

Parçacıklı viskoz akışkanla dolu lifli elastik tüplerde harmonik dalga yayılımı

Rahmiye ERGÜN*, Ali ERCENGİZ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada içerisinde akışkan bulunan öngerilmeli, elastik, sıkışmaz, lifli tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Kalın duvarlı olarak ele alınan elastik tüpün içerisinde sürekli liflerin bulunduğu varsayılmıştır. Akışkanın sıkışmaz, Newton akışkanı olduğu ve içerisinde parçacıklar bulundurduğu düşünülmüştür. Tüpün λ aksenal germesi ve sabit P_i iç basıncının etkisinde ve böylece radyal genleşme ve aksenal uzama ile ön şekildeğişimine uğramış olduğu kabul edilmiştir. Akışkana ait alan denklemler silindirik koordinatlarda ifade edilmiştir. Lifli elastik ortama ait yönetici denklemler, "Büyük başlangıç şekil değiştirmelerinin üzerine küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu" teorisi kullanılarak silindirik koordinatlarda elde edilmiştir. Uygulama açısından büyük öneme sahip olan, içi akışkanla dolu tüplerde dalga yayılması problemi, bu çalışmada kan damarlarındaki dalga yayılımı üzerinde incelenmiştir. Dalga yayılımına ait yönetici diferansiyel denklemlerin harmonik dalga çözümleri aksenal simetrik hareket durumu için ele alınmıştır. Akışkana ait diferansiyel denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olabilmiş, fakat tüpe ait alan denklemlerinin katsayılarının karmaşık bir şekilde radyal koordinatın fonksiyonu olmaları nedeniyle katı malzemeye ilişkin denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olamamıştır. Bu nedenle katı fazı yöneten diferansiyel denklemler ile sınır koşullarına ilişkin denklemlere, dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde etmek için sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözüm aranmıştır. Önce bazı özel durumlar incelenmiş, sonra ise ele alınan tüp için, uzun dalga yaklaşımında, dispersiyon bağıntısı elde edilmiş, dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Harmonik dalga yayılımı, lifli malzeme, parçacıklı akışkan, sonlu farklar yöntemi.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Rahmiye ERGÜN. rergun@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 89.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "İçerisinde parçacıklı viskoz akışkan bulunan öngerilmeli lifli viskoelastik kalın tüplerde harmonik dalga yayılımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 01.02.2008 tarihinde dergiye ulaşılmış, 03.04.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Propagation of harmonic waves in fiber elastic tubes filled with a viscous dusty fluid

Extended abstract

The problem of harmonic wave propagation in prestressed or stress free elastic or viscoelastic tubes filled or not filled with a viscous or an ideal fluid, became an interesting subject since the time of Thomas Young (1773-1829) who first obtained the speed of the pulse wave in arteries, and found important applications in many fields of engineering. The historical evolution of the subject can be found in the papers by Lambossy (1951) and Skalak (1966) and in the book by Fung (1984). In the present work, the problem that we consider is to investigate the pulsating wave propagation in large blood vessels. The importance of the present problem from the bioengineering point of view is that the wave speed and the transmission coefficient depend on the initial deformation and the material coefficients. The measurement of these parameters makes it possible to observe the variation of them with material properties. For the historical evolution of the subject the reader may refer to Morgan and Kiely (1954), Womersley (1957) who used the theory of small deformations, Atabek and Lew (1966) who were the first to introduce the effect of prestress, Mirsky (1967) who took into account the orthotropic properties of the arterial wall, Rachev (1980), Kuiken (1984) and Nayfeh (1966) who considered the blood as a two phase system consisting of plasma and blood cells and investigated the flow of the two phase flow in a rigid tube.

The fluid (blood) is taken as incompressible and viscous with dusty particles in it, and the governing equations of motion are obtained in the cylindrical coordinates. On the other hand, to obtain the equations of motion of the tube (artery) which is assumed to have elastic, fibrous and incompressible material, the theory of "superimposing small deformations on large static deformations" is employed and, the incremental equations of motion and incremental constitutive equations that characterize the arisen dynamical state are given. These equations are expressed in the cylindrical coordinates and the boundary conditions to be satisfied are given. Then, assuming that the cylindrical shell (artery) is under the effect of both constant, axial stretch and inner pressure (initial

equilibrium state), the incremental equations of the motion are given for this prestressed state.

The solutions of these incremental equations of motion both for fluid and solid phases are obtained for the axial symmetric motion. The closed form solutions to the differential equations of the fluid were accomplished but, because the coefficients of the field equations are complex functions of the radial coordinate, it could not be accomplished to obtain closed solutions to the equations of the solid phase. For this reason and to obtain the effect of the tube's thickness on the wave characteristics, numerical solutions with method of finite differences are sought to the equations and the corresponding boundary conditions that govern the solid phase. Then, in the long wave approximation, assuming that the thin tube filled with a non-viscous fluid is non prestressed, the dispersion relation is investigated, wave speeds and transmission coefficients are obtained. As the last, again in the long wave approximation, the dispersion relation for the thick walled prestressed elastic tube filled with a viscous fluid is obtained, the wave velocities and the transmission coefficients are computed and the results are given with graphs. The obtained results are in agreement with the results of Ercengiz (2005) and Nag and Jana (1981).

The obtained results reveal that the primary and the secondary wave speeds become higher with the increase of the fibre parameter of the tube's elastic material. On the other hand, the increase of the mass concentration of the dusty particles in the fluid decreases the primary wave velocity though only for the small values of the Womersley parameter, again decreases the secondary wave speed for all the values of the Womersley parameter. With the increase of the fiber parameter, while transmission coefficient for the primary wave increases, the transmission coefficient for the secondary wave decreases. The increase of the mass concentration of the dusty particles in the fluid decreases the transmission coefficients of both the primary and the secondary waves. The increase of the axial stretch increases the primary wave speed, but decreases the secondary wave speed and the transmission coefficient for the primary wave. The variation of the axial stretch doesn't change the transmission coefficient for the secondary wave.

Keywords: Propagation of harmonic waves, fibrous material, dusty fluid, finite differences method.

Giriş

İçi viskoz ya da viskoz olmayan akışkanla dolu öngerilmeli veya öngerilmemiş elastik veya viskoelastik tüpler içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemi, atardamarlarda puls dalgalarının hızını ilk elde eden kişi olan Thomas Young (1773-1829) zamanından beri ilgi çeken bir konu olmuş ve mühendisliğin birçok dalında önemli uygulama alanı bulmuştur. Konunun tarihsel gelişimi için Lambossy (1951) ve Skalak (1966) tarafından yazılmış makalelere ve Fung (1984) tarafından yazılmış kitaba bakılabilir. Söz edilen problem bu çalışmada büyük kan damarlarındaki pulsatif kan akımına ilişkin dalga yayılımının incelenmesi şeklinde ele alınmıştır.

Konuya tarihsel gelişim süreci içinde katkısı bulunan çalışmalar arasında Morgan ve Kiely (1954), küçük şekil değiştirmeler teorisini kullanan Womersley (1957), ön gerilmenin etkisini ilk ortaya atan Atabek ve Lew (1966), Mirsky (1967), Rachev (1980), Kuiken (1984) ve kan plazma ve kan hücrelerinden oluşan bir ikili sistem olarak ele alan ve rijit bir tüpte iki fazlı akışkanın salınımını inceleyen Nayfeh (1966) sayılabilir.

Bu çalışmada viskoz, sıkışmaz, iki fazlı (parçacıklı) akışkanla dolu, öngerilmeli, lifli, kalın duvarlı, sıkışmaz, elastik tüpte dalga yayılımı problemi sonlu farklar yöntemi ile incelenmiştir.

