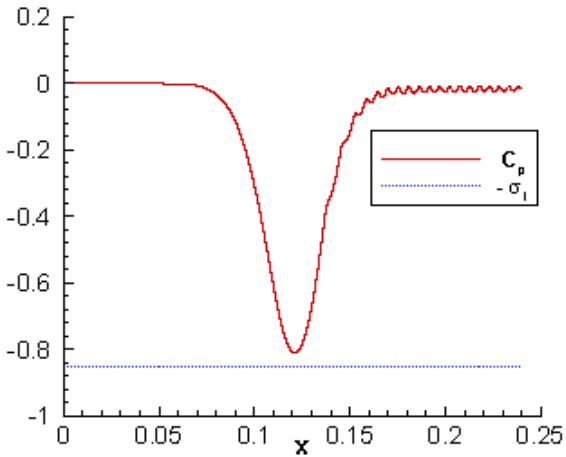
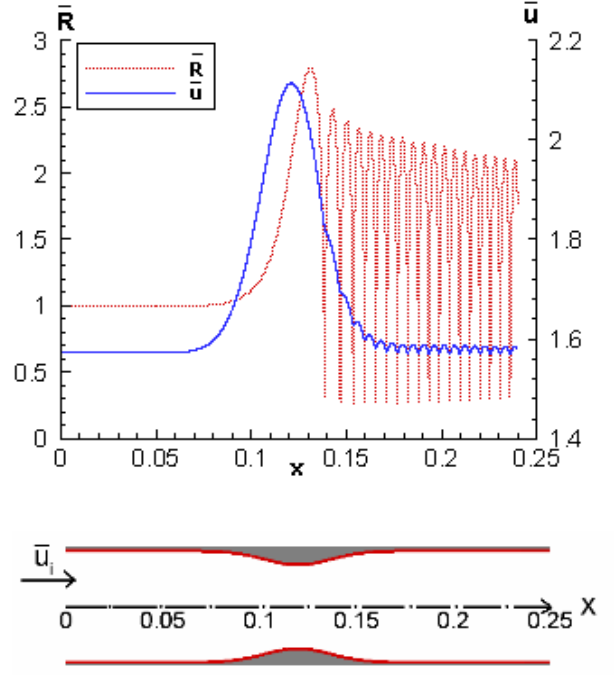
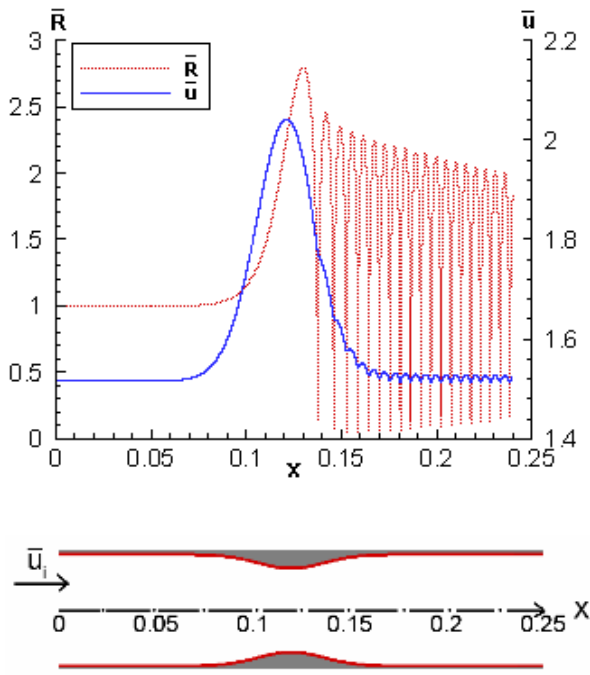
alınmıştır. Lüle girişinde kabarcık/kabarcık etkileşmesi ihmal edilebildiğinden, kabarcık/ kabarcık etkileşme parametresi  $\Lambda = 1$  varsayılmıştır. Hem ideal akış, hem de türbülanslı akış durumunda lüle giriş hacimsel kabarcık oranı  $\beta_i = 10^{-3}$  ve  $\sigma_i$  kavitasyon sayısı 0.7 ile 1.0 arasında değiştirilmiştir. Sanki-bir-boyutlu daimi lüle akışları için model denklemlerin çözümlerinin, ancak  $\sigma_i$  kavitasyon sayısının  $\sigma_{ic}$  kritik değeri üzerinde (ya da  $\beta_i$  lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının  $\beta_{ic}$  kritik değerinin altında) mevcut olduğu bilinmektedir (Wang ve Brennen, 1998; Delale vd. 2001). Yukarıda belirtilen koşullar altında ideal akış durumunda  $\mu'_{eff} / \mu_l = 1$  iken  $\sigma_{ic} = 0.78$ ,  $\mu'_{eff} / \mu_l = 30$  iken  $\sigma_{ic} = 0.72$ ; türbülanslı cidar kayma gerilmesi gözönüne alındığında  $\mu'_{eff} / \mu_l = 1$  iken  $\sigma_{ic} = 0.78$ ,  $\mu'_{eff} / \mu_l = 30$  iken  $\sigma_{ic} = 0.76$  olduğu sonucu bulunur. Daimi akışlardaki  $\bar{u}(x)$  akış hızı,  $\bar{R}(x)$  kabarcık yarıçapı ve  $C_p(x)$  basınç katsayısının kavitasyonsuz ( $\sigma_i > -(C_p)_{min}$ ) ve kavitasyonlu ( $\sigma_i < -(C_p)_{min}$ ) kabarcıklı akışlardaki değişimi, sırasıyla, Şekil 1 ve Şekil 2'de görülmektedir. Buradaki  $(C_p)_{min}$ , minimum basınç katsayısını göstermektedir (bu durumda türbülanslı cidar kayma gerilmesinin etkisi ihmal edilmiştir). Yapılan bu çalışmada, yukarıda belirtilen varsayımlar altında  $\varepsilon_0(k_j) = 0$  denklemi için üç adet  $k_j$  kökü bulunmuş ve bu  $k_j; j=1,2,3$  köklerinin ayırdığı bölgelerde  $\omega_j$ ' ların işaretleri incelenmiştir.

