itüdergisi/*c*
fen bilimleri
Cilt:8, Sayı:1, 42-52
Kasım 2010

Uzun dalga-kısa dalga etkileşim denklemleri için yalnız dalgaların varlığı

Handan BORLUK*, Hüsnü Ata ERBAY, Saadet ERBAY

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Sürekli bir ortamda yayılan iki kısa ve bir uzun dalganın rezonans etkileşimi bir boyutlu üç kuple uzun dalga-kısa dalga (LSI) etkileşim denklemleri ile temsil edilmektedir. Kısa dalgaların aynı grup hızına sahip olması ve bu grup hızının uzun dalganın faz hızına eşit olması rezonans durumunu oluşturmaktadır. LSI denklemleri yüzey su dalgalarının etkileşimi, elastik bir ortamda yayılan iç elastik dalgaların rezonans etkileşimi gibi fiziksel olayları tanımlayan denklemler olarak türetilmiştir. Bu çalışmada LSI denklem sisteminin yalnız dalga çözümlerinin varlığı ispat edilmiştir. İspat esas olarak kübik nonlineerliğe sahip tek bileşenli nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi için önerilmiş yaklaşımın genişletilmesi üzerine inşa edilmiştir ve kısıtlamasız bir varyasyonel problemin çözümüne dayanmaktadır. Bunun için öncelikle LSI denklemlerinin yalnız dalga çözümlerinin sağlamış olduğu iki-kuple denklem sistemi elde edilmiştir. Daha sonra Euler-Lagrange denklemleri bu iki-kuple denklem sistemini veren bir J fonksiyoneli, Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği yardımıyla tanımlanmıştır. Böylece, yalnız dalgaların varlığı problemi J fonksiyonelinin bir minimumunun varlığının gösterilmesi problemine indirgenmiştir. Fonksiyonelin minimumunun varlığını göstermek için Lieb'in kompaktlık lemması kullanılmıştır. NLS denkleminin yalnız dalga çözümlerinin varlığını göstermek amacıyla literatürde tanımlanmış olan J fonksiyoneli $n \geq 2$ uzay boyutu için geçerli iken, şimdiki çalışmada tanımlanmış olan fonksiyonel $n=1$ uzay boyutunda da geçerlidir. Ayrıca, çözümlerin pozitif tanımlılığı gösterilmiş ve J fonksiyoneli ile enerji fonksiyoneli arasındaki ilişki de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Uzun dalga-kısa dalga etkileşim denklemleri, yalnız dalgalar.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Handan BORLUK. hborluk@isikun.edu.tr; Tel: (216) 528 71 77.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Uzun dalga-kısa dalga etkileşim denklemleri: yalnız dalga çözümlerinin varlığı ve yörüngesel kararlılık" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 17.03.2009 tarihinde dergiye ulaşmış, 14.05.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Existence of solitary wave solutions for long wave-short wave interaction equations

Extended abstract

Nonlinear dispersive wave equations arise in many areas of physics, such as solid mechanics, nonlinear optics and plasma. Solitary wave solutions occur as a result of the balance of dispersive and nonlinear effects. This balance makes the localized waves travel without change of form. So there is a wide interest for the behaviour of solitary wave solutions of nonlinear wave equations: existence and uniqueness, continuous dependence to initial data, stability. In the present study we are interested in establishing the existence of solitary wave solutions for a particular nonlinear dispersive wave equation.

Short waves propagating in various continuous media are governed by the nonlinear Schrödinger (NLS) equation and its generalizations. In one dimensional case there exists a unique localized solitary wave solution of the NLS equation and can easily be evaluated. The existence problem in the multidimensional case has generally been investigated by using constrained or unconstrained variational methods. The constrained variational methods are based on minimization of energy functionals, which take the infimum value at the ground state solutions, under some constraints. Weinstein proved the existence problem of solitary wave solutions of the NLS equation in the multidimensional case by the help of an unconstrained variational problem. In his study a functional $J(u)$ associated with the Gagliardo-Nirenberg inequality is defined. The solution of the Euler-Lagrange equation of J is the solitary wave solution of the NLS equation. So the existence of solitary wave solutions was shown by proving the existence of a minimizer of the functional J.

The resonant interaction among two short wave modes with equal group speeds and one long wave mode whose phase speed is equal to the group speed of short waves is represented by the three coupled long wave-short wave interaction (LSI) equations of the form;

$$i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = \beta u\phi,$$
$$i\psi_t + \alpha\psi_{xx} = \beta u\psi,$$
$$u_t = \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x.$$

where, x is the spatial coordinate, t is the time; $\phi,\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ and $\alpha > 0$ and β are real constants. Here $u(x,t)$ represents the long wave mode; $\phi(x,t)$ and $\psi(x,t)$ denote short wave modes. The above three-component system of long wave-short wave interaction equations describes the resonant wave propagation in various continuous media, for instance, the surface of water and a bulk elastic medium.

The aim of the present study is to prove the existence of solitary wave solutions for the LSI system by using variational methods. Substitution of solitary wave solutions of the form

$$\phi(x,t) = R_1(x-ct)e^{i\omega t + i\frac{c}{2}(x-ct)},$$
$$\psi(x,t) = R_2(x-ct)e^{i\omega t + i\frac{c}{2}(x-ct)},$$
$$u(x,t) = U(x-ct)$$

with $\omega\in\mathbb{R}, c>0$ into the LSI system yields the coupled system

$$R_1'' - \Omega R_1 + \gamma(|R_1|^2 + |R_2|^2)R_1 = 0,$$
$$R_2'' - \Omega R_2 + \gamma(|R_1|^2 + |R_2|^2)R_2 = 0.$$

In spite of a wide interest in this system and its generalizations, a few rigorous results on the existence of solutions exist up to present. In recent years there has been a large number of studies devoted to the problem of existence of solutions for various settings of this system. In these studies, the problem of existence of nontrivial solutions has been investigated extensively using variational methods based on minimization of certain energy functionals under some constraints. Here, to prove the existence of positive solutions to the above two-component system, we use a different approach based on adapting the method used by Weinstein for the NLS equation. As the one-variable functional defined by Weinstein is valid for $n \geq 2$, a new functional associated with the Gagliardo-Nirenberg inequality has been defined for $n=1$.