Parçacıklı akışkana ilişkin denklemler

Çalışmada viskoz ve sıkışmaz Newtonyen olarak göz önüne alınan akışkanın (kanın) parçacıklar içerdiği ve bir P_i büyük statik ön basıncının etkisinde kaldığı varsayılmıştır. Bunun yanı sıra akışkanın hareketi sırasında küçük hız ve basınç artımlarının bu başlangıç alanına eklendiği düşünülmüştür. Sıfır başlangıç hızıyla, kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda ve eksenel simetrik hareket için silindirik koordinatlarda alan denklemleri aşağıdaki şekilde bulunur (Ercengiz, 2005):

Burada (\hat{u}, \hat{w}) ve (\hat{u}_s, \hat{w}_s) , sırasıyla akışkan ve parçacıkların radyal ve aksenal doğrultudaki hız bileşenleridir. \hat{p} basıncı, $\hat{\mu}$ viskoziteyi, φ karışımın her bir birim hacminde bulunan parça-

cıkların oluşturduğu hacmi, ρ_0 akışkanın yoğunluğunu, m bir parçacığın kütlesini, N birim hacimdeki parçacıkların sayısını göstermektedir. τ gevşeme zamanıdır ve $\tau = m/K$, $K = 6\pi\hat{\mu}a$ olup a parçacıkların yarıçapıdır.

$$(1-\varphi)\rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1-\varphi) \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{u}_s - \hat{u}), \quad (1)$$

$$(1-\varphi)\rho_0 \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = (1-\varphi) \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{w}_s - \hat{w}), \quad (2)$$

$$Nm \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = \varphi \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{u} - \hat{u}_s), \quad (3)$$

$$Nm \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial t} = \varphi \left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau} (\hat{w} - \hat{w}_s) \quad (4)$$

Akışkanın sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

ile verilmektedir. Sınır koşullarında kullanılacak olan gerilme bileşenleri

$$\hat{t}_{rr} = -\hat{p} + 2\hat{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \quad \hat{t}_{rz} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right) \quad (6)$$

ile verilir.

Tüp malzemesi için denklemler

Tüp malzemesi sıkışmaz, elastik, kalın duvarlı ve lifli yapıda varsayılmıştır. Silindirik tüp bir statik P_i iç basıncı ve sabit λ gerilmesi etkisinde kaldığında cisimde t_{kl}^0 başlangıç gerilme alanı olu-

şacaktır. Ele alınan tüp için, Σ şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu \mathbf{C} Green şekil değiştirme tansörünün yanı sıra malzemenin lifli yapısını gösteren lifler doğrultusunda birim vektörler olan \mathbf{a}_{01} ve \mathbf{a}_{02} nin de fonksiyonu olacaktır. Σ fonksiyonu,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

olmak üzere

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr } \mathbf{C}, \quad (8a)$$

$$I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_1, \quad I_6(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_2 \quad (8b)$$

invariantlarının fonksiyonu olarak

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \Sigma_{izo}(I_1) + \Sigma_{anizo}(I_4, I_6) \quad (9)$$

şeklinde alınabilir (Holzapfel vd., 2000). Burada

$$\mathbf{a}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \hat{\beta} \\ \sin \hat{\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \hat{\beta} \\ -\sin \hat{\beta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

olarak alınmıştır ve $\hat{\beta}$ liflerin doğrultusunun tüp eksenine dik olan doğrultu ile yaptığı açıdır. Ele alınan cisim için bünye bağıntısı Demiray (1994) ten yararlanarak

$$t_{kl}^0 = \bar{P}^0 \delta_{kl} + 2 \left(c_{kl}^{-10} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1^0} + d_{1kl}^0 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4^0} + d_{2kl}^0 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6^0} \right) \quad (11)$$

şeklinde elde edilir. Burada \bar{P}^0 hidrostatik basınç terimi, c_{kl}^{-10} başlangıç statik şekil değişimi durumundaki Finger şekil değiştirme tansörü ve I_1^0 , c_{kl}^{-10} tansörünün tanımı (8a) ile verilen birinci invariantıdır. I_4^0 ve I_6^0 ifadeleri ise ifadeleri (8b) ile verilen invariantlardır. Ayrıca \mathbf{d}_1^0 ve \mathbf{d}_2^0 tansörleri de

$$\mathbf{d}_1^0 = \mathbf{F} \mathbf{A}_1 \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{d}_2^0 = \mathbf{F} \mathbf{A}_2 \mathbf{F}^T \quad (12)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada \mathbf{F} şekil değiştirme gradyanı tansörüdür. Bu çalışmada, izotrop şekil değiştirme için, biyolojik yumuşak dokular için Demiray (1972) tarafından önerilen, anizotrop şekil değiştirme için ise Holzapfel ve diğerleri (2000) tarafından önerilen ve bünyesinde kolajen liflerin bulunduğu durumu yansıtmakta olan şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları kullanılmıştır:

$$\Sigma_{izo}(I_1) = \frac{\beta}{2\alpha} \left\{ \exp[\alpha(I_1 - 3)] - 1 \right\}, \quad (13a)$$

$$\Sigma_{anizo}(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1 \right\}. \quad (13b)$$

Burada α , β , k_1 ve k_2 malzeme sabitleridir. Kütle kuvvetlerinin sıfır olduğu durum için denge denklemlerinin ve damarın iç ve dış yüzeyinde sağlanması gereken sınır koşullarının kullanılmasıyla

$$t_{rr}^0 = \frac{\beta}{\lambda^2} \int_{x_d}^x \left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta} \right) F_1(\zeta) d\zeta + 4k_1 \cos^2 \hat{\beta} \int_{x_d}^x \frac{1}{\zeta(\lambda - \zeta^2)} \times \left(\frac{1}{\zeta^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

elde edilir. Diğer gerilme bileşenleri ve \bar{P}^0 hidrostatik basınç terimi de

$$t_{\theta\theta}^0 = t_{rr}^0 + \frac{\beta}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda^2}{x^2} - x^2 \right) F_1(x) \quad (15a)$$

$$+ 4k_1 \cos^2 \hat{\beta} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(x),$$

$$t_{zz}^0 = t_{rr}^0 + \frac{\beta}{\lambda^2} (\lambda^4 - x^2) F_1(x) \quad (15b)$$

$$+ 4\lambda^2 k_1 \sin^2 \hat{\beta} \left(\frac{1}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(x)$$

$$\bar{P}^0 = t_{rr}^0 - \frac{\beta}{\lambda^2} x^2 F_1(x) \quad (15c)$$

şeklinde bulunur. İç basınç ifadesi ise

$$P_i = \frac{\beta}{\lambda^2} \int_{x_i}^{x_d} \left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta} \right) F_1(\zeta) d\zeta + 4k_1 \cos^2 \hat{\beta} \int_{x_i}^{x_d} \frac{1}{\zeta (\lambda - \zeta^2)} d\zeta + \left(\frac{1}{\zeta^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} - 1 \right) F_2(\zeta) d\zeta \quad (16)$$