Ancak bulunan bu  $k_j; j=1,2,3$  değerleri için  $\omega_j$ ' nin işareti uyumlu olmamıştır. Yani (42) denkleminin köklerinde dallanmalar meydana gelmiştir. Bulunan bu  $k_j; j=1,2,3$  köklerinin fiziksel olanlarının belirlenmesi için, lüle akış denklemlerindeki  $\mu'_{eff} / \mu_l$  sönüm katsayısı arttırılarak kararlı bölgelerin genişleyip genişlemediği incelenmiştir. Sonuç olarak bu kritere göre sadece  $k_1 \ll 1$  ve  $k_3 \gg 1$  köklerinin fiziksel olduğu

bulunmuştur (Pasinlioğlu, 2009). Yapılan bu hesaplamalar sonucu elde edilen kararlılık bölgeleri, aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir. Şekil 3, yukarıda belirtilen koşullar altında  $\sigma_i$  kavitasyon sayısının ideal akış durumunda,  $k$  dalga sayısına karşı değişimini göstermektedir. Bu şekilden de açıkça görüldüğü gibi, burada kritik bir kavitasyon sayısının ( $\mu'_{eff} / \mu_l = 1.0$  için  $\sigma_{ic} = 0.76$ ,  $\mu'_{eff} / \mu_l = 30.0$  için  $\sigma_{ic} = 0.72$ ) altında daimi akış çözümlerinin olmadığı görülmektedir.