The new two-variable functional $J(u,v)$ assumes the solutions of two coupled system as the critical points. And the existence of a minimizer for J is proved using Lieb's compactness Lemma. The positivity of solutions and the relation between J and the energy functional are also investigated.

Keywords: *Long wave-short wave interaction equations, existence of solitary waves.*

Giriş

Sürekli ortamlarda yayılan doğrusal olmayan bir boyutlu kısa dalgaların genliklerini yöneten denklem olarak doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi veya onun genelleştirilmiş formları elde edilmektedir. En genel halde NLS denklemi

$$i\phi_t + \Delta\phi + f(\phi)\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

ile verilmektedir. Bu denklemde x uzay koordinatını, t zamanı, ϕ kısa dalganın kompleks genliğini, Δ ise $\mathbb{R}^n$ öklid uzayında Laplace operatörünü göstermektedir. Özel halde $f = |\phi|^{2\sigma}$ alınabilir.

NLS denklemi $\phi(x,t) \to e^{i(\frac{c}{2}X + \frac{c^2}{4}T)}\Phi(X,T)$, $X=x-ct$, $T=t$ ile tanımlanan Galile dönüşümü altında invaryanttır. Diğer bir deyişle, $\phi(x,t)$ fonksiyonu NLS denkleminin bir çözümü ise $\Phi(x,t)$ fonksiyonu da bir çözümdür. Eğer $\Phi(X,T) = u_s(X)e^{i\Omega t}$ şeklindeki duran dalga çözümlerinin varlığı ispatlanırsa, Galile dönüşümü nedeniyle, bunun aynı zamanda NLS denkleminin

$$\phi(x,t) = e^{i[\frac{c}{2}(x-ct) + \frac{c^2}{4}t]}u_s(x-ct)e^{i\Omega t}$$

şeklindeki yalnız dalga çözümlerinin varlığını ispatlamaya denk olduğu açıktır. Bu nedenle literatürde, NLS denklemi için yalnız dalga çözümlerinin varlığı problemi yerine duran dalgaların varlığı problemi incelenir.

u gerçel değerli fonksiyonu $H^1(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayının bir elemanı olmak üzere NLS denkleminin $\phi(x,t) = e^{i\omega t}u(x)$ formundaki duran dalga çözümleri

$$\Delta u - \omega u + u^{2\sigma+1} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

denklemini sağlar. Bir boyutlu durumda (2) denkleminin sonsuzda sıfır sınır koşullarını sağlayan ve

$$u(x) = [(\sigma+1)\omega]^{1/2\sigma}[\operatorname{sech}(\sigma\sqrt{\omega}x)]^{1/\sigma}$$

ile verilen çözümü kolaylıkla hesaplanabilir. Ancak yüksek boyutlu durumlarda lokalize olmuş çözümlerin açık formunu bulmak mümkün değildir. Bu nedenle yüksek boyutlarda; (2) denklemi ve onun genel bir formu olan $-\Delta u - f(u) = 0$ denkleminin aşikar olmayan $u \in H^1(\mathbb{R})$ çözümlerinin varlığı problemi, kısıtlı ve kısıtsız varyasyonel problemlerin çözümlerinin varlığı problemi olarak incelenmiştir. Söz konusu problem, $n \geq 3$ boyut için Strauss (1977), Coleman ve diğerleri (1978), Berestycki ve Lions (1983) tarafından; $n = 2$ için Esteban (1980), Berestycki ve diğerleri (1983) tarafından kısıtlı bir varyasyonel problemin çözümü olarak ele alınmıştır.

Weinstein (1983) $n \geq 2$ boyut için NLS denkleminin duran dalga çözümlerinin varlığı problemini kısıtsız bir varyasyonel problem olarak ele almıştır. Bu çalışmada, $\theta = n(1/2 - 1/p)$ olmak üzere, $\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_p^{1-\theta}$, $0 < \theta \leq 1$ Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden hareket edilerek;

$$J(u) = \frac{\|\nabla u\|_2^{\sigma n}\|u\|_2^{2+\sigma(2-n)}}{\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}}, \quad 0 < \sigma < \frac{2}{n-2} \tag{3}$$

fonksiyoneli tanımlanmıştır. J fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi (2) denklemi olduğundan, denklemin çözümlerinin varlığı $J(u)$ fonksiyonelinin bir minimumunun var olduğu ispat edilerek gösterilmiştir.

Dalga yayılımının söz konusu olduğu sürekli ortamda iki kısa dalga ve faz hızı kısa dalgaların grup hızına eşit olan bir uzun dalga varsa, bu durumda dalga etkileşimi;

$$\left.\begin{aligned} &i\phi_t + \alpha\phi_{xx} = \beta u\phi, \\ &i\psi_t + \alpha\psi_{xx} = \beta u\psi, \\ &u_t = \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)_x \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ile verilen üç kuple uzun dalga-kısa dalga (LSI) sistemi ile temsil edilir. Yukarıda olduğu gibi burada da x ve t sırasıyla uzay ve zaman değişkenlerini, u gerçel değerli fonksiyonu uzun dalganın genliğini, ϕ, ψ kompleks değerli fonksiyonları kısa dalgaların genliklerini göstermektedir. $\alpha > 0$ ve β gerçel sabitlerdir. Burada kısa dalgaların dispersiyonu, uzun dalga ve kısa dalgalar arasındaki doğrusal olmayan etkileşim ile dengelenmektedir. (4) sistemi Ma (1980) ve Craik (1983) tarafından su dalgaları için Erbay (2000) tarafından genelleştirilmiş elastik bir ortamdaki rezonant dalga yayılımını temsil etmek için elde edilmiştir.