şeklinde elde edilir. Burada invaryantlar

$$I_1^0 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{1}{x^2} + \lambda^2, \quad (17a)$$

$$I_4^0 = I_6^0 = \tilde{I} = \frac{1}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2 \hat{\beta} \quad (17b)$$

olmak üzere

$$F_1(x) = \exp[\alpha(I_1^0 - 3)], \quad (18)$$

$$F_2(x) = \exp[k_2(\tilde{I} - 1)^2]$$

şeklinde dir. Verilmiş olan bu başlangıç alanının üzerine küçük artımsal şekil değiştirmeler süperpoze edildiğinde alan denklemleri kütle kuvvetlerinin sıfır olduğu durum için (Eringen ve Şuhubi, 1974)

$$\bar{T}_{;k}^{kl} = \rho \frac{\partial^2 u^l}{\partial t^2} \quad (19)$$

olarak verilmektedir. Burada ρ ile tüp malzemesinin yoğunluğu, \bar{T}^{kl} ile artımsal Piola-Kirchhoff tansörü bileşenleri ve u^l ile de yer değiştirme vektörü bileşenleri gösterilmektedir. Artımsal Piola-Kirchhoff tansörü

$$\bar{T}^{kl} = t^{0km} u_{;m}^l + \tilde{t}_{kl} \quad (20)$$

ile verilmektedir. Burada \tilde{t}_{kl} artımsal Cauchy gerilme tansörü olup ele alınan durum için

$$\tilde{t}_{kl} = \bar{p} \delta_{kl} - 2\bar{P}^0 \tilde{e}_{kl} + [2\alpha\beta c_{kl}^{-10} c_{mn}^{-10} \tilde{e}_{mn}] \exp[\alpha(I_1^0 - 3)] + [4k_1 + 8k_1 k_2 (I_4^0 - 1)^2] \exp[k_2 (I_4^0 - 1)^2] d_{1rs}^0 d_{1kl}^0 \tilde{e}_{rs} + [4k_1 + 8k_1 k_2 (I_6^0 - 1)^2] \exp[k_2 (I_6^0 - 1)^2] d_{2rs}^0 d_{2kl}^0 \tilde{e}_{rs} \quad (21)$$

şeklinde hesaplanır. \bar{p} artımsal hidrostatik basıncı göstermektedir. \tilde{e}_{kl} sonsuz küçük birim şekil değiştirme tansörüdür. Elastik cismin sıkışmazlık koşulu da

$$u^k_{;k} = 0 \quad (22)$$

denklemleri ile ifade edilebilir. Artımsal alanı tamamen belirleyebilmek için (19-21) denklemleri $\bar{T}_{kl} n_k = \bar{t}_l - \tilde{e}_{(n)} t_l^0$, S üzerinde,

$$e_{(n)} = e_{ij} n_i n_j \quad (23)$$

sınır koşulları ile sağlanmalıdır. Burada \mathbf{n} , katı cismin S yüzeyi üzerindeki birim dış normal vektör, t_l^0 ise başlangıç konumunda \mathbf{n} vektörü doğrultusundaki alan elemanına etkileyen gerilme vektörü olup

$$t_l^0 = t_{kl}^0 n_k \quad (24)$$

ile verilmiştir. \bar{t}_l ise \mathbf{n} vektörü doğrultusundaki alan elemanına etkileyen artımsal gerilme vektörüdür. \bar{t}_{kl} artımsal gerilme tansörü

$$\bar{t}_{kl} = t_{km}^0 u_{l,m} + t_{ml}^0 u_{k,m} + \tilde{t}_{kl} \quad (25)$$

ile verilir. Eksenel simetrik artımsal hareket göz önüne alındığında $u_1 = u(r, z, t)$, $u_2 = 0$, $u_3 = w(r, z, t)$ olur. Burada u ve w sırasıyla radyal ve eksenel doğrultulardaki yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. Bu durumda (21) den silindirik koordinatlarda Cauchy artımsal gerilme tansörü bileşenleri

$$\tilde{t}_{rr} = \bar{p} + 2 \left(\bar{\alpha}_1 \frac{u}{r} + \bar{\alpha}_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \bar{\alpha}_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (26)$$

$$\tilde{t}_{\theta\theta} = \bar{p} + 2 \left((\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5) \frac{u}{r} + \bar{\alpha}_1 \frac{\partial u}{\partial r} + (\bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_7) \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (27)$$

$$\tilde{t}_{zz} = \bar{p} + 2 \left((\bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_7) \frac{u}{r} + \bar{\alpha}_3 \frac{\partial u}{\partial r} + (\bar{\alpha}_8 + \bar{\alpha}_9) \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (28)$$

$$\tilde{t}_{rz} = \tilde{t}_{zr} = -\bar{P}^0 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (29)$$

$$\tilde{t}_{\theta z} = \tilde{t}_{z\theta} = 0, \quad \tilde{t}_{r\theta} = \tilde{t}_{\theta r} = 0 \quad (30)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \alpha\beta F_1(x) \frac{1}{\lambda^2}, \quad \bar{\alpha}_2 = -\bar{P}^0 + \alpha\beta F_1(x) \frac{x^4}{\lambda^4} \\ \bar{\alpha}_3 &= \alpha\beta F_1(x)x^2, \quad \bar{\alpha}_4 = \alpha\beta F_1(x) \frac{1}{x^4} - \bar{P}^0, \\ \bar{\alpha}_5 &= [4k_1 + 8k_1k_2(\tilde{I} - 1)^2] F_2(x) \frac{\cos^4 \hat{\beta}}{x^4}, \quad (31) \\ \bar{\alpha}_6 &= \alpha\beta F_1(x) \frac{\lambda^2}{x^2}, \quad \bar{\alpha}_8 = -\bar{P}^0 + \alpha\beta F_1(x)\lambda^4, \\ \bar{\alpha}_7 &= [4k_1 + 8k_1k_2(\tilde{I} - 1)^2] F_2(x) \frac{\lambda^2}{x^2} \cos^2 \hat{\beta} \sin^2 \hat{\beta}, \\ \bar{\alpha}_9 &= [4k_1 + 8k_1k_2(\tilde{I} - 1)^2] F_2(x)\lambda^4 \sin^4 \hat{\beta} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Artımsal Piola-Kirchhoff tansörünün bileşenleri ise (20)'den

$$\begin{aligned} \bar{T}_{rr} &= \tilde{t}_{rr} + t_{rr}^0 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \bar{T}_{\theta\theta} = \tilde{t}_{\theta\theta} + t_{\theta\theta}^0 \frac{u}{r}, \\ \bar{T}_{zz} &= \tilde{t}_{zz} + t_{zz}^0 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \bar{T}_{rz} = \tilde{t}_{rz} + t_{rz}^0 \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (32) \\ \bar{T}_{zr} &= \tilde{t}_{zr} + t_{zr}^0 \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \bar{T}_{r\theta} = \bar{T}_{\theta r} = \bar{T}_{\theta z} = \bar{T}_{z\theta} = 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (19) ile verilen yönetici diferansiyel denklemler ele alınan durum için

$$\frac{\partial \bar{T}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\bar{T}_{rr} - \bar{T}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \bar{T}_{zr}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{T}_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \bar{T}_{rz} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (34)$$

şeklini alır. (26-30) ve (32) ifadelerinin (33-34) te kullanılması ve (22) sıkışmazlık koşuluyla desteklenmesiyle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \bar{\beta}_1(r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \bar{\beta}_2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \bar{\beta}_3(r) \frac{u}{r^2} \\ + \bar{\beta}_4(r) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\beta}_5(r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \bar{\beta}_6(r) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \bar{\beta}_7(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \bar{\beta}_8(r) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (36) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada kullanılmış olan $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_8$ katsayıları ise aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \bar{P}^0 + t_{rr}^0 + 2(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3), \\ \bar{\beta}_2 &= \bar{P}^0 + t_{\theta\theta}^0 + \frac{d}{dr} [2r(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3)] \\ &\quad + 2(\bar{\alpha}_6 - \bar{\alpha}_3) + 2\bar{\alpha}_7, \\ \bar{\beta}_3 &= -\bar{P}^0 - t_{\theta\theta}^0 - 2(\bar{\alpha}_4 - \bar{\alpha}_6) - 2(\bar{\alpha}_5 - \bar{\alpha}_7) \\ &\quad + 2r \frac{d}{dr} (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_3), \\ \bar{\beta}_4 &= t_{zz}^0 - \bar{P}^0, \quad \bar{\beta}_5 = t_{rr}^0 - \bar{P}^0, \quad (37) \\ \bar{\beta}_6 &= t_{\theta\theta}^0 - \frac{d}{dr} (r\bar{P}^0), \\ \bar{\beta}_7 &= -r \frac{d\bar{P}^0}{dr} + 2(\bar{\alpha}_6 + \bar{\alpha}_7) - 2\bar{\alpha}_3, \\ \bar{\beta}_8 &= 2(\bar{\alpha}_8 + \bar{\alpha}_9) + t_{zz}^0 + \bar{P}^0 - 2\bar{\alpha}_3. \end{aligned}$$

Bu denklemler (23) ile verilen ve ele alınan durum için

$$\bar{T}_{rr} |_{r=r_i} = (\hat{t}_{rr} - t_{rr}^0 \frac{\partial u}{\partial r}) |_{r=r_i}, \quad \bar{T}_{rz} |_{r=r_i} = \hat{t}_{rz} |_{r=r_i}, \quad (38)$$

$$\bar{T}_{rr} |_{r=r_d} = 0, \quad \bar{T}_{rz} |_{r=r_d} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{u} \Big|_{r=r_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{w} \Big|_{r=r_i} \quad (40)$$

şeklinde yazılan sınır koşullarını sağlamalıdır.

