itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:2, Sayı:1, 13-24
Kasım 2004

Tabakalı elastik bir yarım uzayda nonlineer Rayleigh dalgalarının yayılması

Semra AHMETOLAN*, Mevlüt TEYMÜR

İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada farklı bir homojen, izotrop nonlineer hiperelastik malzemeden oluşan sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda küçük ama sonlu genlikli genelleştirilmiş Rayleigh tipi yüzey dalgalarının yayılması incelenmiştir. Harmonik rezonansın olmadığı kabulu ile bir pertürbasyon metodu kullanılarak dalgaların self modülasyonunun asimptotik olarak bir Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin bilinen özellikleri göz önüne alınarak denklemin soliton tipi çözümlerinin varlığı ve ortamı oluşturan malzemelerin nonlineer özelliklerinin dalga modulasyonu üzerindeki etkisi nonlineer tabaka-nonlineer yarım uzay, nonlineer tabaka-lineer yarım uzay ve lineer tabaka-nonlineer yarım uzay modelleri için gözlemlenmiştir. Analizde ayrıca sabit bir dalga sayısı k için tabaka kalınlığının çok ince olması durumunda, $h\to 0$ limiti altında, yani ince tabaka yaklaşımı altında NLS denkleminin katsayılarının davranışları analiz edilmiştir. Sayısal incelemelerde hipotetik malzeme modelleri yanında gerçek malzeme modelleri de kullanılmıştır.
***Anahtar Kelimeler**: Rayleigh dalgaları, self modülasyon, Nonlineer Schrödinger denklemi (NLS).*

The propagation of nonlinear Rayleigh waves in a layered elastic half-space

Abstract

In this work, the propagation of small but finite amplitude generalized Rayleigh waves in an elastic half-space covered by a different elastic layer of uniform and finite thickness is considered. The constituent materials are assumed to be homogeneous, isotropic, compressible hyperelastic. Excluding the harmonic resonance phenomena, it is shown that the nonlinear self modulation of generalized Rayleigh waves is governed asymptotically by a nonlinear Schrödinger (NLS) equation. The stability of the solutions and the exictence of solitary wave-type solutions of a NLS are strongly depend on the sign of the product of the coefficients of the nonlinear and dispersion terms of the equation. Therefore the analysis continues with the examination of dependence of these coefficients on the nonlinear material parameters. Three different models have been considered which are nonlinear layer-nonlinear half space, linear layer- nonlinear half space and nonlinear layer -linear half space. The behavior of the coefficients of the NLS equation was also analyzed under the limit as h (thickness of the layer) goes to zero and k (the wave number) is constant. Then conclusions are drawn about the effect of nonlinear material parameters on the wave modulation. In the numerical investigations both hypothetical and real material models are used.
***Keywords:** Nonlinear Rayleigh waves, self modulation, nonlinear Schrödinger equation (NLS).*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Semra AHMETOLAN. ahmetola@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 56 .
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Tabakalı elastik bir yarım uzayda nonlineer Rayleigh dalgalarının yayılması" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 12.05.2004 tarihinde dergiye ulaşmış, 03.06.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Elastik dalgalar ve elastik yüzey dalgaları ile ilgili incelemeler, jeofizikte, malzemelerin tahribatsız muayeneleri ve elektronik sinyal işleme cihazları teknolojileri gibi değişik önemli uygulama alanları bulması nedeni ile 20.yüzyılın başlarından bugüne kadar devam edegelmiştir. Yakın zamanlarda daha önce su dalgaları, akışkanlar mekaniğinin diğer dalları, plazma fiziği gibi değişik uygulama alanlarında oldukça yaygın olarak kullanılmış olan asimptotik pertürbasyon yöntemleri ile hem dispersiyon olayının ortaya çıktığı hem de dalga yayılması olaylarında dispersiyonun ortaya çıkmasına neden olan sınırlara sahip nonlineer elastik ortamlarda çeşitli tipten problemler incelenmiştir. Bunlardan bir kısmı homojen izotrop elastik bir yarım uzayda Rayleigh dalgalarının yayılması ile ilgilidirler (Kalyanasundaram, 1981; Parker, 1983; Parker, 1988). Bu çalışmalarda dispersif olmayan Rayleigh dalgaları için yayılma ve çeşitli harmonik etkileşim problemleri ele alınmıştır. Son yıllarda ince bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda Rayleigh dalgalarının yayılmaları, dalgaların yayılma olayına nonlineerliğin etkisi ve soliton tipi dalgaların varlığı üzerine bazı araştırmalar mevcuttur Maugin vd., 1992; Porubov ve Samsonov, 1995; Eckl vd., 1998; Eckl vd., 2001; Kovalev vd., 2002). Bu çalışmalarda "ince tabaka", "lineer tabaka", "lineer yarım uzay" varsayımları yapılarak sonuçlar elde edilmiştir.

Tabakanın çok ince olması varsayımı, yani ince film yaklaşımı altında yapılan incelemeler bazı uygulamalar açısından önemli olmalarına rağmen tabakanın sonlu kalınlıklı olduğu kabulu ile bir asimptotik yöntem kullanılarak problem incelendiğinde farklı ve değişik sonuçlar elde edilebilir. Bu dikkate alınarak, bu çalışmada, sonlu kalınlıklı ve ikinci mertebe nonlineer homojen izotrop elastik bir malzeme ile kaplı, farklı bir ikinci mertebe nonlineer homojen izotrop elastik malzemeden meydana gelen bir yarım uzayda Rayleigh tipi yüzey dalgalarının modulasyonu bir pertürbasyon metodu kullanılarak incelenmektedir. İncelemede "lineer yarım uzay", "lineer tabaka", "ince tabaka" varsayımları yapılmamaktadır. Dolayısı ile elde edilen sonuçlardan tabakanın kalınlığının, tabakanın ve yarım uzayın nonlineerliğinin yayılma olayı üzerindeki etkilerini incelemek mümkün olacaktır. Çalışmanın ilk bölümünde nonlineer tabakalı bir yarım uzayda Rayleigh tipi yüzey dalgalarının yayılmasını karakterize eden hareket denklemleri ve sınır koşulları türetilmiştir. Yukarıda da belirtildiği gibi tabakanın sonlu uniform kalınlıklı olduğu ve hem tabakanın hem de yarım uzayın farklı özelliklere sahip ikinci mertebe nonlineer homojen izotrop elastik malzemelerden meydana geldiği varsayılmıştır. Ayrıca tabaka ile yarım uzayın ideal olarak bağlı oldukları da varsayılmaktadır. Yani tabaka ile yarım uzayın ara yüzeyi üzerinde yerdeğiştirmeler ve gerilmeler süreklidirler. Daha sonra nonlineer yayılmayı modelleyen sınırdeğer probleminin nonlineer dalga modulasyonu için asimptotik analiz yapılmıştır. Analizde değişik ölçekler metodu kullanılmıştır. Zayıf nonlineerlikle dispersiyon dengelenerek modulasyonun asimptotik olarak bir Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin çözümlerinin nonlineerliğe bağlılığını incelemek için tabakayı ve yarım uzayı oluşturan malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulmuş, nonlineer malzeme parametreleri değiştirilerek, genelleştirilmiş nonlineer Rayleigh dalgalarının modulasyonunu karakterize eden NLS denkleminin katsayılarının dalga sayılarına göre değişimleri elde edilmiştir. Bu inceleme sayısal olarak gerçekleştirilmiş ve üç ayrı model gözönüne alınmıştır; (i) Nonlineer Tabaka-Nonlineer Yarım Uzay, (ii) Lineer Tabaka-Nonlineer Yarım Uzay, (iii) Nonlineer Tabaka-Lineer Yarım Uzay. Ayrıca $kh \to 0$ limitinde Δ'nın davranışını yarım uzayın nonlineerliğinin etkilediği tabakanın nonlineer parametrelerinin sabit tutulup, yarım uzayın nonlineer parametreleri değiştirilerek de gözlemlenmiştir. İncelemelerde gerçek malzeme modelleri de kullanılmıştır.