(4) LSI sistemi $x = X$, $t = T/\alpha$, $u = \alpha U$, $(\phi, \varphi) = \sqrt{\alpha}(\Phi, \Psi)$, değişken dönüşümü ile, α katsayısının bir olduğu aynı formda bir sisteme dönüştüğünden, çalışmanın bundan sonraki kısmında, genellik kaybedilmeksizin $\alpha = 1$ alınacaktır.

Yalnız dalga çözümleri

Bu bölümde, (4) ile verilmiş olan LSI sisteminin yalnız dalga çözümlerinin varlığı kısıtsız bir varyasyonel problem tanımlanarak ve Weinstein'ın yaklaşımı kullanılarak ispatlanmıştır.

c pozitif bir sabit, ω gerçel bir sabit, $(\Phi, \Psi) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ ve $U \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere, (4) denkleminin en genel formdaki yalnız dalga çözümleri

$$\left.\begin{aligned} \phi_s(x,t) &= \Phi(x-ct)e^{i\omega t} \\ \psi_s(x,t) &= \Psi(x-ct)e^{i\omega t} \\ u_s(x,t) &= U(x-ct) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

şeklinde önerilebilir. (5) çözümleri (4) sisteminde yerine yazıldığında, ' işareti $\xi = x - ct$ değişkenine göre türevi göstermek üzere,

$$\left.\begin{aligned} &-\Phi'' + ic\Phi' + \omega\Phi + \beta U\Phi = 0 \\ &-\Psi'' + ic\Psi' + \omega\Psi + \beta U\Psi = 0 \\ &U' = -\frac{\beta}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)' \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

sistemi elde edilir. Son denklemden U fonksiyonu çözülebileceğinden (6) sistemi

$$-\Phi'' + ic\Phi' + \omega\Phi - \frac{\beta^2}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Phi = 0$$
$$-\Psi'' + ic\Psi' + \omega\Psi - \frac{\beta^2}{c}(|\Phi|^2 + |\Psi|^2)\Psi = 0$$

olarak yazılabilir. Burada $\Phi(\xi) = R_1(\xi)\exp(\frac{ic\xi}{2})$ ve $\Psi(\xi) = R_2(\xi)\exp(\frac{ic\xi}{2})$ tanımları yapılırsa

$$\left.\begin{aligned} R_1'' - \Omega R_1 + \gamma(|R_1|^2 + |R_2|^2)R_1 = 0 \\ R_2'' - \Omega R_2 + \gamma(|R_1|^2 + |R_2|^2)R_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

sistemi elde edilir. (7) sistemindeki katsayılar $\Omega = \omega - c^2/4$ ve $\gamma = \beta^2/c$ olarak tanımlanmıştır. Çalışmanın bundan sonraki kısmında, hesap kolaylığı için ξ değişkeni yerine x değişkeni kullanılacaktır.

Aşağıdaki lemmada, (7) sisteminin kendileri ve birinci mertebe türevleri $|x| \to \infty$ için sıfır olan çözümlerinin sağladığı Pohozaev tipi özdeşlikler verilmektedir. Bu özdeşlikler (7) sisteminin $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayına ait düzgün çözümlerinin varlığını göstermek için kullanılacak gerek koşulları vermektedir.

Lemma: (7) sistemini sağlayan $(R_1, R_2) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ reel değerli fonksiyonları;

$$\int_{\mathbb{R}} (R_{1,x}^2 + R_{2,x}^2 - \frac{\gamma}{4}(R_1^2 + R_2^2)^2)dx = 0, \qquad (8)$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\Omega(R_1^2 + R_2^2) - \frac{3\gamma}{4}(R_1^2 + R_2^2)^2)dx = 0 \qquad (9)$$

özdeşliklerini sağlarlar.

İspat: (7) sistemindeki denklemler sırasıyla $xR_{1,x}$ ve $xR_{2,x}$ ile çarpılır ve elde edilen denklemler $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilip sonuç denklemler toplanırsa, kısmi integrasyondan sonra

$$\int_{\mathbb{R}} (R_{1,x}^2 + R_{2,x}^2 - \Omega(R_1^2 + R_2^2) + \frac{\gamma}{2}(R_1^2 + R_2^2)^2)dx = 0$$

bulunur. Diğer yandan (7) sistemindeki denklemler sırasıyla R_1 ve R_2 ile çarpılır ve elde edilen denklemler $\mathbb{R}$ üzerinde integre edilirse

$$\int_{\mathbb{R}} (R_{1,x}^2 + R_{2,x}^2 + \Omega(R_1^2 + R_2^2) - \gamma(R_1^2 + R_2^2)^2)dx = 0$$

bulunur. Elde edilen bu sonuçların taraf tarafa toplanmasından ve çıkarılmasından (8)-(9) ile verilen Pohozaev tipi özdeşlikler elde edilir.