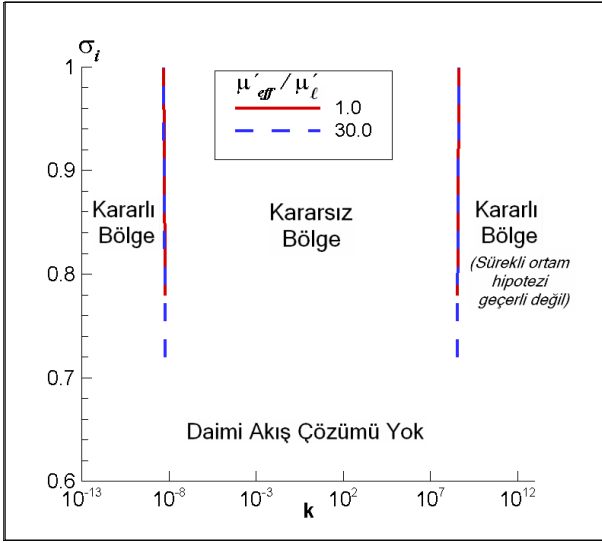
Kritik kavitasyon sayısının üzerinde elde edilen daimi akış çözümleri ise, pertürbasyonun yalnızca çok küçük dalga sayıları ya da çok büyük dalga sayıları için kararlı çözümler elde edilmiştir. Ancak çok büyük dalga sayıları için sürekli ortam hipotezi geçerli olmadığından, bu bölgenin kararlılığı da safdışı bırakılmıştır. Sönüm katsayısı  $\mu'_{eff} / \mu_l$  arttırıldığında kararlılık diyagramındaki kararlı bölgelerde, bu durumda, önemli bir değişim görülmemektedir. Ancak kritik kavitasyon sayısının değerinde değişim olmaktadır.

Şekil 4 türbülanslı durumda  $\sigma_i$  kavitasyon sayısının  $\mu'_{eff} / \mu_l$  sönüm katsayısının farklı değerleri için,  $k$  dalga sayısıyla değişimini göstermektedir. Türbülanslı durumda da sönüm katsayısının kararlılık bölgesine önemli bir etkisi görülmemektedir. Ancak kritik kavitasyon sayısının değerini değiştirmektedir. Bununla beraber türbülanslı cidar kayma gerilmesinin etkisi gözönüne alındığında, Şekil 5'te görüldüğü gibi kararlılık bölgesi genişlemektedir. Bu durumda türbülansın etkisi yalnızca daimi akış için türbülanslı cidar kayma gerilmesi olarak gözönüne alınmıştır ve türbülanslı akış çalkantılarının kararlılığa etkisi gözönünde bulundurulmamıştır. Fiziksel olarak kararlı daimi akış çözümleri çok küçük dalga sayıları için gözlenmiştir. Burada kararlı bölge, türbülanslı durumda genişlemektedir. Son olarak da kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin kararlılık bölgelerine etkisi incelenmiştir.

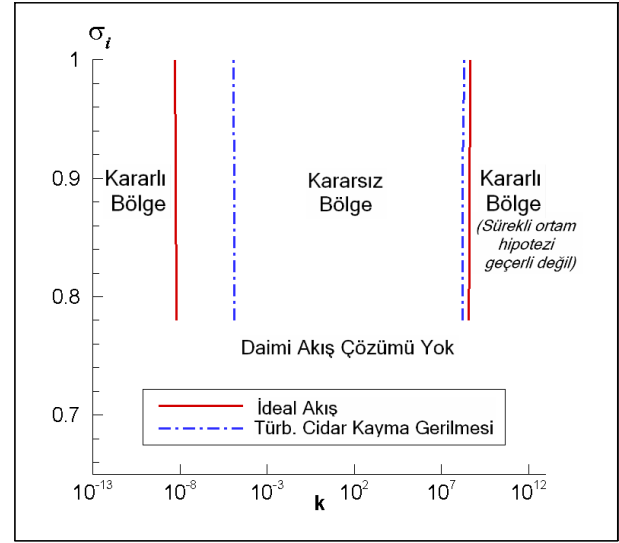


Şekil 1. Hava kabarcıkları içeren suyun daimi akışında kavitasyonsuz kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil) ve basınç katsayısının (alt şekil), (43) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri (burada sönüm katsayısı  $\mu'_{eff}/\mu'_i=1.0$ , kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi  $\Lambda=1.0$ , giriş kabarcık yarıçapı  $R'_i=40\mu m$ , mikrodan makroya ölçek oranı  $L=8\times 10^{-4}$ , giriş basıncı  $p'_i=1.013$  bar, giriş hacimsel kabarcık oranı  $\beta'_i=10^{-3}$  ve kavitasyon sayısı  $\sigma_i=0.85$  olarak alınmıştır)