Problemin tanımı ve temel denklemler

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sıra ile (x_1, x_2, x_3) ve (X_1, X_2, X_3) sıralı sayıları ile gösterilmektedir. Başlangıç konumunda:

$$D_1=\{(X_1, X_2, X_3)|\ 0<X_2<h,\ X_1 \text{ ve } X_2 \in (-\infty,\infty)\} \quad (1)$$

bölgesini dolduran ve elastik bir malzemeden oluşan sonlu ve düzgün h kalınlıklı bir tabaka:

$$D_2=\{(X_1, X_2, X_3)|\ -\infty<X_2<h,\ X_1 \text{ ve } X_2 \in (-\infty,\infty)\} \quad (2)$$

bölgesini dolduran ve tabakadan farklı bir elastik malzemeden oluşan yarım uzayı kaplamaktadır. Bu tabakalı yarım uzayda X_1 ekseni boyunca yayılan ve

$$x_i=X_i+u_i^{(m)}(X_1,X_2,t),\ x_3=X_3,\ i=1,2. \quad (3)$$

denklemleri ile tanımlanan dalga hareketi bir düzlem hareketidir ve $u_i^{(1)}$ D_1 bölgesindeki; $u_i^{(2)}$ D_2 bölgesindeki noktaların sırası ile X_i yönündeki yerdeğiştirme fonksiyonlarıdır. Bu dalga hareketine etki eden kütle kuvvetlerinin bulunmadığı varsayılırsa olayı betimleyen denklemler maddesel koordinatlarda:

$$T^{(m)}_{\beta 1,\beta}=\rho_0^{(m)}\ddot{u}_1^{(m)},\ T^{(m)}_{\beta 2,\beta}=\rho_0^{(m)}\ddot{u}_2^{(m)},\ m=1,2. \quad (4)$$

olarak yazılır. Burada T_{Kl} birinci tür Piola-Kirchhof gerilme tensörünü, virgülden sonraki bir alt indis, bu indisin belirlediği kartezyen koordinata göre kısmi türevi ve u_i'nun üzerindeki bir nokta da zamana göre kısmi türevi göstermektedir. $\rho_0^{(m)}$ ise ilgili ortamın başlangıç konumundaki yoğunluğunu göstermektedir. Bir alan büyüklüğünün üzerindeki parantez içerisindeki indis m=1 için büyüklüğün tabakaya m=2 için ise büyüklüğün yarım uzaya ait olduğunu göstermektedir. Bundan sonra tanımlanacak tüm diferansiyel operatörlerde, fonksiyonlarda ve katsayılarda da aynı uylaşım geçerli olacaktır.

Dalga hareketi esnasında X_2=h serbest yüzeyi üzerinde gerilmelerin sıfır olması; X_2=0 ara yüzeyi boyunca yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olmaları ve serbest yüzeyden uzaklarda dalga hareketi sonucu oluşan yerdeğiştirmelerin sıfıra gitmeleri koşullarından;

$$X_2=h\text{'da} \qquad T_{21}^{(1)}=0 \quad \text{ve} \quad T_{22}^{(1)}=0, \qquad (5)$$

$$X_2=0\text{'da} \qquad u_1^{(1)}=u_1^{(2)} \quad \text{ve} \quad u_2^{(1)}=u_2^{(2)}, \qquad (6)$$

$$T_{21}^{(1)}=T_{21}^{(2)} \quad \text{ve} \quad T_{22}^{(1)}=T_{22}^{(2)}, \qquad (7)$$

$$X_2 \to -\infty \quad \text{için} \qquad u_1^{(2)},\ u_2^{(2)} \to 0 \qquad (8)$$

sınır koşulları yazılır. Yayılma ortamını oluşturan tabakanın ve yarım uzayın farklı homojen, izotrop, nonlineer, sıkışabilir hiper elastik malzemelerden oluştukları varsayımı ile küçük ama sonlu genlikli dalgaların yayılması incelendiğinden bu malzemeler için gerilme deformasyon bağıntıları kuadratik yaklaşım altında aşağıdaki formda alınmaktadırlar;

$$\begin{aligned} T_{Kk} = & [\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})+\frac{\lambda}{2}u_{p,M}u_{p,M}+\frac{(6l+3m+n)}{2}(\mathrm{tr}\mathbf{E})^2 \\ & -\frac{(m+n)}{2}(\mathrm{tr}\mathbf{E}^2)]\delta_{Kk}+[2\mu-(m+n)(\mathrm{tr}\mathbf{E})]E_{KL}\delta_{Lk} \qquad (9) \\ & +\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})u_{k,K}+2\mu E_{KL}u_{k,L}+\mu u_{p,K}u_{p,L}\delta_{Lk}+nE_{KN}E_{NL}\delta_{Lk}. \end{aligned}$$

Burada **E** lineer Lagrangian şekil değiştirme tensörüdür. λ, μ Làme (lineer) malzeme sabitleri; l, m ve n ise Murnaghan (nonlineer) malzeme sabitleridirler (Eringen ve Şuhubi, 1974). (4) ile verilen hareket denklemleri ile (5-8) ile verilen sınır koşullarında (9)'da verilen gerilme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılır ve denklemlerde (X_1, X_2, X_3) yerine (X,Y,Z), $u_1^{(m)}$ ve $u_2^{(m)}$ yerine de sıra ile $u^{(m)}$ ve $v^{(m)}$ yazılırsa yapılan yaklaşım altında tabakalı bir elastik yarım uzayda yayılan nonlineer Rayleigh tipi yüzey dalgalarının yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları aşağıdaki formlarda elde edilirler;

$$L_1^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=N_1^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)}), \qquad (10a)$$

$$L_2^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=N_2^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)}). \qquad (10b)$$

$$Y=h\text{ 'da} \quad B_1^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)})=0,\ B_2^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)})=0; \quad (11)$$