Varyasyonel problem

Yukarıda da belirtildiği gibi, Weinstein (3) ile verilen $J(u)$ fonksiyonelini tanımlamış ve NLS denkleminin duran dalga çözümlerinin varlığı problemini kısıtsız bir varyasyonel problem olarak ifade etmiştir. (3) fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi (2) denklemi olduğundan, (2) denkleminin çözümlerinin varlığı $J(u)$ fonksiyonelinin bir minimumunun var olduğu ispat edilerek gösterilmiştir. Ancak söz konusu çalışmada verilen $J(u)$ fonksiyoneli, uzay boyutunun $n \geq 2$ olması durumunda tanımlanmıştır. Şimdi $n=1$ haline karşılık gelen J fonksiyoneli önce tek bağımlı değişken hali ve sonra iki bağımlı değişken hali için Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği yardımıyla türetilecektir. $n=1$ uzay boyutu için Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinin genel bir hali Nagy (1941) tarafından ispat edilmiştir:

$$\left(\frac{s}{2}H\left(\frac{s}{\beta},\frac{p-1}{p}\right)\right)^{\frac{-\beta}{s}} \leq \frac{\| u_x \|_p^{\frac{\beta}{s}} \| u \|_q^{q+\beta q\frac{(p-1)}{ps}}}{\| u \|_{q+\beta}^{q+\beta}}. \qquad (10)$$

(10) eşitsizliği her $u \in H^1(\mathbb{R})$ için tanımlıdır ve $q, \beta > 0$, $p \geq 1$, $s = 1 + q(p-1)/p$ olup, H fonksiyonu

$$H(a,b) = \frac{(a+b)^{-(a+b)}\Gamma(1+a+b)}{a^{-a}b^{-b}\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}$$

şeklinde tanımlanır. H fonksiyonunun tanımındaki Γ işareti, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ ile tanımlanan Gamma fonksiyonunu gösterir. Özel olarak $p = q = s = \beta = 2$ için, (10) eşitsizliği, $H(1,\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{H(1,\frac{1}{2})} \leq \frac{\| u_x \|_2 \| u \|_2^3}{\| u \|_4^4} \qquad (11)$$

şeklini alır. Sonuç olarak $n=1$ durumunda, (11) Nagy eşitsizliği ve Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden esinlenilerek her $u \in H^1(\mathbb{R})$ için iyi tanımlı

$$J(u) = \frac{(\| u_x \|_2)^{1/4}(\| u \|_2)^{3/4}}{\| u \|_4} \qquad (12)$$

fonksiyoneli tanımlanmıştır.

$J(u)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi fonksiyonelin birinci varyasyonu hesap edilerek bulunur:

$$\delta J = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon\eta)|_{\varepsilon=0} = 0, \text{ her } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

(8)-(9) ile verilen Pohozaev özdeşliklerinde $R_1 = u, R_2 = 0$ yerleştirilmesiyle bulunan kısıtlar da kullanılarak,

$$\delta J = A\int_{\mathbb{R}} (u_{xx} - \omega u + \gamma u^3)\eta dx = 0$$

elde edilir. Burada A katsayısı;

$$A = \frac{-(\| u \|_2^2)^{3/8}}{4\| u \|_4 (\| u_x \|_2^2)^{7/8}}$$

olarak tanımlanmıştır. δJ varyasyonunun keyfi η fonksiyonu için sıfır olması ancak ve ancak u fonksiyonunun $u_{xx} - \omega u + \gamma u^3 = 0$ denklemini sağlaması ile mümkündür. Diğer bir deyişle $J(u)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemi kübik nonlineerliğe sahip NLS denklemidir. Gerçekten de, $u_{xx} - \omega u + \gamma u^3 = 0$ denkleminin çözümü olan $u_{min} = \sqrt{2\omega/\gamma}\,\mathrm{sech}(\sqrt{\omega}x)$ fonksiyonu, $J(u)$ fonksiyonelinin de minimumudur ve $J(u_{min}) = 3^{1/8}$ olur. (11) eşitsizliği ise $u = u_{min}$ için

$$J(u_{min}) = \frac{1}{\left(H(1,\frac{1}{2}) \right)^{1/4}}$$

şeklinde bir eşitliğe dönüşmektedir.

$H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı u değişkeninin sağladığı (12) ile verilen $J(u)$ fonksiyonelinden hareket ederek, $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı (u,v) fonksiyonları için $J(u,v)$ fonksiyoneli

$$J(u,v) = \frac{(\| u_x \|_2^2 + \| v_x \|_2^2)^{\frac{1}{8}} (\| u \|_2^2 + \| v \|_2^2)^{\frac{3}{8}}}{\| u^2 + v^2 \|_2^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

olarak tanımlanır. $J(u,v)$ fonksiyoneli $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ fonksiyonları için iyi tanımlıdır.

Uyarı: q ve s pozitif sayılar olmak üzere $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlanmış $(u_{q,s}(x), v_{q,s}(x)) = (qu(sx), qv(sx))$ fonksiyonları için,

$$\| u_{q,s} \|_2^2 = q^2 s^{-1} \| u \|_2^2,\ \| \nabla u_{q,s} \|_2^2 = q^2 s \| \nabla u \|_2^2,$$
$$\| v_{q,s} \|_2^2 = q^2 s^{-1} \| v \|_2^2,\ \| \nabla v_{q,s} \|_2^2 = q^2 s \| \nabla v \|_2^2,$$
$$\| u_{q,s}^2 + v_{q,s}^2 \|_2^2 = q^4 s^{-1} \| u^2 + v^2 \|_2^2$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılar (13) fonksiyonelinde kullanılırsa $J(u_{q,s}, v_{q,s}) = J(u,v)$ olduğu görülür. Bu sonuç $J(u,v)$ fonksiyonelinin ölçek dönüşümleri altında invaryant olduğunu gösterir.

Yalnız dalgaların varlığı

Bu bölümde, LSI sisteminin (7) ile verilen kuple adi diferansiyel denklemini sağlayan çözümlerinin $J(u,v)$ fonksiyonelini minimize eden fonksiyonlar olduğunu belirten teorem verilecek ve ispat edilecektir.