Alan denklemlerinin çözümü

Alan denklemlerine harmonik dalga çözümü aranacağı için

$$(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}) = [\hat{U}(r), \hat{W}(r), \hat{P}(r)] \exp[i(\omega t - kz)] \quad (41)$$

$$(\hat{u}_s, \hat{w}_s) = [\hat{U}_s(r), \hat{W}_s(r)] \exp[i(\omega t - kz)] \quad (42)$$

$$(u, w, \bar{p}) = [\bar{U}(r), \bar{W}(r), \bar{P}(r)] \exp[i(\omega t - kz)] \quad (43)$$

olarak alınmıştır. Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını, $\hat{U}(r)$, $\hat{W}(r)$, $\hat{P}(r)$, $\hat{U}_s(r)$, $\hat{W}_s(r)$, $\bar{U}(r)$, $\bar{W}(r)$ ve $\bar{P}(r)$ ise dalga genliklerini göstermektedir. (41) ve (42) nin (1-4) te kullanılmasıyla \hat{U} , \hat{W} , \hat{P} , \hat{U}_s , \hat{W}_s için

$$\hat{U}(r) = \frac{k}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_1(kr) A_0 + \frac{ik}{s} J_1(sr) B_0 \quad (44)$$

$$\hat{W}(r) = -\frac{ik}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_0(kr) A_0 + J_0(sr) B_0 \quad (45)$$

$$\hat{U}_s = l^2 \hat{U}, \quad \hat{W}_s = l^2 \hat{W}, \quad \hat{P}(r) = I_0(kr) A_0 \quad (46)$$

sonuçları elde edilir. Bu ifadelerdeki $J_n(sr)$ ve $I_n(kr)$ fonksiyonları sırasıyla, n . mertebeden birinci tür Bessel ve modifiye Bessel fonksiyonları olup

$$f = \frac{Nm}{\rho_0}, \quad \nu = \frac{\hat{\mu}}{\rho_0}, \quad l^2 = \frac{f + \varphi(1-\varphi)i\omega\tau}{f[1+(1-\varphi)i\omega\tau]}, \quad (47)$$

$$s^2 = -k^2 - \frac{i\omega[(1+i\omega\tau)(1-\varphi)+f]}{\nu i\omega\tau(1-\varphi)+1}$$

şeklinde (A_0 ve B_0 integral sabitleridir). (44-46)'nın (6)'da yerleştirilmesiyle sınır koşullarında kullanılacak gerilme bileşenleri

$$\hat{t}_{rr} = \left\{ \left[-I_0(kr) + \frac{2k}{r(k^2 + s^2)} (-I_1(kr) + krI_0(kr)) \right] A_0 \right.$$

$$\left. + \frac{2i\hat{\mu}k}{sr} (-J_1(sr) + srJ_0(sr)) B_0 \right\} \times \exp[i(\omega t - kz)], \quad (48)$$

$$\hat{t}_{rz} = \left\{ -\frac{2ik^2}{(k^2 + s^2)} I_1(kr) A_0 - \frac{\hat{\mu}}{s} (s^2 - k^2) J_1(sr) B_0 \right\} \times \exp[i(\omega t - kz)] \quad (49)$$

şeklinde bulunur. (43) ifadesi (35-36) ve (22) denklemlerinde kullanıldığında

$$\frac{dP}{d\xi} + \beta_1 \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{\beta_2}{\xi} \frac{dU}{d\xi} + \left[\frac{\beta_3}{\xi^2} + (\Omega^2 - \beta_4\eta^2) \frac{1}{\bar{x}^2} \right] U = 0, \quad (50)$$

$$-i\eta P \frac{1}{\bar{x}} + \beta_5 \frac{d^2W}{d\xi^2} + \frac{\beta_6}{\xi} \frac{dW}{d\xi} - i\eta \frac{1}{\bar{x}\xi} \beta_7 U + \frac{1}{\bar{x}^2} (\Omega^2 - \beta_8\eta^2) W = 0 \quad (51)$$

$$\frac{dU}{d\xi} + \frac{U}{\xi} - i\eta \frac{1}{\bar{x}} W = 0 \quad (52)$$

kısmi türevli diferansiyel denklem takımına ulaşılır. Burada

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{r}U, \quad \bar{W} = \bar{r}W, \quad \bar{P} = \beta P, \\ \eta &= k\bar{R}, \quad \bar{\beta}_j = \beta\beta_j, \quad j=1,\dots,8, \\ r &= \bar{r}\xi, \quad \omega = c_0\Omega/\bar{R}, \quad c_0 = \sqrt{\beta/\rho}\end{aligned}\quad (53)$$

şeklinde tanımlamalarla boyutsuzlaştırma yapılmış olup

$$\bar{r} = (r_i + r_d)/2, \quad \bar{R} = (R_i + R_d)/2, \quad \bar{x} = \bar{R}/\bar{r} \quad (54)$$

şeklinde. Burada R_i ve R_d damarın ön şekil değişiminden önceki, r_i ve r_d ise ön şekil değişiminden sonraki, sırasıyla iç ve dış yarıçaplarını göstermektedir. (38-40) sınır koşulları ise, (43) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned}\left[P + 2(\alpha_1 - \alpha_3)\frac{U}{\xi} + (\beta_1 + \beta_5)\frac{dU}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} \\ - \left[\frac{\bar{f}(\xi_i)}{\eta} + \frac{2\eta\bar{x}}{(\eta^2 + \gamma^2)\xi_i} \left(\frac{\bar{f}(\xi_i)\xi_i}{\bar{x}} - 1 \right) \right] A \\ + \left[\frac{2i\eta}{\gamma\xi_i} \left(1 - \frac{\bar{g}(\xi_i)\xi_i}{\bar{x}} \right) \right] B = 0, \quad (55)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\beta_5 \frac{dW}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_i} + \left[\frac{\eta}{\bar{x}} iP^0U \right]_{\xi=\xi_i} + \frac{2i\eta^2}{\eta^2 + \gamma^2} A \\ + \frac{\gamma^2 - \eta^2}{\gamma} B = 0, \quad (56)\end{aligned}$$

$$\left[P + 2(\alpha_1 - \alpha_3)\frac{U}{\xi} + (\beta_1 - P^0)\frac{dU}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_d} = 0, \quad (57)$$

$$\left[\beta_5 \frac{dW}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_d} + \left[\frac{\eta}{\bar{x}} iP^0U \right]_{\xi=\xi_d} = 0, \quad (58)$$

$$i\frac{\Omega^2}{\bar{x}^2}U(\xi_i) - \frac{\eta q\bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2)\bar{x}}A - \frac{i\eta q\bar{\alpha}^2}{\gamma\bar{x}}B = 0, \quad (59)$$

$$i\frac{\Omega^2}{\bar{x}^2}W(\xi_i) + \frac{i\bar{f}(\xi_i)q\bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2)\bar{x}}A - \frac{\bar{g}(\xi_i)q\bar{\alpha}^2}{\gamma\bar{x}}B = 0 \quad (60)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}A &= \frac{A_0}{\beta} I_1(\eta\xi_i/\bar{x}), \quad B = \frac{B_0\hat{\mu}}{\beta\bar{R}} J_1(\gamma\xi_i/\bar{x}), \\ \bar{f}(\xi) &= \frac{\eta I_0(\eta\xi/\bar{x})}{I_1(\eta\xi/\bar{x})}, \quad \bar{g}(\xi) = \frac{\gamma J_0(\gamma\xi/\bar{x})}{J_1(\gamma\xi/\bar{x})}\end{aligned}\quad (61)$$