$$Y=0\text{ 'da} \qquad u^{(1)}=u^{(2)},\ v^{(1)}=v^{(2)}, \qquad (12a,b)$$

$$\text{ve}\quad \begin{aligned} &B_1^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)})=\kappa B_1^{(2)}(u^{(2)},v^{(2)}),\\ &B_2^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)})=\kappa B_2^{(2)}(u^{(2)},v^{(2)}); \end{aligned} \tag{12c,d}$$

$$Y \to -\infty \quad \text{için} \qquad u^{(2)},v^{(2)} \to 0. \tag{13}$$

Burada lineer $L_i^{(m)}$ ve nonlineer $N_i^{(m)}$ ve $B_i^{(m)}$, (i=1,2), operatörleri

$$L_1^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=\frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial t^2}-c_{m_L}^2\frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial X^2} -c_{m_T}^2\frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial Y^2}-(c_{m_L}^2-c_{m_T}^2)\frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial X\partial Y} \tag{14a}$$

$$L_2^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=\frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial t^2}-c_{m_L}^2\frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial Y^2} -c_{m_T}^2\frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial X^2}-(c_{m_L}^2-c_{m_T}^2)\frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial X\partial Y} \tag{14b}$$

$$N_1^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=\frac{\partial}{\partial X}[\eta_1^{(m)}(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X})^2+\eta_2^{(m)}(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y})^2 +2\eta_2^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y}+\eta_3^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X} +\eta_4^{(m)}K_1^{(m)}]+\frac{\partial}{\partial Y}[(2\eta_4^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y}+\eta_3^{(m)}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X})K_2^{(m)}] \tag{15a}$$

$$N_2^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=\frac{\partial}{\partial X}[(2\eta_4^{(m)}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X}+\eta_3^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y})K_2^{(m)}] +\frac{\partial}{\partial Y}[\eta_1^{(m)}(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y})^2+\eta_2^{(m)}(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X})^2 +2\eta_2^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y}+\eta_3^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X}+\eta_4^{(m)}K_1^{(m)}] \tag{15b}$$

$$B_1^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=c_{m_T}^2(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y}+\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X}) +(\eta_3^{(m)}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X}+2\eta_4^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y})K_2^{(m)} \tag{16a}$$

$$B_2^{(m)}(u^{(m)},v^{(m)})=c_{m_L}^2\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y}+(c_{m_L}^2-2c_{m_T}^2)\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y} +\eta_1^{(m)}(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y})^2+\eta_2^{(m)}(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X})^2+2\eta_2^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y} +\eta_3^{(m)}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X}+\eta_4^{(m)}K_1^{(m)} \tag{16b}$$

ve $K_1^{(m)}=(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial Y})^2+(\frac{\partial v^{(m)}}{\partial X})^2$, $K_2^{(m)}=(\frac{\partial u^{(m)}}{\partial X}+\frac{\partial v^{(m)}}{\partial Y})$ olarak tanımlanmaktadırlar. Ayrıca $c_{m_T}^2=\mu^{(m)}/\rho_0^{(m)}$ ve $c_{m_L}^2=(\lambda^{(m)}+2\mu^{(m)})/\rho_0^{(m)}$'dir ve m=1 için tabakadaki, m=2 için yarım uzaydaki sırası ile lineer enine ve boyuna dalgaların yayılma hızlarını göstermektedirler. $\kappa=\rho_0^{(2)}/\rho_0^{(1)}$'dir ve ilgili ortamın nonlineer davranışını karakterize eden $\eta_i^{(m)}$ sabitleri ise $\beta_1^{(m)}=3\lambda^{(m)}/2+3l^{(m)}+3\mu^{(m)}$, $\beta_2^{(m)}=\lambda^{(m)}/2+3l^{(m)}+m^{(m)}$, $\beta_3^{(m)}=\mu^{(m)}-m^{(m)}/2$, $\beta_4^{(m)}=\lambda^{(m)}/2+\mu^{(m)}-m^{(m)}/4$ olmak üzere $\eta_i^{(m)}=\beta_i^{(m)}/\rho_0^{(m)}$ olarak tanımlanmışlardır.

Genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının non lineer self modulasyonu

Bu bölümde tabakalı yarım uzayda yayılan boyuna ve enine dalgaların faz hızları arasında $c_{1_T}<c_{1_L}<c_{2_T}<c_{2_L}$ eşitsizliğinin geçerli olduğu varsayımı ile inceleme yürütülmektedir. Bu varsayım altında, dalgaların faz hızı c, "$c<c_{2_T}$" eşitsizliğini sağlaması durumunda tabakalı yarım uzayın serbest yüzeyinden uzaklaştıkça yer-değiştirmelerin sıfıra gittiği bir yüzey dalgası hareketi varolacaktır, aksi halde yerdeğiştirmeler derinlik arttıkça sınırsız olarak büyüyecektir (Ewing vd., 1957; Achenbach, 1973). Dolayısı ile c:

$$c_{1_T}<c_{1_L}<c<c_{2_T}<c_{2_L},\quad c_{1_T}<c<c_{1_L}<c_{2_T}<c_{2_L},\quad c<c_{1_T}<c_{1_L}<c_{2_T}<c_{2_L}, \tag{17}$$

eşitsizliklerinden birini sağladığında fiziksel anlamı olan bir yüzey dalga hareketi varolacaktır. Diğer taraftan $c_{1_L}<c<c_{2_T}$ olduğunda yani (17)'deki ilk eşitsizlik sağlandığında tabakalı yarım uzayın serbest yüzeyine paralel yönde ilerleyen, bu yöne dik yönde tabaka içerisinde Y'ye göre periyodik bir değişim sergileyen, yarım uzayda ise derinlik arttıkça yer değiştirmelerin sıfıra gittiği bir yüzey dalgası hareketi oluşmaktadır. Bu durumda dalga hareketi tabaka içerisinde yoğunlaşmaktadır. Bu dalgalar genelleştirilmiş

Rayleigh dalgaları olarak adlandırılmaktadırlar (Ewing vd., 1957).