Teorem: $\Omega > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere (13) ile verilen $J(u,v)$ fonksiyonelini minimum yapan $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ fonksiyonları vardır. Ayrıca

$$\| \tilde{R}_1 \|_2^2 + \| \tilde{R}_2 \|_2^2 = 2$$

ve

$$\| \tilde{R}_{1,x} \|_2^2 + \| \tilde{R}_{2,x} \|_2^2 = 2\Omega / 3$$

kısıtları altında $J(u,v)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemleri;

$$\left. \begin{aligned} \tilde{R}_{1,xx} - \Omega \tilde{R}_1 + \gamma e^2 (\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2) \tilde{R}_1 = 0, \\ \tilde{R}_{2,xx} - \Omega \tilde{R}_2 + \gamma e^2 (\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2) \tilde{R}_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

şeklindedir. Burada $e^2 = 8\Omega / 3a^4 \gamma$ ve

$$a^4 = \int_{\mathbb{R}} (\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2)^2 dx \text{ olup, } R_i = e\tilde{R}_i \ (i = 1,2)$$

$$a^4 = \int_{\mathbb{R}} (\tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2)^2 dx \text{ olup, } R_i = e\tilde{R}_i \ (i = 1,2)$$

fonksiyonları (7) sistemini sağlar.

İspat: $J(u,v)$ fonksiyoneli negatif olmayan bir fonksiyonel olduğundan, bu fonksiyoneli minimize eden bir $(u_n, v_n) \in (H^1(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R})) \times (H^1(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R}))$ fonksiyon dizisi vardır; yani

$$j = \inf_{(u,v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})} J(u,v) = \lim_{n \to \infty} J(u_n, v_n) \quad (15)$$

olur. Şimdi

$$\| \tilde{R}_{1n} \|_2^2 + \| \tilde{R}_{2n} \|_2^2 = 2 \quad (16)$$

olmak üzere, $(\tilde{R}_{1n}(x), \tilde{R}_{2n}(x)) = (q_n u_n(s_n x), q_n v_n(s_n x))$ şeklindeki normalize edilmiş dizileri tanımlayabiliriz. Öte yandan

$$\int_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_{1,x}^2+\tilde{R}_{2,x}^2)dx=\frac{\Omega}{3}\int_{\mathbb{R}}(\tilde{R}_1^2+\tilde{R}_2^2)dx$$

ile verilen Pohozaev özdeşliği kullanılırsa

$$\|\tilde{R}_{1n,x}\|_2^2+\|\tilde{R}_{2n,x}\|_2^2=\frac{2\Omega}{3} \tag{17}$$

bulunur. (16) ve (17) kısıtlamaları q_n ve s_n büyüklüklerinin

$$s_n^2=\frac{\Omega(\|u_n\|_2^2+\|v_n\|_2^2)}{3(\|u_{nx}\|_2^2+\|v_{nx}\|_2^2)},$$

$$q_n^2=\frac{2\sqrt{\Omega}}{[3(\|u_n\|_2^2+\|v_n\|_2^2)(\|u_{nx}\|_2^2+\|v_{nx}\|_2^2)]^{1/2}}$$

olarak seçilmesi gerektiği sonucunu verir. $(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})$ normalize dizileri için $J(u,v)$ fonksiyoneli

$$J(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})=\frac{\sqrt{2}(\Omega/3)^{1/8}}{(\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4+\|\tilde{R}_{2n}\|_4^4+2<\tilde{R}_{1n}^2,\tilde{R}_{2n}^2>)^{1/4}}$$

değerini alır ve $\lim_{n\to\infty}J(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})=j$ olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}(\|\tilde{R}_{1n}\|_4^4+\|\tilde{R}_{2n}\|_4^4+2<\tilde{R}_{1n}^2,\tilde{R}_{2n}^2>)=\frac{4}{j^4}(\frac{\Omega}{3})^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

sonucu elde edilir.

$H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı $(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})$ dizileri bu uzayda sınırlıdır. Bu nedenle, $(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})$ dizilerinin $H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı $(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)$ fonksiyonlarına zayıf yakınsayan $(\tilde{R}_{1n_k},\tilde{R}_{2n_k})$ alt dizileri vardır. Yani, yeniden numaralanmış alt diziler için, $<\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_1>\to<\tilde{R}_1,\tilde{R}_1>$ ve $<\tilde{R}_{2n},\tilde{R}_2>\to\ <\tilde{R}_2,\tilde{R}_2>$ olur. $H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ uzayındaki bu zayıf yakınsamanın aynı zamanda kuvvetli olduğunu göstermek için,

$$b_1\equiv\|\tilde{R}_1\|_2^2+\|\tilde{R}_2\|_2^2,\ b_2\equiv\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2+\|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2$$

olmak üzere $b_1=2$ ve $b_2=2\Omega/3$ olduğunu kanıtlamak gerekmektedir. Fatou Lemması b_1 ve b_2 sayıları için $0\le b_1\le 2$ ve $0\le b_2\le 2\Omega/3$ eşitsizliklerinin geçerli olduğunu belirtir. Ayrıca Lieb'in Kompaktlık Lemması nedeniyle $b_1\neq 0$ ve $b_2\neq 0$ olur.