şeklinde ve

$$\begin{aligned}\gamma &= s\bar{R}, \quad q = \rho/\rho_0, \quad \bar{\alpha}^2 = \omega\bar{R}^2/\nu, \\ \bar{\alpha}_1 &= \beta\alpha_1, \quad \bar{\alpha}_3 = \beta\alpha_3, \quad \bar{P}^0 = \beta P^0, \\ r_i &= \bar{r}\xi_i, \quad r_d = \bar{r}\xi_d\end{aligned}\quad (62)$$

tanımlamalarıyla boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Burada tanımlanan $\bar{\alpha}$ büyüklüğü Womersley parametresi olarak bilinir.

$$\phi(\xi) = \int_0^\xi \zeta W(\zeta) d\zeta \quad (63)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlandığında (52)'den

$$U(\xi) = \frac{i\eta}{\xi\bar{x}}\phi(\xi), \quad W(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{d\phi}{d\xi} \quad (64)$$

olarak ifade edilebilirler. Bunların (50-51) ve (55-60)'ta yerlerine yazılmasıyla bulunan denklem sisteminin analitik çözümünü elde etmek genellikle mümkün değildir. Dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde edebilmek için denklemlerin çözümü sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak aranacaktır (Ercengiz, 2005). Sonlu farklar yöntemini uygulayabilmek için tüp kalınlığı $\bar{h} = r_d - r_i$, n eşit aralığa bölünür. Böylece, ξ_j tüp kalınlığını gösteren uzunluk üzerindeki düğüm noktalarını göstermek üzere

$$\begin{aligned}\xi_j &= \xi_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n \\ \xi_0 &= \xi_i = 1 - \frac{nh}{2}, \quad \xi_n = \xi_d, \quad h = \frac{\bar{h}}{nr}\end{aligned}\quad (65)$$

yazılabilir. Bir ξ_j noktasında fonksiyonun değeri j alt indisi ile gösterildiğinde ve uygun sonlu

fark ifadeleri kullanıldığında (50-51) ve (55-60) denklemlerinden

$$h(P_{j+1} - P_j) + \beta_{1j} \frac{i\eta}{\bar{x}\xi_j} \phi_{j+2} + \frac{i\eta}{\bar{x}} z_{1j} \phi_{j+1} + \frac{i\eta}{\bar{x}} \left[z_{2j} + h^2 (\Omega^2 - \beta_{4j} \eta^2) \frac{1}{\bar{x}^2 \xi_j} \right] \phi_j = 0, \quad (66)$$

$$-i\eta P_j \frac{h^3}{\bar{x}} + \beta_{5j} \frac{1}{\xi_j} \phi_{j+3} + z_{3j} \phi_{j+2} + \left[z_{4j} + \frac{h^2}{\bar{x}^2} (\Omega^2 - \beta_{8j} \eta^2) \frac{1}{\xi_j} \right] \phi_{j+1} + \left[z_{5j} - \frac{h^2}{\bar{x}^2} (\Omega^2 - \beta_{8j} \eta^2) \frac{1}{\xi_j} \right] \phi_j = 0, \quad (67)$$

$$P_0 + (\beta_{10} + \beta_{50}) \frac{i\eta}{\xi_0 \bar{x} h} \phi_1 + \left[\frac{2(\alpha_{10} - \alpha_{30})}{\xi_0} - (\beta_{10} + \beta_{50}) \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{h} \right) \right] \frac{i\eta}{\xi_0} \phi_0 - \left[-\frac{\bar{f}(\xi_0)}{\eta} + \frac{2\eta \bar{x}}{(\eta^2 + \gamma^2) \xi_0} \left(\frac{\bar{f}(\xi_0) \xi_0}{\bar{x}} - 1 \right) \right] A + \left[\frac{2i\eta}{\gamma \xi_0} \left(1 - \frac{\bar{g}(\xi_0) \xi_0}{\bar{x}} \right) \right] B = 0, \quad (68)$$

$$\frac{1}{\xi_0} \beta_{50} \phi_2 - \frac{\beta_{50}}{\xi_0} \left(\frac{h}{\xi_0} + 2 \right) \phi_1 + \frac{1}{\xi_0} \left[\frac{\beta_{50}}{\xi_0} h + \beta_{50} - \frac{\eta^2}{\bar{x}^2} P_0^0 h^2 \right] \phi_0 + \frac{2i\eta^2 h^2}{\eta^2 + \gamma^2} A + \frac{(\gamma^2 - \eta^2) h^2}{\gamma} B = 0, \quad (69)$$

$$P_n + (\beta_{1n} - P_n^0) \frac{i\eta}{\xi_n \bar{x}} \phi_{n+1} + \left[-(\beta_{1n} - P_n^0) \frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{h} (\beta_{1n} - P_n^0) + 2 \frac{\alpha_{1n} - \alpha_{3n}}{\xi_n} \right] \frac{i\eta}{\xi_n \bar{x}} \phi_n = 0, \quad (70)$$

$$\frac{1}{\xi_n} \beta_{5n} \phi_{n+2} - \beta_{5n} \frac{1}{\xi_n} \left(\frac{h}{\xi_n} + 2 \right) \phi_{n+1} + \frac{1}{\xi_n} \left[\frac{h}{\xi_n} \beta_{5n} + \beta_{5n} - \frac{\eta^2}{\bar{x}^2} P_n^0 h^2 \right] \phi_n = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\Omega^2}{\bar{x}^3} \frac{\eta}{\xi_0} \phi_0 + \frac{\eta q \bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2) \bar{x}} A + \frac{i\eta q \bar{\alpha}^2}{\gamma \bar{x}} B = 0, \quad (72)$$

$$i \frac{\Omega^2}{\bar{x}} \frac{1}{\xi_0} \frac{1}{h} (\phi_1 - \phi_0) + \frac{i \bar{f}(\xi_0) q \bar{\alpha}^2}{(\eta^2 + \gamma^2) \bar{x}} A - \frac{\bar{g}(\xi_0) q \bar{\alpha}^2}{\gamma \bar{x}} B = 0 \quad (73)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada

$$z_{1j} = \left[-2\beta_{1j} \xi_j + h(\beta_{2j} - 2\beta_{1j}) \right] \frac{1}{\xi_j^2},$$

$$z_{2j} = \left[\beta_{1j} \xi_j^2 - h(\beta_{2j} - 2\beta_{1j}) \xi_j + h^2 (2\beta_{1j} - \beta_{2j} + \beta_{3j}) \right] \frac{1}{\xi_j^3},$$

$$z_{3j} = -3\beta_{5j} \frac{1}{\xi_j} + h(\beta_{6j} - 2\beta_{5j}) \frac{1}{\xi_j^2},$$

$$z_{4j} = 3\beta_{5j} \frac{1}{\xi_j} - 2h(\beta_{6j} - 2\beta_{5j}) \frac{1}{\xi_j^2} + h^2 (2\beta_{5j} - \beta_{6j}) \frac{1}{\xi_j^3}, \quad (74)$$

$$z_{5j} = -\beta_{5j} \frac{1}{\xi_j} + h(\beta_{6j} - 2\beta_{5j}) \frac{1}{\xi_j^2} - h^2 (2\beta_{5j} - \beta_{6j}) \frac{1}{\xi_j^3} + \frac{\eta^2 h^3}{\bar{x}^2 \xi_j^2} \beta_{7j},$$

$$\beta_{ij} = \beta_i(x_j), \quad \alpha_{ij} = \alpha_i(x_j), \quad P_j^0 = P^0(x_j)$$

$$x_j = \frac{[\lambda(\bar{r}^2 \xi_j^2 - r_i^2) + R_i^2]^{1/2}}{\bar{r} \xi_j}$$

şeklinde tanımlanmıştır. P_j , ϕ_j ($j=0,1,\dots,n$), A ve B bilinmeyenlerine göre sıfır olmayan

çözümüne sahip olması için (66-74) homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu gereklilik dalga hareketine ait dispersiyon bağıntısını verir. Genel hale ait dispersiyon bağıntısından önce aşağıda bazı özel durumlar incelenecektir.