Bu bölümde, lineer özellikleri (17)'deki ilk eşitsizliği sağlayan tabakalı bir nonlineer elastik yarım uzayda küçük ama sonlu genlikli genelleştirilmiş Rayleigh tipi yüzey dalgalarının self modulasyonu bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olan değişik ölçekler yöntemi kullanılarak incelenecektir (Jeffrey ve Kawahara, 1982). Bu amaçla, $\varepsilon>0$ nonlineerliğin mertebesini ölçen küçük bir parametre olmak üzere, X, Y ve t bağımsız değişkenleri yerine:

$$x_i=\varepsilon^i X\,,\ y_i=\varepsilon^i Y \text{ ve } t_i=\varepsilon^i t\,,\ i=0,1,2 \tag{18}$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlanmaktadır. Burada (x_0,y_0,t_0) değişkenleri hızlı değişimleri; (x_i,y_i,t_i), i=1,2 değişkenleri yavaş değişimleri karakterize etmektedirler. Tabakaya ait yer değiştirme fonksiyonlarının, $u^{(1)}$ ve $v^{(1)}$, $(x_0, x_1, x_2,\ \ y_0, t_0, t_1, t_2)$; yarım uzaya ait yerdeğiştirme fonksiyonlarının, $u^{(2)}$ ve $v^{(2)}$, ise $(x_0, x_1, x_2,\ \ y_0, y_1, y_2, t_0, t_1, t_2)$ değişkenlerine bağlı oldukları varsayılmaktadır. Daha sonra $u^{(m)}$ ve $v^{(m)}$ fonksiyonlarının $\{\varepsilon^n\}$ asimptotik dizisine göre

$$u^{(m)}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n^{(m)},\quad v^{(m)}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n v_n^{(m)} \tag{19}$$

yapılarında uniform geçerli asimptotik açılımlara sahip oldukları varsayılmaktadır. Eğer (10) ile verilen hareket denklemleri ve (11-13) ile verilen sınır koşulları (18)'de verilen yeni değişkenler cinsinden yazılır ve daha sonra (19)'da verilen asimptotik açılımlar kullanılırsa, ε'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek $u_n^{(m)}$ ve $v_n^{(m)}$ fonksiyonlarının ardaşık olarak hesaplanabilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bunlardan ilk üçü aşağıda verilmektedir;

$O(\varepsilon)$:

$$L_{1_{(1)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)})=0,\ L_{2_{(1)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)})=0 \tag{20}$$

$y_0=h$ 'da

$$B_{1_{(1)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)})=0,\ B_{2_{(1)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)})=0; \tag{21}$$

$y_0=0$ 'da $\qquad u_1^{(1)}=u_1^{(2)},\ v_1^{(1)}=v_1^{(2)},$ (22a,b)

ve

$$B_{1_{(1)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)})=\kappa B_{1_{(1)}}^{(2)}(u_1^{(2)},v_1^{(2)}),$$
$$B_{2_{(1)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)})=\kappa B_{2_{(1)}}^{(2)}(u_1^{(2)},v_1^{(2)})\,; \tag{22c,d}$$

$y_0\to-\infty$ için $\qquad u_1^{(2)},v_1^{(2)}\to 0.$ (23)

$O(\varepsilon^2)$:

$$L_{1_{(1)}}^{(m)}(u_2^{(m)},v_2^{(m)})+L_{1_{(2)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)})=N_{1_{(2)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)}),$$

$$L_{2_{(1)}}^{(m)}(u_2^{(m)},v_2^{(m)})+L_{2_{(2)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)})=N_{2_{(2)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)}) \tag{24}$$

$y_0=h$ 'da

$$B_{1_{(2)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)},u_2^{(1)},v_2^{(1)})=0,$$
$$B_{2_{(2)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)},u_2^{(1)},v_2^{(1)})=0; \tag{25}$$

$y_0=0$ 'da $\qquad u_2^{(1)}=u_2^{(2)},\ v_2^{(1)}=v_2^{(2)},$ (26a,b)

ve

$$B_{1_{(2)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)},u_2^{(1)},v_2^{(1)})=\kappa B_{1_{(2)}}^{(2)}(u_1^{(2)},v_1^{(2)},u_2^{(2)},v_2^{(2)}),$$

$$B_{2_{(2)}}^{(1)}(u_1^{(1)},v_1^{(1)},u_2^{(1)},v_2^{(1)})=\kappa B_{2_{(2)}}^{(2)}(u_1^{(2)},v_1^{(2)},u_2^{(2)},v_2^{(2)}); \tag{26c,d}$$

$y_0\to-\infty$ için $\qquad u_2^{(2)},v_2^{(2)}\to 0.$ (27)

$O(\varepsilon^3)$:

$$L_{1_{(1)}}^{(m)}(u_3^{(m)},v_3^{(m)})+L_{1_{(2)}}^{(m)}(u_2^{(m)},v_2^{(m)})+L_{1_{(3)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)})$$
$$=N_{1_{(3)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)},u_2^{(m)},v_2^{(m)}), \tag{28a}$$

$$L_{2_{(1)}}^{(m)}(u_3^{(m)},v_3^{(m)})+L_{2_{(2)}}^{(m)}(u_2^{(m)},v_2^{(m)})+L_{2_{(3)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)})$$
$$=N_{2_{(3)}}^{(m)}(u_1^{(m)},v_1^{(m)},u_2^{(m)},v_2^{(m)}) \tag{28b}$$

$y_0=h$ 'da

$$B^{(1)}_{1_{(2)}}(u^{(1)}_1,v^{(1)}_1,u^{(1)}_2,v^{(1)}_2,u^{(1)}_3,v^{(1)}_3)=0,$$
$$B^{(1)}_{2_{(2)}}(u^{(1)}_1,v^{(1)}_1,u^{(1)}_2,v^{(1)}_2,u^{(1)}_3,v^{(1)}_3)=0; \qquad (29)$$

$$y_0=0 \text{ 'da} \quad u_3^{(1)}=u_3^{(2)},\ v_3^{(1)}=v_3^{(2)}, \qquad (30a,b)$$

ve

$$B^{(1)}_{1_{(2)}}(u^{(1)}_1,v^{(1)}_1,u^{(1)}_2,v^{(1)}_2,u^{(1)}_3,v^{(1)}_3) =\kappa B^{(2)}_{1_{(2)}}(u^{(2)}_1,v^{(2)}_1,u^{(2)}_2,v^{(2)}_2,u^{(2)}_3,v^{(2)}_3), \qquad (30c)$$

$$B^{(1)}_{2_{(2)}}(u^{(1)}_1,v^{(1)}_1,u^{(1)}_2,v^{(1)}_2,u^{(1)}_3,v^{(1)}_3) =\kappa B^{(2)}_{2_{(2)}}(u^{(2)}_1,v^{(2)}_1,u^{(2)}_2,v^{(2)}_2,u^{(2)}_3,v^{(2)}_3); \qquad (30d)$$

$$y_0 \to -\infty \quad \text{için} \quad u_3^{(2)},v_3^{(2)} \to 0. \qquad (31)$$