$j=\inf J$ olduğundan, $(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)$ fonksiyonları için

$$j\le J(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)=\frac{(b_1)^{3/8}(b_2)^{1/8}}{(\|\tilde{R}_1\|_4^4+\|\tilde{R}_2\|_4^4+2<\tilde{R}_1^2,\tilde{R}_2^2>)^{1/4}}$$

veya

$$(\|\tilde{R}_1^2+\tilde{R}_2^2\|_2^2)^{1/4}\le\frac{(b_1)^{3/8}(b_2)^{1/8}}{j}$$

yazılabilir. Eğer $(r_{1n},r_{2n})=(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})-(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)$ tanımı yapılırsa,

$$\|r_{1n}\|_2^2=\|\tilde{R}_{1n}\|_2^2-2<\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_1^2>+\|\tilde{R}_1\|_2^2$$
$$\|r_{2n}\|_2^2=\|\tilde{R}_{2n}\|_2^2-2<\tilde{R}_{2n},\tilde{R}_2^2>+\|\tilde{R}_2\|_2^2$$

olur. Ayrıca $(\tilde{R}_{1n},\tilde{R}_{2n})$ fonksiyon dizisinin $H^1(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ uzayında $(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)$ fonksiyonlarına zayıf yakınsaması kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}(\|r_{1n}\|_2^2+\|r_{2n}\|_2^2)=2-b_1$$

elde edilir. Benzer şekilde $r_{1n,x}$ ve $r_{2n,x}$ fonksiyon dizilerinin L^2 normları hesaplanırsa

$$\|r_{1n,x}\|_2^2=\|\tilde{R}_{1n,x}\|_2^2-2<\tilde{R}_{1n,x},\tilde{R}_{1,x}^2>+\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2$$
$$\|r_{2n,x}\|_2^2=\|\tilde{R}_{2n,x}\|_2^2-2<\tilde{R}_{2n,x},\tilde{R}_{2,x}^2>+\|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2$$

bulunur. Buradan da,

$$\lim_{n\to\infty}(\|r_{1n,x}\|_2^2+\|r_{2n,x}\|_2^2)=\frac{2\Omega}{3}-b_2$$

elde edilir. $j=\inf J$ olduğundan, (r_{1n},r_{2n}) için

$$j \le J(r_{1n}, r_{2n}) = \frac{(\| r_{1n} \|_2^2 + \| r_{2n} \|_2^2)^{\frac{3}{8}} (\| r_{1n,x} \|_2^2 + \| r_{2n,x} \|_2^2)^{\frac{1}{8}}}{(\| r_{1n}^2 + r_{2n}^2 \|_2^2)^{1/4}} \quad (19)$$

bağıntısı geçerlidir. $J(r_{1n}, r_{2n})$ ifadesinin $n \to \infty$ için limiti hesaplanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} J(r_{1n}, r_{2n}) = \frac{(2-b_1)^{3/8}((2\Omega/3)-b_2)^{1/8}}{(\lim_{n\to\infty} \| r_{1n}^2 + r_{2n}^2 \|_2^2)^{1/4}} \quad (19)$$

elde edilir. Paydadaki limiti hesaplamak için,

$$\begin{aligned} \| r_{1n}^2 + r_{2n}^2 \|_2^2 &= \| r_{1n}^2 \|_4^4 + \| r_{2n}^2 \|_4^4 + 2 < r_{1n}^2, r_{2n}^2 > \\ &= (< r_{1n}^2, r_{1n}^2 > - < \tilde{R}_{1n}^2, \tilde{R}_{1n}^2 >) \\ &\quad + (< r_{2n}^2, r_{2n}^2 > - < \tilde{R}_{2n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >) \\ &\quad + 2 < r_{1n}^2, r_{2n}^2 > + \| \tilde{R}_{1n}^2 \|_4^4 + \| \tilde{R}_{2n}^2 \|_4^4 \end{aligned} \quad (20)$$

özdeşliği kullanılır. İlk iki terimin limiti

$$\lim_{n\to\infty}(< r_{in}^2, r_{in}^2 > - < \tilde{R}_{in}^2, \tilde{R}_{in}^2 >) = - \| \tilde{R}_i \|_4^4, \quad (i = 1, 2)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda (18) denkleminde verilen sonucun kullanılması ile,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(\| r_{1n}^2 + r_{2n}^2 \|_2^2) &= - \| \tilde{R}_1 \|_4^4 - \| \tilde{R}_2 \|_4^4 \\ &\quad + \lim_{n\to\infty}\{ \| \tilde{R}_{1n} \|_4^4 + \| \tilde{R}_{2n} \|_4^4 \\ &\quad + < r_{2n}^2, r_{2n}^2 > \} \\ &= - \| \tilde{R}_1 \|_4^4 - \| \tilde{R}_2 \|_4^4 \\ &\quad + \lim_{n\to\infty}\{ \| \tilde{R}_{1n} \|_4^4 + \| \tilde{R}_{2n} \|_4^4 \\ &\quad + < R_{2n}^2, R_{2n}^2 > \} \\ &\quad + 2 \lim_{n\to\infty}\{< r_{2n}^2, r_{2n}^2 > - < \tilde{R}_{2n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >\} \\ &= - \| \tilde{R}_1 \|_4^4 - \| \tilde{R}_2 \|_4^4 \\ &\quad + (4(\Omega/3)^{1/2} / j^4) \\ &\quad + 2 \lim_{n\to\infty}\{< r_{2n}^2, r_{2n}^2 > - < \tilde{R}_{2n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >\} \end{aligned} \quad (21)$$

elde edilir ve (19) ifadesindeki limit hesabı (21) denkleminin sağ tarafındaki limitin hesabına indirgenir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} < r_{2n}^2, r_{2n}^2 > &= < r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 > + < r_{1n}^2, \tilde{R}_2^2 > \\ &\quad - 2 < r_{1n}^2, \tilde{R}_2 \tilde{R}_{2n} > \end{aligned}$$

yazılabildiğinden ve $\{r_{1n}^2\}$ dizisi sıfıra yakınsadığından, $\lim_{n\to\infty} < r_{1n}^2, \tilde{R}_2^2 > = 0$ olur. Böylece (21) ifadesindeki limit için