Uzun dalga yaklaşımı ve viskoz olmayan akışkanla dolu ince tüp durumu:

Büyük atardamarlarda bile, dalga boyu atardamarın ortalama yarıçapından çok daha büyüktür. Böylece k dalga sayısı çok küçük olur ve $\eta \ll 1$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda \bar{f} fonksiyonunun 2'ye yaklaştığı gösterilebilir. Ayrıca $\gamma = s\bar{R}$ ve $\bar{\alpha}^2 = \omega\bar{R}^2/\nu$ olduğu hatırlanarak ve (47) den yararlanarak

$$m_1 = \frac{1}{\bar{x}} \frac{\tau\omega(\varphi-1)(f-\varphi)}{\omega^2\tau^2(1-\varphi)^2+1}, \quad (75)$$

$$m_2 = \frac{1}{\bar{x}} \frac{\varphi-f-\tau^2\omega^2(\varphi-1)^2-1}{\omega^2\tau^2(1-\varphi)^2+1}$$

tanımları yapılırsa

$$\gamma^2 \approx \bar{\alpha}^2 \bar{m}, \quad \bar{m} = m_1 + im_2 \quad (76)$$

olarak yazılabilir. İnce tüp limit durumu için tüp kalınlığının tek aralıktan oluştuğu varsayılır ($n=1$). Böylece

$$h = \bar{h}/\bar{r} \ll 1 \quad \text{ve} \quad \xi_0 = 1 - h/2 \approx 1 \quad (77)$$

olduğu görülebilir. Son olarak düşük viskozite limit durumu için $\gamma \rightarrow \infty$ olduğu düşünülerek $\bar{g}(\xi) \rightarrow \infty$ olduğu bulunabilir. Yukarıda verilmiş olan kabuller altında (66-74) denklem sistemi ($j=0$ alınarak) $P_0, P_1, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, A ve B bilinmeyenleri için sekiz adet cebirsel bağıntı verir. Sıfır olmayan çözümü elde etmek için bu denklem sisteminin katsayılarının determinantı sıfıra eşitlendiğinde Ω/η kompleks faz hızının kuvvetleri cinsinden dispersiyon bağıntısı

$$A_1 (\Omega/\eta)^4 + A_2 (\Omega/\eta)^2 + A_3 = 0 \quad (78)$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç şekildeğişimi sıfır olarak alındığında (78) in katsayıları

$$A_1 = -2\bar{m}qh - 6\bar{m}qh^2,$$

$$A_2 = 8\bar{m}qh(1 + 2\gamma_1 \sin^4 \hat{\beta}) + qh^2(20\bar{m} + 16\gamma_1\bar{m} - 4iq - 3i\gamma_1q - 4\gamma_1(6\bar{m} + iq) \cos 2\hat{\beta} + \gamma_1(8\bar{m} - iq) \cos 4\hat{\beta}), \quad (79)$$

$$A_3 = 4iq^2h^2(3 + 5\gamma_1 + 3\gamma_1 \cos 4\hat{\beta})$$

olarak bulunur. Burada $\gamma_1 = k_1/\beta$ şeklinde tanımlanmış boyutsuz büyüklüktür. Lifli yapı göz ardı edildiğinde ($\gamma_1 = 0$) ve h çok küçük olduğundan kökler yaklaşık olarak

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4 + O(h), \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = -\frac{3iqh}{2\bar{m}} + O(h^2) \quad (80)$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuçlar gösteriyor ki akışkan içerisindeki parçacıklarla ilişkili olan \bar{m} parametresi sadece ikincil dalganın hızını ve taşıma katsayısını etkilemektedir. Akışkanın parçacık içermediği düşünüldüğünde ise $\tau = \varphi = f = m_1 = 0$, $m_2 = -1$ olup kökler

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4 + O(h), \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = \frac{3qh}{2} + O(h^2) \quad (81)$$

olur. Bu sonuçlar Ercengiz (2005) in sonuçları ile uyumludur. Atabek ve Lew (1966) tarafından önerildiği gibi boyutsuz kompleks faz hızı

$$\frac{c}{c_0} = X + iY \quad (82)$$

olarak gösterildiğinde, dalga hızları ve taşıma katsayıları

$$\nu = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad \chi = \exp[-2\pi \frac{Y}{X}] \quad (83)$$

şeklinde elde edilir ve

$$v_1^2 = 4, \quad v_2^2 = \frac{3}{2}qh, \quad \chi_1 = \chi_2 = 1 \quad (84)$$

sonucuna ulaşılır. Gerçek fiziksel büyüklükleri kullanarak ve E tüp malzemesinin Young modülünü göstermek üzere $\beta = E/3$ olduğu göz önüne alınarak dalga hızları

$$\bar{v}_1^2 = \frac{4E}{3\rho}, \quad \bar{v}_2^2 = \frac{Eh}{2\rho_0\bar{r}} \quad (85)$$

şeklinde bulunur. Bu dalga hızları sırasıyla Lamb modu ve Moens-Korteweg hızına karşı gelir.

Uzun dalga yaklaşımı ve viskoz akışkanla dolu kalın tüp durumu:

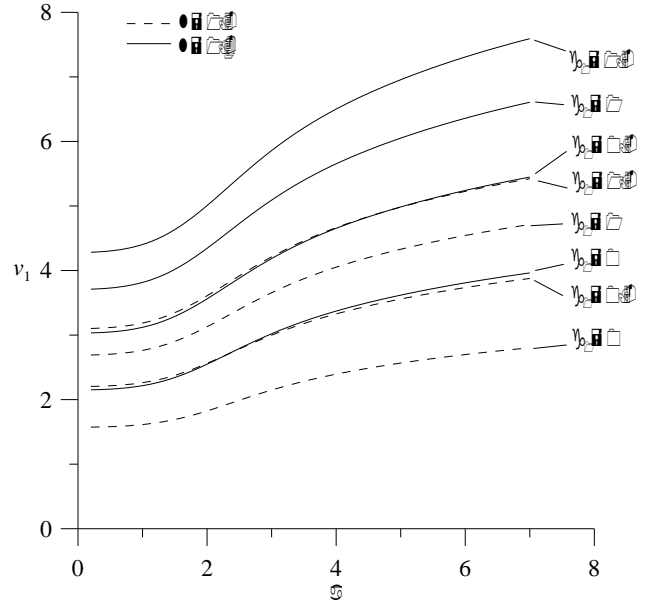
Uzun dalga yaklaşımında denklemler sonlu farklar yöntemiyle incelenmiştir. Yöntemi uygularken tüp kalınlığına ait alt aralık sayısı $n=4$ olarak alınmıştır. Başlangıç şekil değişiminin de var olduğu düşünülmüş ve ayrıca

$$\begin{aligned} R_i &= 0.31\text{cm}, \quad R_d = 0.38\text{cm}, \quad r_i = 0.32\text{cm}, \\ \alpha &= 1.948, \quad \eta = 0.01, \quad k_2 = 0.7112, \\ \varphi &= 0.01, \quad \omega\tau = 1, \quad q = 1 \end{aligned} \quad (86)$$