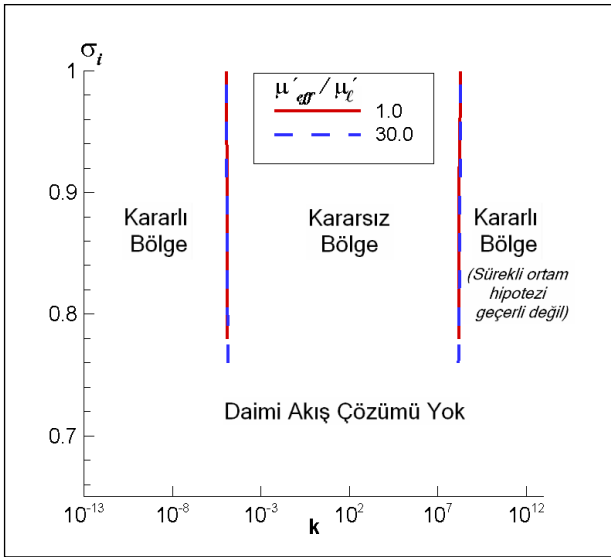
Şekil 2. Hava-su buharı içeren suyun daimi akışında kavitasyonlu kabarcık yarıçapı ve akış hızının (üst şekil), ve basınç katsayısının (alt şekil), (43) denklemiyle kesit alanı verilen lülenin (orta şekil) eksen koordinatı boyunca değişimleri (burada sönüm katsayısı  $\mu'_{eff}/\mu'_i=1.0$ , kabarcık/kabarcık etkileşim parametresi  $\Lambda=1.0$ , giriş kabarcık yarıçapı  $R'_i=40\mu m$ , mikrodan makroya ölçek oranı  $L=8\times 10^{-4}$ , giriş basıncı  $p'_i=1.013$  bar, giriş hacimsel kabarcık oranı  $\beta_i=10^{-3}$  ve kavitasyon sayısı  $\sigma_i=0.79$  olarak alınmıştır)



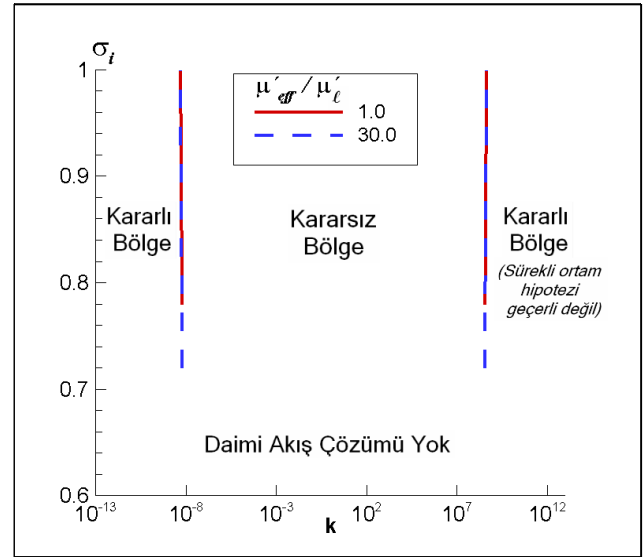
Şekil 3. Karışımın ideal akış durumunda sönüm katsayısının ( $\mu'_{eff}/\mu'_c$ ) farklı değerleri için (1.0 ve 30.0) lüle girişindeki kavitasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri



Şekil 5. Karışımın ideal akış ve türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı hallerde lüle girişindeki kavitasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri



Şekil 4. Karışımın türbülanslı cidar kayma gerilmesinin gözönüne alındığı durumda sönüm katsayısının ( $\mu'_{eff}/\mu'_c$ ) farklı değerleri (1.0 ve 30.0) için lüle girişindeki kavitasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri



Şekil 6. Karışımın ideal akış durumunda kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin ( $\Lambda$ ) farklı değerleri için (1.0 ve 10.0) lüle girişindeki kavitasyon sayısının ( $\sigma_i$ ) pertürbasyon dalga sayısı ( $k$ ) değişimi ve kararlılık bölgeleri