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\{< r_{2n}^2, r_{2n}^2 > - < \tilde{R}_{2n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{-2 < \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2 > \\ &\quad + < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2 > - 2 < r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2 >\} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\{\tilde{R}_{2n}^2\}$ dizisi $\tilde{R}_2^2$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığından,

$$\lim_{n\to\infty} < \tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2 > = < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2 >$$

olur. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} < \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2 > = < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2 >$$

$$\lim_{n\to\infty} < r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}\tilde{R}_2 > = 0$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için üçgen ve Cauchy-Schwartz eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|< \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2 > - < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2 >| \\ &= |< \tilde{R}_{1n}\tilde{R}_1, \tilde{R}_{2n}^2 > \\ &\quad - < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2 > + < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2 > \\ &\quad - < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_{2n}^2 >| \\ &= |< \tilde{R}_1^2, r_{2n}(\tilde{R}_{2n}, \tilde{R}_2) > \\ &\quad + < \tilde{R}_1 r_{1n}, \tilde{R}_{2n}^2 >| \\ &\le |< \tilde{R}_1^2, r_{2n}(\tilde{R}_{2n}, \tilde{R}_2) >| \\ &\quad + |< \tilde{R}_1 r_{1n}, \tilde{R}_{2n}^2 >| \\ &\le < r_{2n}^2, \tilde{R}_1^2 >^{1/2} < (\tilde{R}_{2n}, \tilde{R}_2)^2, \tilde{R}_1^2 >^{1/2} \\ &\quad + < r_{1n}^2, \tilde{R}_1^2 >^{1/2} < \tilde{R}_{2n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\{r_{1n}\}$ ve $\{r_{2n}\}$ dizileri sıfıra yakınsadığından eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider. Bu ise gösterilmek istenen sonuçtur. Benzer şekilde

$|< r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 \tilde{R}_2 >|$ terimine Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanarak elde edilen

$$|< r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 \tilde{R}_2 >| \le < r_{1n}^2, \tilde{R}_2^2 >^{1/2} < r_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >^{1/2}$$

eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadelerin limiti yine sıfır olur. Bu sonuçlar ile

$$\lim_{n\to\infty}(< r_{1n}^2, r_{2n}^2 > - < \tilde{R}_{1n}^2, \tilde{R}_{2n}^2 >) = - < \tilde{R}_1^2, \tilde{R}_2^2 >$$

elde edilir. Böylece (21) ifadesinin limiti

$$\lim_{n\to\infty}(\| r_{1n}^2 + r_{2n}^2 \|_2^2)^{1/4} = \left(\| \tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2 \|_2^2 + \frac{4(\Omega/3)^{1/2}}{j^4} \right)^{1/4}$$

olarak bulunur. Bunun sonucunda, (19) limiti

$$\lim_{n\to\infty} J(r_{1n}, r_{2n}) = \frac{(2-b_1)^{\frac{3}{8}}((2\Omega/3)-b_2)^{\frac{1}{8}}}{\left(\| \tilde{R}_1^2 + \tilde{R}_2^2 \|_2^2 + \frac{4(\Omega/3)^{\frac{1}{2}}}{j^4} \right)^{\frac{1}{4}}} \quad (22)$$

olarak elde edilir.

Böylece $j \le J(r_{1n}, r_{2n})$ eşitsizliği ile (19) ve (22) denklemleri kullanılarak

$$4\left(\frac{\Omega}{3}\right)^{1/2} \le (2-b_1)^{3/2}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{1/2} + b_1^{3/2} b_2^{1/2} \quad (23)$$

bulunur. (23) ifadesinin üst sınırı, $f(b_1,b_2) = (2-b_1)^{3/2}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{1/2} + b_1^{3/2} b_2^{1/2}$ sürekli fonksiyonunun, $0 \le b_1 \le 2$ ve $0 \le b_2 \le 2\Omega/3$ değerleri için, mutlak maksimumu hesaplanarak elde edilir. Bu durumda $\max f(b_1,b_2) = 4(\Omega/3)^{1/2}$ bulunur. Bu sonuç ile (23) eşitsizliği

$$(2-b_1)^{3/2}(\frac{2\Omega}{3} - b_2)^{1/2} + b_1^{3/2} b_2^{1/2} = 4\left(\frac{\Omega}{3}\right)^{1/2} \quad (24)$$

denklemine indirgenir. Sonuç olarak $f(b_1,b_2)$ sürekli fonksiyonu mutlak maksimum değerini $(b_1,b_2) = (0,0)$ ve $(b_1,b_2) = (2, 2\Omega/3)$ noktalarında aldığından ve ayrıca Lieb'in Kompaktlık Lemması nedeniyle $b_1 \ne 0$ ve $b_2 \ne 0$ olduğundan, (24) denkleminin tek çözümü, f fonksiyonunun mutlak maksimum değerini aldığı $(b_1,b_2) = (2, 2\Omega/3)$ noktasıdır.

Bu sonuç ile $(\tilde{R}_{1n}, \tilde{R}_{2n})$ dizilerinin $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ uzayındaki $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \ne (0,0)$ fonksiyonlarına kuvvetli yakınsadığı, yani $J(u,v)$ fonksiyonelini minimize eden bir fonksiyon çiftinin varlığı gösterilmiş olur.

Bundan sonra $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyon çiftinin pozitifliğini göstermek için $\tilde{R}_1 \ne 0$ ve $\tilde{R}_2 \ne 0$ olduğu gösterilmelidir. $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyonları J fonksiyonelini minimize ettiğinden her $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ için

$$J(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) \le J(u,v)$$

yazılabilir. (7) denklem sisteminin çözümü olan herhangi $(\bar{R}_1, 0)$ ve $(0, \bar{R}_2)$ fonksiyon çiftlerinin J fonksiyonelini minimize ettiğini göstermek için;

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) \le \inf\{J(\bar{R}_1, 0), J(0, \bar{R}_2)\} \quad (25)$$

koşulunu sağlayan ve (7) denklem sisteminin çözümü olan en az bir $(\tilde{u}, \tilde{v})$ çiftinin $\tilde{u} \ne 0$ ve $\tilde{v} \ne 0$ olacak şekilde var olduğunu göstermek gerekir. Bu durumda eğer $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{R}_1, \bar{R}_1)$ veya $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{R}_2, \bar{R}_2)$ olarak seçilirse iki durumda da (7) sisteminin sağlandığı görülebilir. Ayrıca;

$$J(\frac{\bar{R}_1}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{R}_1}{\sqrt{2}}) = J(\bar{R}_1, 0) \text{ ve}$$

$$J(\frac{\bar{R}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{R}_2}{\sqrt{2}}) = J(0, \bar{R}_2)$$

olduğundan (25) koşulu da sağlanmış ve J fonksiyonelini minimize eden $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyon çiftinin pozitifliği gösterilmiş olur.