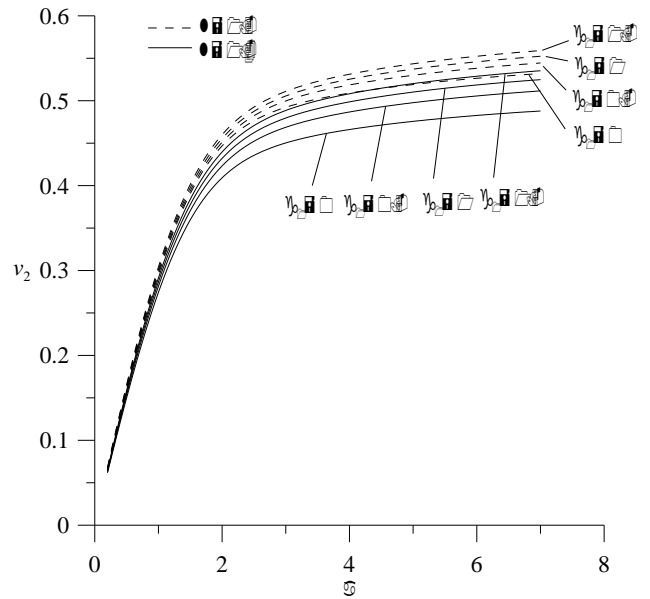
şeklindeki sayısal değerler kullanılmıştır. Bu kabuller altında (66-74) denklem sistemi ($j=0, \dots, 3$ alınarak) P_j ($j=0, \dots, 4$), ϕ_j ($j=0, \dots, 6$), A ve B bilinmeyenleri için 14 adet cebirsel bağıntı verir. Sıfır olmayan çözümü elde etmek için bu denklem sisteminin katsayılarının determinantı sıfıra eşitlendiğinde Ω/η kompleks faz hızının kuvvetleri cinsinden dispersiyon bağıntısı bulunmuş, Atabek ve Lew (1966) tarafından önerilen ve (83) ile verilmiş tanıma göre dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanmıştır.

Sonuçlar

Bu çalışmada, içerisinde sıkışmaz, viskoz, parçacıklı, Newton akışkanı bulunan öngerilmeli, elastik, sıkışmaz, lifli, kalın duvarlı tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi incelenerek dalga hızları ve taşıma katsayıları elde edilmiştir. Şekil 1, liflerle ilgili parametre olan γ_1 ve λ



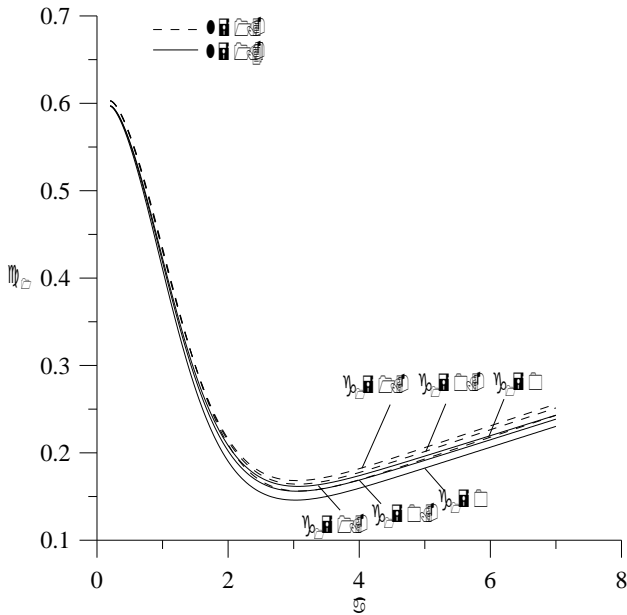
Şekil 1. $f = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1 'in $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi



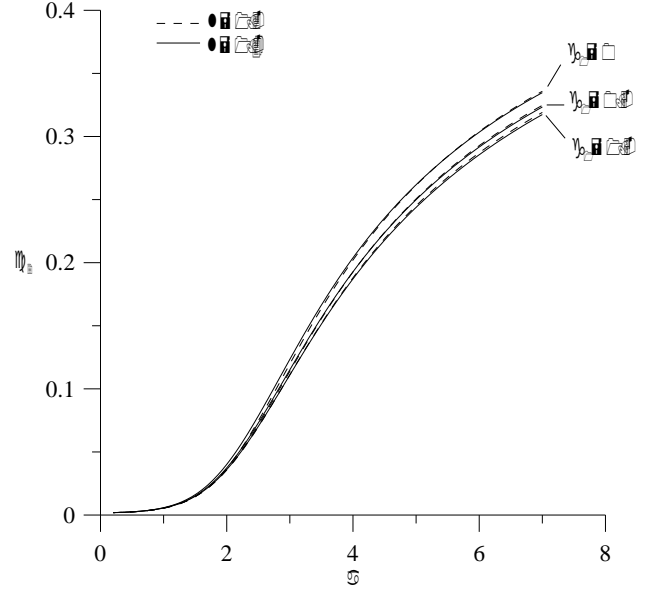
Şekil 2. $f = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2 'nin $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi

eksenel germesi arttıkça v_1 dalga hızının arttığını göstermektedir. Womersley parametresi $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişime bakıldığında ise, v_1 'in $\bar{\alpha}$ 'nın küçük değerlerinde değişmediği, ancak

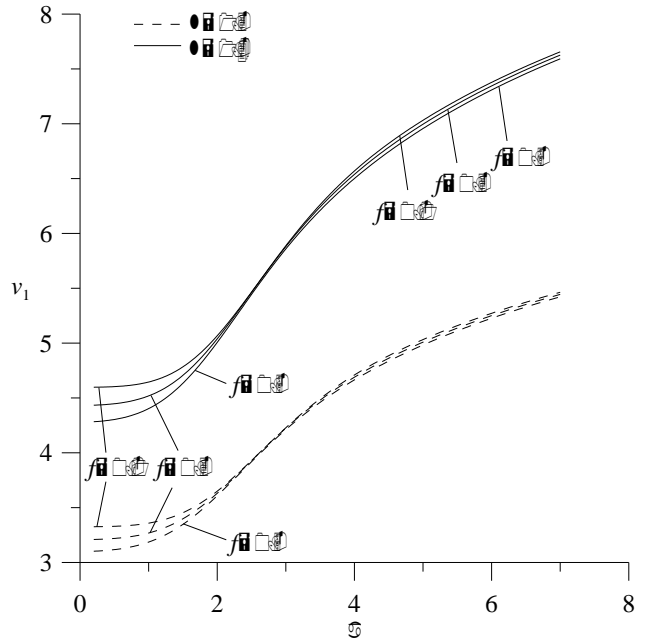
büyük değerlerinde $\bar{\alpha}$ ile birlikte arttığı görülmektedir. Şekil 2'den, v_2 dalga hızının λ arttıkça azaldığı, γ_1 ve $\bar{\alpha}$ 'nin artımı ile ise arttığı görülmektedir. Ayrıca $\bar{\alpha} < 3$ için $\bar{\alpha}$ ile artımın hızlı olduğu, $\bar{\alpha} > 3$ için ise artımın küçük kaldığı anlaşılmaktadır. Şekil 3, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1 'in değişimini göstermektedir. Buna göre $\bar{\alpha} < 3$ için χ_1 $\bar{\alpha}$ arttıkça azalmakta, $\bar{\alpha} > 3$ için ise artmaktadır. Ayrıca şekilden $\bar{\alpha} > 3$ için γ_1 arttıkça χ_1 'in de arttığı ve λ arttıkça χ_1 'in de azaldığı görülmektedir. Şekil 4, ikincil dalganın taşıma katsayısı χ_2 'nin λ ile değişmediğini, γ_1 arttıkça azaldığını göstermektedir. Ayrıca, χ_2 $\bar{\alpha}$ ile artmaktadır. χ_2 'nin Womersley parametresi ile birlikte sıfıra gittiği de şekilden görülmektedir. Şekil 5'te $\bar{\alpha} < 2$ için v_1 'in f arttıkça azaldığı, $\bar{\alpha} > 2$ için ise f 'nin artımının dalga hızını fazla değiştirmediği görülmektedir. Bu sonuç parçacık konsantrasyonunun birincil dalga hızına etkisinin ancak Womersley parametresinin küçük değerlerinde var olduğunu göstermektedir. Şekil 6, v_2 'nin f ile azaldığını göstermektedir. Bu sonuç parçacık