Şekil 6'da görüldüğü gibi kabarcık/kabarcık etkileşim parametresinin değişimiyle kararlılık bölgeleri üzerinde önemli bir değişim gözlenmemiştir. Sonuç olarak, elde edilen kararlılık

diyagramlarında, kavitasyon sayısının kritik bir değer altında (ya da lüle girişindeki hacimsel kabarcık oranının kritik bir değer üstünde) olduğu durumlarda, daimi akış çözümlerinin mev-

cut olmadığı görülmüştür. Daimi akış halinin mevcut olduğu hallerde, bu çözümlerin sadece çok küçük dalga sayıları için kararlı olduğu gözlemlenmiştir (aslında çok büyük dalga sayıları için de kararlı bölgeler bulunmuştur, ancak bu bölgelerde süreklilik hipotezi geçerliliğini yitirmektedir). Lüle giriş bölgesi için kararlılık diyagramlarındaki kararlı bölgeler, türbülanslı cidar kayma gerilmesi etkisiyle genişlemektedir.

## Kaynaklar

- Brennen, C.E., (2002). Fission of collapsing cavitating bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, **472**, 153-166.
- Brennen, C.E., (1995). *Cavitation and bubble dynamics*, Oxford University Press.
- d'Agostino, L., d'Auria, F. ve Brennen, C.E., (1997). On the inviscid stability of parallel bubbly flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **339**, 261-274.
- d'Agostino, L. ve Burzagli, F., (2000). On the stability of parallel bubbly cavitating flows, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **122**, 471-480.
- Delale, C.F., Schnerr, G.H. ve Sauer, J., (2001). Quasi-one-dimensional steady-state cavitating nozzle flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **427**, 167-204.
- Delale, C.F. ve Tunç, M., (2004). A bubble fission model for collapsing cavitation bubbles, *Physics of Fluids*, **16**, 4200-4203.
- Delale, C.F., Okita, K. ve Matsumoto, Y., (2005). Steady-state cavitating nozzle flows with nucleation, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **127**, 770-777.
- Delale, C.F., Schnerr, G.H. ve Pasinlioğlu, Ş., (2006). Model evolution equations for unsteady cavitating nozzle flows and their applications, VI. *International Symposium on Cavitation CAV2006*, Wageningen, The Netherlands, September 11-15, paper no:112. (CD Rom, ed. G. Kuiper).
- Franc, J.-P. ve Michel, J.-M., (2004). *Fundamentals of Cavitation*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Hammitt, F.G., (1980). *Cavitation and multiphase flow phenomena*, McGraw-Hill, New York.
- Ishii, R., Umeda, Y., Murata, S. ve Shishido, N., (1993). Bubbly flows through a converging-diverging nozzle, *Physics of Fluids*, A **5**, 1630-1643.
- Kubota, A., Kato, H. ve Yamaguchi, H., (1992). A numerical study of unsteady cavitation on a hydraulic section, *Journal of Fluid Mechanics*, **240**, 59-96.
- Kogarko, B.S., (1961). On a model of a cavitating liquid, *Soviet Physics-Doklady*, **6**, 4, 305-306.
- Pasinlioğlu, Ş., (2009). Kabarcıklı sıvılarda kavitasyonlu daimi lüle akışlarının kararlılığı ve soliton oluşumu, *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Plesset, M.S. ve Prosperetti, A., (1977). Bubble dynamics and cavitation, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **9**, 145-185.
- Preston, A., Colonius T. ve Brennen, C.E., (2002). A numerical investigation of unsteady bubbly cavitating nozzle flows, *Physics of Fluids*, **14**, 300-311.
- Prosperetti, A. ve Lezzi, A., (1986). Bubble dynamics in compressible liquid. Part 1. First-order theory, *Journal of Fluid Mechanics*, **168**, 457-478.
- Tangren, R.F., Dodge, C.H. ve Seifert, H.S., (1949). Compressibility effects in two-phase flow, *Journal of Applied Physics*, **20**, 637-645.
- van Wijngaarden, L., (1968). On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, **33**, 465-474.
- van Wijngaarden, L., (1972). One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **4**, 369-396.
- Wang, Y.C. ve Brennen, C.E., (1998). One-dimensional bubbly cavitating flows through a converging-diverging nozzle, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **120**, 166-170.
- Ward-Smith, A.J., (1980). *Internal Fluid Flow*, p.186, Clarendon Press.
- Young, F.R., (1989). *Cavitation*, McGraw-Hill, London.