Burada $L^{(m)}_{i_{(1)}}$, $N^{(m)}_{i_{(1)}}$ ve $B^{(m)}_{i_{(1)}}$ diferansiyel operatörleri (14)'de tanımlanan $L^{(m)}_i$, $N^{(m)}_i$ ve $B^{(m)}_i$ diferansiyel operatörlerinde sırası ile X, Y ve t yerine x_0, y_0 ve t_0 yazılması ile elde edilen operatörlerdir. $L^{(m)}_{i_{(j)}}$, $N^{(m)}_{i_{(j)}}$ ve $B^{(m)}_{i_{(j)}}$, j=2,3, diferansiyel operatörlerinin açık yapıları ise çok kalabalık yapıda oldukları için burada verilmeyeceklerdir. Dikkat edilirse birinci mertebe problem klasik lineer problem ile eş yapıdadır. Daha üst mertebe problemler ise, sağ yanlarındaki terimler bir önceki problemlerden belirlenecekleri için, homojen olmayan lineer problemlerdir. Genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının self modulasyonu incelendiğinden, birinci mertebe problemdeki (20) hareket denklemlerinin çözümleri (23) radyasyon koşulunun kullanılması ile:

$$u_1^{(1)}=\sum_{l=1}^{\infty}(A^{(l)}_{1_{(1)}}e^{ilkp_Ly_0}+A^{(l)}_{2_{(1)}}e^{-ilkp_Ly_0} -p_TA^{(l)}_{3_{(1)}}e^{ilkp_Ty_0}+p_TA^{(l)}_{4_{(1)}}e^{-ilkp_Ty_0})e^{il\varphi}+c.c. \qquad (32a)$$

$$v_1^{(1)}=\sum_{l=1}^{\infty}(p_LA^{(l)}_{1_{(1)}}e^{ilkp_Ly_0}-p_LA^{(l)}_{2_{(1)}}e^{-ilkp_Ly_0} +A^{(l)}_{3_{(1)}}e^{ilkp_Ty_0}+A^{(l)}_{4_{(1)}}e^{-ilkp_Ty_0})e^{il\varphi}+c.c. \qquad (32b)$$

$$u_1^{(2)}=\sum_{l=1}^{\infty}(B^{(l)}_{1_{(1)}}e^{lk\nu_Ly_0}+i\nu_TB^{(l)}_{2_{(1)}}e^{lk\nu_Ly_0})e^{il\varphi}+c.c.$$
$$v_1^{(2)}=\sum_{l=1}^{\infty}(-i\nu_LB^{(l)}_{1_{(1)}}e^{lk\nu_Ly_0}+B^{(l)}_{2_{(1)}}e^{lk\nu_Ly_0})e^{il\varphi}+c.c. \qquad (32c,d)$$

olarak yazılırlar. Burada bir "c.c." kendinden önceki terimlerin kompleks eşleniğini temsil etmektedir, ayrıca $\varphi=kx_0-\omega t_0$ ve α=L,T için, $p_\alpha=(c^2/c^2_{1_\alpha}-1)^{1/2}$ ve $\nu_\alpha=(1-c^2/c^2_{2_\alpha})^{1/2}$ olarak tanımlanmaktadırlar. ω açısal frekans, k dalga sayısı, $A^{(l)}_{i_{(1)}}$ ve $B^{(l)}_{j_{(1)}}$ katsayı fonksiyonları ise (x_1,x_2,t_1,t_2) yavaş değişkenlere bağlı birinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarını temsil etmektedirler ve problemin sınır koşulları kullanılarak belirlenirler. (32) ile verilen çözümler (21-22) sınır koşullarında kullanılırsa:

$$\mathbf{U}^{(l)}_1=[A^{(l)}_{1_{(1)}}\ A^{(l)}_{2_{(1)}}\ A^{(l)}_{3_{(1)}}\ A^{(l)}_{4_{(1)}}\ B^{(l)}_{1_{(1)}}\ B^{(l)}_{2_{(1)}}]^T \qquad (33)$$

olmak üzere:

$$\mathbf{W}_l\mathbf{U}^{(l)}_1=\mathbf{0}, \qquad l=1,2,... \qquad (34)$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir ve $\mathbf{W}_l$, l=1 için dispersiyon matrisidir. (34) sisteminin l=1 için bir non-trivial çözüme sahip olması için

$$\det\mathbf{W}_1=0 \qquad (35)$$

olması gerekir ve bu da lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısını verir. Bu çalışmada genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının self modulasyonu incelendiği için esas moda ait dalga sayısının harmonik rezonans koşulunu sağlamadığı, yani $l\ge 2$ için $\det\mathbf{W}_l\neq 0$ olduğu, kabul edilmekte ve bu mertebede çözümlerde uzun dalgayı temsil eden kısımlar özdeş olarak sıfır alınmaktadır. Bu koşullar altında (34) cebrik denklem sisteminin çözümleri **R**, $\mathbf{W}_1\mathbf{R}=\mathbf{0}$ denklemini sağlayan bir sütun vektör olmak üzere:

$l=1$ için $\mathbf{U}_1^{(l)}=A_1(x_1,x_2,t_1,t_2)\mathbf{R}$ (36)

$l\geq 2$ için $\mathbf{U}_1^{(l)}\equiv 0$ (37)

olarak elde edilirler. Burada A_1 dalga modulasyonunun yavaş değişkenlere bağlı birinci mertebe kompleks genlik fonksiyonudur. (36-37) kullanılarak birinci mertebe çözümler

$$u_1^{(1)}=A_1(R_1e^{ikp_Ly_0}+R_2e^{-ikp_Ly_0}-p_TR_3e^{ikp_Ty_0}+p_TR_4e^{-ilkp_Ty_0})e^{i\varphi}+c.c. \quad (38a)$$

$$v_1^{(1)}=A_1(p_LR_1e^{ikp_Ly_0}-p_LR_2e^{-ikp_Ly_0}+R_3e^{ikp_Ty_0}+R_4e^{-ilkp_Ty_0})e^{i\varphi}+c.c. \quad (38b)$$

$$u_1^{(2)}=A_1(R_5e^{k\nu_Ly_0}+i\nu_TR_6e^{k\nu_Ty_0})e^{i\varphi}+c.c. \quad (38c)$$

$$v_1^{(2)}=A_1(-i\nu_LR_5e^{k\nu_Ly_0}+R_6e^{k\nu_Ty_0})e^{i\varphi}+c.c. \quad (38d)$$

olarak elde edilirler. (38) çözümleri ile klasik lineer problemin çözümleri aynı formdadırlar. Yanlız lineer problemde A_1 sabit iken burada dalga katarının nonlineer self modulasyonunu temsil eden yavaş değişen genlik fonksiyonudur. Birinci mertebe pertürbasyon probleminin çözümlerinin tamamen belirlenebilmesi için A_1'in hesaplanması yeterli olacaktır. Bu amaçla (38) ile verilen birinci mertebe çözümler ikinci mertebe problemin (24) ile verilen hareket denklemlerinde kullanılırsa bu denklemler aşağıdaki formlara indirgenirler;

$$L_{1_{(1)}}^{(m)}(u_2^{(m)},v_2^{(m)})=\beta_{1_{(2)}}^{(m)}e^{i\varphi}+\gamma_{1_{(2)}}^{(m)}A_1^2e^{2i\varphi}+c.c. \quad (39a)$$

$$L_{2_{(1)}}^{(m)}(u_2^{(m)},v_2^{(m)})=\alpha_{2_{(2)}}^{(m)}|A_1|^2+(\beta_{2_{(2)}}^{(m)}e^{i\varphi}+\gamma_{2_{(2)}}^{(m)}A_1^2e^{2i\varphi}+c.c.) \quad (39b)$$