Şekil 3. $f = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1 'in $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi

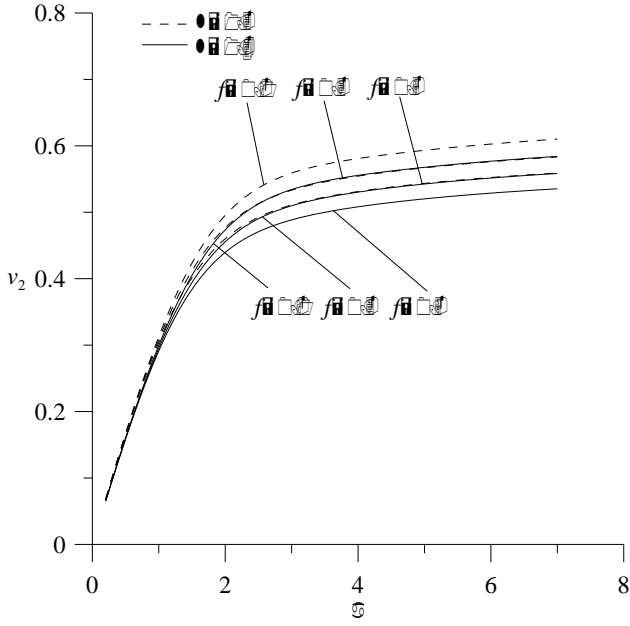


Şekil 4. $f = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1 'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2 'nin $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi

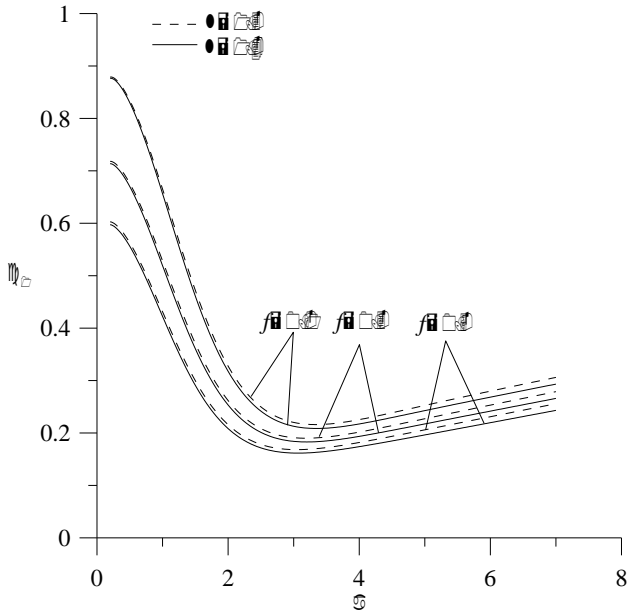


Şekil 5. $\gamma_1 = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1 'in $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi

konsantrasyonunun ikincil dalga hızına etkisini açıkça ortaya koymaktadır. Şekil 7'de f arttıkça χ_1 'in azaldığı gösterilmiştir. $\bar{\alpha}$ 'nın küçük



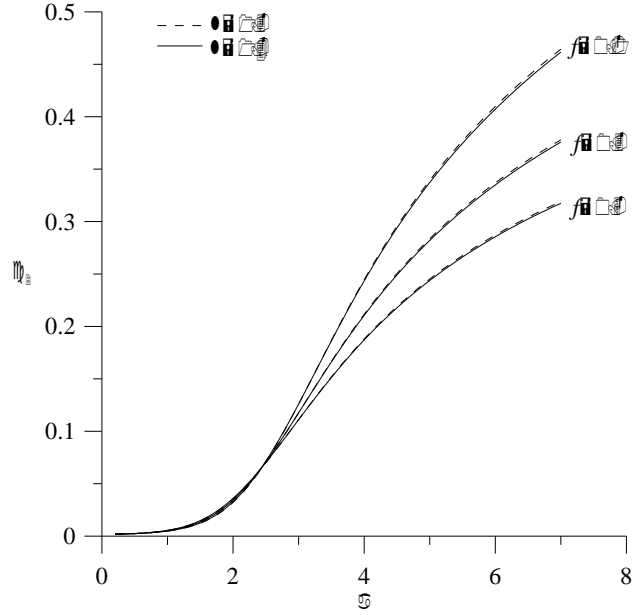
Şekil 6. $\gamma_1 = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2 'nin $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi



Şekil 7. $\gamma_1 = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1 'in $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi

değerlerinde kütle konsantrasyonunun χ_1 'e etkisi büyük olmaktadır. Şekil 8, f arttıkça χ_2 'in azaldığını göstermektedir. Bu şekiller parçacıklı

akışkan yaklaşımının önemini vurgular. Parçacık konsantrasyonunun dalga hızı ve taşıma katsayılarına etkisi, Ercengiz (2005) ile Nag ve Janna (1981) nin sonuçları ile uyumludur.



Şekil 8. $\gamma_1 = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2 'nin $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi

Kaynaklar

- Atabek, H.B. ve Lew, H.S., (1966). Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube, *Biophysical Journal*, **6**, 480-503.
- Demiray, H., (1972). On the elasticity of soft biological tissues, *Journal of Biomechanics*, **5**, 309-311.
- Demiray, H., (1994). A viscoelastic model for arterial wall materials, *International Journal of Engineering Sciences*, **32**, 1567-1578.
- Ercengiz, A., (2005). Oscillating two-phase flow in a prestressed thick elastic tube, *Acta Mechanica*, **179**, 169-185.
- Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1974). *Elastodynamics*, **I**, 246-259, Pergamon Press, New York.
- Fung, Y.C., (1984). *Biodynamics: Circulation*, Springer Verlag, New York.
- Holzapfel, G.A., Gasser, T.C. ve Ogden, R.W., (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *Journal of Elasticity*, **61**, 1-48.

- Kuiken, G.D.C., (1984). Wave propagation in a thin-walled liquid-filled initially stressed tube, *Journal of Fluid Mechanics*, **141**, 289-308.
- Lambossy, P., (1951). Aperçu historique et critique sur le probleme de la propagation de ondes dans un liquide compressible enferme dans un tuber elastique, *Helvetica Physiologica et Pharmacologica Acta*, **9**, 145-161.
- Mirsky, I., (1967). Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube, *Biophysical Journal*, **7**, 165-186.
- Morgan, G.W. ve Kiely, J.P., (1954). Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube, *Journal of Acoustical Society of America*, **26**, 323-328.
- Nag, S.K. ve Jana, R.N., (1981). Oscillating two-phase flow in an elastic tube, *Acta Mechanica*, **41**, 121-128.
- Nayfeh, A.H., (1966). Oscillating two-phase flow through a rigid pipe, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **4**, 1868-1870.
- Rachev, A.I., (1980). Effect of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, *Journal of Biomechanical Engineering*, ASME, **102**, 119-123.
- Skalak, R., (1966). Wave propagation in blood flow, *Biomechanics Symposium*, Y.C. Fung (ed), 20-46, ASME, New York.
- Womersley, J. R., (1957). An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries, WADC Technical Report TR, 56-614.