Son olarak $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyonlarının $J(u,v)$ fonksiyonelinin (14) ile verilen Euler-Lagrange denklemlerini sağladığı gösterilmelidir. Bunun için $J(u,v)$ fonksiyonelinin

$$\delta J = \frac{d}{d\varepsilon} J(\tilde{R}_1 + \varepsilon\eta_1, \tilde{R}_2 + \varepsilon\eta_2)|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \text{her } \eta_1, \eta_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan birinci varyasyonu hesaplanmalıdır. Bu aşamada Pohozaev özdeşliklerini sağlayan

$$\|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2 = 2, \; \|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2 = \frac{2\Omega}{3}$$

kısıtları ve

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\Omega(\tilde{R}_1^2 - \tilde{R}_2^2) - \frac{3e^2\gamma}{4}(\tilde{R}_1^2 - \tilde{R}_2^2)^2 \right) dx = 0$$

şeklini alan (8) Pohozaev özdeşliği kullanılırsa, $J(u,v)$ fonksiyonelinin varyasyonu

$$\delta J = A\int_{\mathbb{R}} \{[-\tilde{R}_{1,xx} + \Omega\tilde{R}_1 + \gamma e^2(\tilde{R}_1^2 - \tilde{R}_2^2)\tilde{R}_1]\eta_1$$
$$[-\tilde{R}_{2,xx} + \Omega\tilde{R}_2 + \gamma e^2(\tilde{R}_1^2 - \tilde{R}_2^2)\tilde{R}_2]\eta_2\} dx = 0,$$

şeklinde elde edilir. Burada A katsayısı

$$A = \frac{(\|\tilde{R}_1\|_2^2 + \|\tilde{R}_2\|_2^2)^{3/8}}{4(\|\tilde{R}_{1,x}\|_2^2 + \|\tilde{R}_{2,x}\|_2^2)^{\frac{7}{8}} \|\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2\|_2^{\frac{1}{2}}}$$

olarak tanımlanmıştır. $J(u,v)$ fonksiyonelinin keyfi η_1 ve η_2 fonksiyonları için sıfır olması, ancak ve ancak $(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)$ fonksiyonlarının (14) sistemini sağlaması ile mümkündür. Diğer bir deyişle $J(u,v)$ fonksiyonelinin Euler-Lagrange denklemleri (14) denklem sistemidir ve $R_i = e\tilde{R}_i$, $(i = 1,2)$ fonksiyonları (7) sistemini sağlar.

Uyarı: (4) denklem sisteminin

$$H = \int_{\mathbb{R}} (|\phi_x|^2 + |\psi_x|^2 + \beta(|\phi|^2 + |\psi|^2)u) dx$$

şeklinde bir enerji fonksiyoneli vardır. Yalnız dalga çözümleri için bu enerji fonksiyoneli

$$H = \int_{\mathbb{R}} (R_{1,x}^2 + R_{2,x}^2 + \frac{c^2}{4}(R_1^2 + R_1^2) - \gamma(R_1^2 + R_2^2)^2) dx$$

şeklini alır. a pozitif bir sabit olmak üzere sistemin enerji fonksiyoneli ve (13) ile verilmiş $J(u,v)$ fonksiyoneli arasında

$$H(R_1, R_2) \geq -a\frac{1}{\inf J(R_1, R_2)} \tag{26}$$

şeklinde bir eşitsizlik mevcuttur. (26) eşitsizliği H enerji fonksiyonelini minimize eden temel durum çözümlerinin aynı zamanda J fonksiyonelini de minimize ettiğini gösterir.

Kaynaklar

Berestycki, H., Gallouet, T. ve Kavian, O., (1983). Non-Linear Euclidean scalar field-equations in the plane, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie I. Mathematique*, **297**, 307-310.

Berestycki, H. ve Lions, P. L., (1983). Nonlinear scaler field equations I, existence of a ground-state, *Archive for Rational Mechanics and Analysis.*, **82**, 313-345.

Coleman, S., Glaser, V. ve Martin, A., (1978). Action minima among solutions to a class of euclidean field equations, *Communications in. Mathematical Physics*, **58**, 211-221.

Craik, A.D.D., (1985). *Wave interactions and fluid flows*, Cambridge University Press.

Esteban, M.J., (1980). Existence d'une infinité d'ondes solitaires pour des équatios des champs non linéaires, *Annales de la Faculte des Scencesde Toulouse, Math*ematiques, **2**, 181-191.

Erbay, S., (2000). Nonlinear interaction between long and short waves in a generalized elastic solid, *Chaos, Solitons and Fractals*, **11**, 1789-1798.

Weinstein, M.I., (1983). Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576.

Ma, Y.C., (1981). The resonant interaction among long and short waves, *Wave Motion*, **3**, 257-267.

Nagy, B.V.Sz., (1941). Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Universitatis Szegediensi. Atca Scientiarum Mathematicarum*, **10**, 64-74.

Strauss, W.A., (1977). Existence of solitary waves in higher dimensions, *Communications in Mathematical Physics*, **55**, 149-162.