Denklemlerin sağ yanlarındaki $\alpha_{i_{(2)}}^{(m)}$ ve $\gamma_{i_{(2)}}^{(m)}$ katsayı fonksiyonları y_0 değişkenine; $\beta_{i_{(2)}}^{(m)}$'lar ise (x_1,x_2,y_0,t_1,t_2) değişkenlerine bağlıdırlar. Dikkat edilirse (39)'daki denklemlerin sağ yanlarında temel ve ikinci harmonikleri temsil eden terimlerin yanında, yani $e^{i\varphi}$ ve $e^{2i\varphi}$'li terimler, x_0, t_0 hızlı değişkenlerine bağlı olmayan terimler $\alpha_{2_{(2)}}^{(1)}|A_1|^2$ ve $\alpha_{2_{(2)}}^{(2)}|A_1|^2$ bulunmaktadır. Bunlar uzun dalga yayılımı ile ilgili terimlerdir ve ikinci mertebe problemde birinci mertebe çözümlerin katkısını temsil eden kaynak terimlerini oluştururlar ve benzer terimler sınır koşullarında da ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle ikinci mertebe problemin çözümleri:

$$u_2^{(m)}=\hat{u}_2^{(m)}+\mathbf{u}_2^{(m)},\quad v_2^{(m)}=\hat{v}_2^{(m)}+\mathbf{v}_2^{(m)} \quad (40)$$

olarak iki parçaya ayrılabilir. Burada $\hat{u}_2^{(m)}$ ve $\hat{v}_2^{(m)}$ fonksiyonları uzun dalgaları temsil eden çözümlerdir ve m=1 için (x_1,x_2,y_0,t_1,t_2) değişkenlerine; m=2 için $(x_1,x_2,y_0,y_1,y_2,t_1,t_2)$ değişkenlerine bağlıdırlar. $\mathbf{u}_2^{(m)}$ ve $\mathbf{v}_2^{(m)}$ fonksiyonları ise $(x_0,x_1,x_2,y_0,t_0,t_1,t_2)$ değişkenlerine bağlı dalga modulasyonunu temsil eden çözümleri belirtmektedirler. $\hat{u}_2^{(m)}$ ve $\hat{v}_2^{(m)}$ çözümleri hesaplanıp (40) ile verilen toplamsal ayrıştırma ile birlikte (24) denklemlerinde ve (25-26) sınır koşullarında kullanılırsa $\mathbf{u}_2^{(m)}$ ve $\mathbf{v}_2^{(m)}$ mod çözümlerinin hesaplanabileceği sınır değer problemi elde edilir. Bu sınır değer probleminin $\mathbf{u}_2^{(m)}$ ve $\mathbf{v}_2^{(m)}$ çözümleri:

$$\mathbf{u}_2^{(m)}=\bar{\mathbf{u}}_2^{(m)}+\tilde{\mathbf{u}}_2^{(m)},\quad \mathbf{v}_2^{(m)}=\bar{\mathbf{v}}_2^{(m)}+\tilde{\mathbf{v}}_2^{(m)} \quad (41)$$

formunda iki parçaya ayrılabilir, öyleki $\bar{\mathbf{u}}_2^{(m)}$ ve $\bar{\mathbf{v}}_2^{(m)}$ elde edilen denklemlerin özel çözümlerini temsil etmektedirler ve belirsiz katsayılar yöntemi kuralları uygulanarak belirlenirler. $\tilde{\mathbf{u}}_2^{(m)}$ ve $\tilde{\mathbf{v}}_2^{(m)}$ ise (41) çözüm formlarının hareket denklemlerinde ve sınır koşullarında kullanılması ile elde edilen homojen denklemlerin ve homojen olmayan sınır koşullarının çözümleridirler. $\tilde{\mathbf{u}}_2^{(m)}$ ve $\tilde{\mathbf{v}}_2^{(m)}$ çözümleri birinci mertebe homojen denklem çözümleri gibi (32)'de verilen formdadırlar. Burada $A_{i_{(1)}}^{(l)}$ ve $B_{j_{(1)}}^{(l)}$ katsayıları yerine sırası ile $A^{(l)}_{i_{(2)}}$ ve $B^{(l)}_{j_{(2)}}$ yazılmalıdır. $A^{(l)}_{i_{(2)}}$ ve $B^{(l)}_{i_{(2)}}$ 'ler ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdırlar. $\tilde{\mathbf{u}}^{(m)}_2$ ve $\tilde{\mathbf{v}}^{(m)}_2$ çözümleri homojen olmayan sınır koşullarında kullanılırsa aşağıdaki cebrik denklem sistemi elde edilir.

$$\mathbf{W_1 U}^{(l)}_2=\mathbf{b}^{(l)}_2 \quad . \tag{42}$$

Burada $\mathbf{U}^{(l)}_2=[A^{(l)}_{1_{(2)}}\, A^{(l)}_{2_{(2)}}\, A^{(l)}_{3_{(2)}}\, A^{(l)}_{4_{(2)}}\, B^{(l)}_{1_{(2)}}\, B^{(l)}_{2_{(2)}}\,]^T$, $\mathbf{b}^{(2)}_2 \neq \mathbf{0}$, $l \geq \mathbf{3}$ için $\mathbf{b}^{(l)}_2 \equiv \mathbf{0}$ ve

$$\mathbf{b}^{(1)}_2=-i(\frac{\partial A_1}{\partial t_1}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}-\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}) \tag{43}$$

dır. l=1 için det$\mathbf{W}_1$=0 ve $\mathbf{b}^{(1)}_2 \neq \mathbf{0}$ olduğu için (42) denkleminin l=1 için bir çözüme sahip olabilmesi için **L**, $\mathbf{LW}_1=\mathbf{0}$ denklemi ile tanımlanan bir satır vektör olmak üzere

$$\mathbf{L.b}^{(1)}_2=0 \tag{44}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Gerekli ara işlemlerden sonra (44) koşulundan:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1}+V_g\frac{\partial A_1}{\partial t_1}=0\,,\; V_g=-(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial k}\mathbf{R})/(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial \omega}\mathbf{R}) \tag{45}$$

elde edilir. Burada V_g dalgaların grup hızıdır. (45) denklemi A_1'in V_g grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığını gösterir, yani $A_1(x_1-V_g t_1,x_2,t_2)$ yapısında olacaktır. (42) denkleminin l=1 için çözümü,

$$\mathbf{U}^{(1)}_2=A_2(x_1,x_2,t_1,t_2)\mathbf{R}-i\frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k}+V_g\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega}) \tag{46}$$

olarak elde edilir (Teymur, 1988; Ahmetolan ve Teymur, 2003). Diğer taraftan $l \neq 1$ için det$\mathbf{W}_1 \neq 0$ ve $l \neq 1,2$ için de $\mathbf{b}^{(l)}_2 \equiv \mathbf{0}$ olduğundan (42) denkleminin çözümleri l=2 için $\mathbf{U}^{(2)}_2=\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{b}_2^{(2)}$ ve $l \geq 3$ için ise $\mathbf{U}^{(l)}_2 \equiv \mathbf{0}$ olarak elde edilir. Burada A_2 dalga modulasyonunun ikinci mertebe yavaş değişen genliğini temsil etmektedir ve gerektiğinde daha üst mertebe pertürbasyon problemlerinin çözümlerinden elde edilebilir. Bu çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalga yayılımı ile ilgilenildiği için yalnızca birinci mertebe uniform geçerli çözüm inşaa edilmeye çalışılmaktadır, bu nedenle A_1'in belirlenmesi yeterli olacaktır. Bu amaçla (38) ile verilen birinci mertebe çözümler ile ikinci mertebe çözümler üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (24) ile verilen denklemlerinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}L^{(m)}_{i_{(1)}}(u^{(m)}_3,v^{(m)}_3)&=\alpha^{(m)}_{i_{(3)}}+(\beta^{(m)}_{i_{(3)}}e^{i\varphi}+c.c.)\\&+(e^{\pm 2i\varphi},e^{\pm 3i\varphi}\text{'li terimler}),\quad i,m=1,2\end{aligned} \tag{47}$$

denklemleri elde edilir. Burada $\alpha^{(m)}_{i_{(3)}}$ ve $\beta^{(m)}_{i_{(3)}}$ katsayı fonksiyonları (x_1,x_2,y_0,t_1,t_2) değişkenlerine bağlı ifadeler içermektedirler. Dikkat edilirse, üçüncü mertebe probleme ait (47) denklemleri de, ikinci mertebe problemdeki gibi sağ yanlarında dalga modulasyonu ile ilgili terimler yanında uzun dalga ile ilgili kaynak terimleri de barındırmaktadırlar. Dolayısı ile bu denklemlerin çözümleri de (40) formunda yani, $u^{(m)}_3=\hat{u}^{(m)}_3+\mathbf{u}^{(m)}_3$ ve $v^{(m)}_3=\hat{v}^{(m)}_3+\mathbf{v}^{(m)}_3$ olarak iki parçaya ayrılır öyleki, $\hat{u}^{(m)}_3$ ve $\hat{v}^{(m)}_3$ fonksiyonları uzun dalgaları; $\mathbf{u}^{(m)}_3$ ve $\mathbf{v}^{(m)}_3$ fonksiyonları ise dalga modulasyonunu temsil eden çözümlerdir. $\hat{u}^{(m)}_3$ ve $\hat{v}^{(m)}_3$ çözümleri elde edilip, $u^{(m)}_3$ ve $v^{(m)}_3$ için verilen toplamsal ayrıştırma ile birlikte üçüncü mertebe pertürbasyon probleminin (47) denklemleri ile (25-26) sınır koşullarında kullanılırsa dalga modulasyonunu temsil eden çözümler için, ikinci mertebede olduğu gibi bir sınır değer problemi elde edilir. Bu sınırdeğer probleminin çözümleri, ikinci mertebe problemde olduğu gibi $\mathbf{u}^{(m)}_3=\bar{\mathbf{u}}^{(m)}_3+\tilde{\mathbf{u}}^{(m)}_3$ ve $\mathbf{v}^{(m)}_3=\bar{\mathbf{v}}^{(m)}_3+\tilde{\mathbf{v}}^{(m)}_3$ formunda iki parçaya ayrılabilir, öyleki $\bar{\mathbf{u}}^{(m)}_3$ ve $\bar{\mathbf{v}}^{(m)}_3$ elde edilen denklemlerin özel çözümleri; $\tilde{\mathbf{u}}^{(m)}_3$ ve $\tilde{\mathbf{v}}^{(m)}_3$ ise yukarıda tanımlanan çözüm formlarının hareket denklemlerinde ve sınır koşullarında kullanılması ile elde edilen homojen denklemlerin ve homojen olmayan sınır koşullarının çözümleridirler ve $\overline{\mathbf{u}}_3^{(m)}=\sum_{l=1}^{3}\mathbf{e}_{l(3)}^{(m)}\mathbf{e}^{li\phi}$+c.c. ve $\overline{\mathbf{v}}_3^{(m)}=\sum_{l=1}^{3}\mathbf{f}_{l(3)}^{(m)}\mathbf{e}^{li\phi}$+c.c. olarak alınır. Burada $\mathbf{e}_{l(3)}^{(m)}$ ve $\mathbf{f}_{l(3)}^{(m)}$ terimleri (x_1,x_2,y_0,t_1,t_2) değişkenlerine bağlı ve l=1 için dalgaların self enteraksiyonu ile ilgili; l=2,3 için ise ikinci ve üçüncü harmonik enteraksiyonu etkilerini gösteren fonksiyonlardır. Bu incelemede, genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının nonlineer self modulasyonu ile ilgilenildiğinden birinci mertebe uniform geçerli çözümlerin inşaası için $e^{i\varphi}$'li terimin katsayı fonksiyonları $\mathbf{e}_{1(3)}^{(m)}$ ve $\mathbf{f}_{1(3)}^{(m)}$'nin belirlenmeleri yeterli olacaktır. Diğer taraftan $\tilde{\mathbf{u}}_3^{(m)}$ ve $\tilde{\mathbf{v}}_3^{(m)}$ çözümleri (32)'deki çözüm formunda $A_{i(1)}^{(l)}$ ve $B_{j(1)}^{(l)}$ katsayıları yerine $A_{i(3)}^{(l)}$ ve $B_{j(3)}^{(l)}$ yazılarak alınabilir. Bu çözümler ile $\mathbf{u}_1^{(m)}$, $\mathbf{v}_1^{(m)}$, $\mathbf{u}_2^{(m)}$, $\mathbf{v}_2^{(m)}$, $\overline{\mathbf{u}}_3^{(\mathbf{m})}$ ve $\overline{\mathbf{v}}_3^{(\mathbf{m})}$ çözümleri üçüncü mertebe problemin yukarıda elde edilen sınır koşullarında kullanılması ile:

$$\mathbf{W}_1\mathbf{U}_3^{(l)}=\mathbf{b}_3^{(l)} \tag{48}$$

elde edilir. Burada l=1,2,3 için $\mathbf{b}_3^{(l)}\neq\mathbf{0}$ ve $l\geq 4$ için de $\mathbf{b}_3^{(l)}=\mathbf{0}$'dır. Uzun ara işlemlerden sonra l=1 için $\mathbf{b}_3^{(1)}$ aşağıdaki formda yazılabilir,

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3^{(1)}=&-i\Big(\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\frac{\partial A_2}{\partial t_1}-\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\Big)\mathbf{R}-i\Big(\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\frac{\partial A_1}{\partial t_2}\\&-\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\Big)\mathbf{R}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2}-2\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial\omega\partial k}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial t_1}\\&+\frac{\partial^2\mathbf{W}_1}{\partial k^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}\Big)\mathbf{R}+\Big(\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial k}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}-\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial\omega}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial t_1}\Big)\\&\Big(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial k}+V_g\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\omega}\Big)+\mathbf{F}|A_1|^2A_1.\end{aligned} \tag{49}$$

Burada **F** vektörü lineer ve nonlineer malzeme parametreleri ve dalga sayısına bağlıdır ve nonlineer malzeme sabitleri $\eta_i^{(m)}=0$ olduğunda **F**=**0**'dır. l=1 için (48) denkleminin nontrivial çözümünün olması için $\mathbf{L}.\mathbf{b}_3^{(1)}=0$ uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. A_2'nin de A_1 gibi $(x_1-V_g t_1)$ formunda olduğu kabul edilir ise ve $\tau=\omega t_2$, $\xi=k\varepsilon^{-1}(x_2-V_g t_2)$, $A=kA_1$, $\Gamma=k^2\tilde{\Gamma}/\omega$ ve $\Delta=\tilde{\Delta}/\omega k^2$ boyutsuz değişkenlerinin ve sabitlerinin tanımlanması ile uygunluk koşulundan A genlik fonksiyonu için

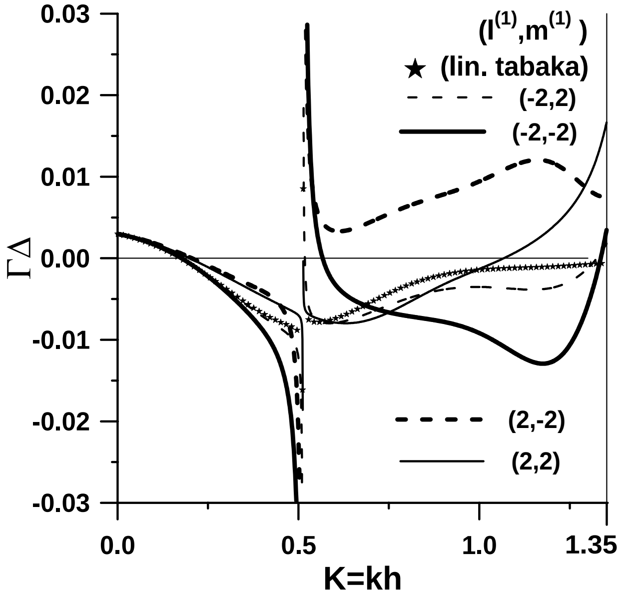
$$i\frac{\partial A}{\partial\tau}+\Gamma\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2}+\Delta|A|^2A=0 \tag{50}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\Delta}=-\mathbf{L}.\mathbf{F}/[\mathbf{L}(\partial\mathbf{W}_1/\partial\omega)\mathbf{R}]$ ve $\tilde{\Gamma}=d^2\omega/2dk^2$ olarak tanımlanmışlardır. Γ katsayı fonksiyonu sadece lineer; Δ ise hem lineer hem de nonlineer malzeme özelliklerine bağlı katsayılardır. Bu denklem bir nonlineer Schrödinger (NLS) denklemidir ve birçok alanda nonlineer dalga modülasyonunu asimptotik olarak karakterize etmek için türetilmiştir (Ablowitz ve Clarckson, 1991; Dodd vd., 1982). Dikkat edilirse (50) denkleminin verilen bir $A(\xi,0)=A_0(\xi)$ başlangıç koşulu için çözümü bulunursa birinci mertebe çözümler (46) bağıntıları kullanılarak elde edilirler. Buradaki $A_0(\xi)$ başlangıç değeri de tabakalı ortamdaki yerdeğiştirmelerin başlangıç değerlerine bağlıdır.

Sonuçlar ve tartışma

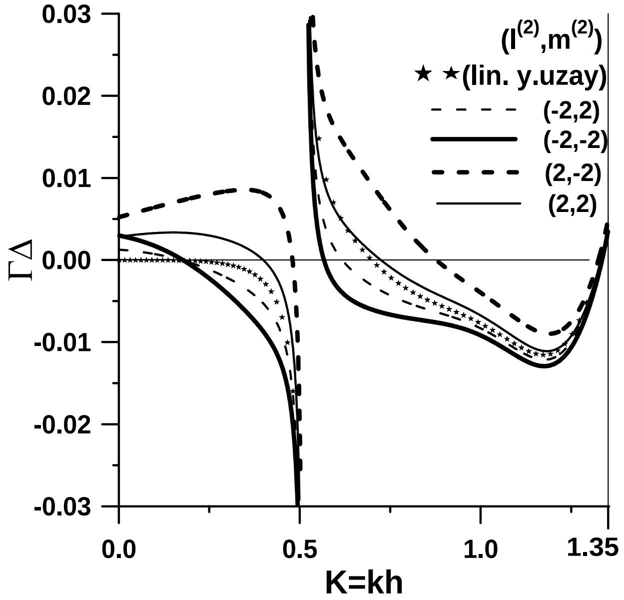
Sonlu ve uniform kalınlıklı bir tabaka ile kaplı bir yarım uzayda yayılan genelleştirilmiş nonlineer Rayleigh dalgalarının self modulasyonunun asimptotik olarak bir NLS denklemi ile yönetildiği yukarıda gösterilmiştir. Asimptotik dalga alanını karakterize eden NLS denkleminin çözümlerinin kararlılığı ve çeşitli soliton tipi çözümlerinin varlıklarının denklemin dispersiyon teriminin katsayısı Γ ile nonlineer teriminin katsayısı Δ`nın çarpımlarının işaretine bağlı olduğu bilinmektedir. Ayrıca $|\xi|\to\infty$ için sıfıra giden başlangıç uyarıları, eğer $\Gamma\Delta>0$ ise bir dizi zarf solitona; $\Gamma\Delta<0$ ise sönen titreşimlere dönüşürler (Dodd vd., 1982; Ablowitz ve

Clarckson, 1991; Samsonov, 2001). Bu nedenle nonlineer malzeme özelliklerinin dalga modulasyonu üzerindeki etkisini, yani ΓΔ teriminin işaretinin değişimine etkisini, gözlemlemek için tabaka ve yarım uzayı meydana getiren malzemelerin lineer özellikleri sabit alınıp nonlineer özellikler değiştirilerek ΓΔ çarpımının, dispersiyon bağıntısının ilk dalı için, boyutsuz dalga sayısı K=kh'ya göre değişimi incelenmiştir. Bu inceleme, Γ ve Δ'nın yapıları çok karmaşık olduğu için sayısal olarak gerçekleştirilmiş ve üç ayrı model gözönüne alınmıştır; nonlineer tabaka-nonlineer yarım uzay, lineer tabaka-nonlineer yarım uzay ve nonlineer tabaka-lineer yarım uzay modelleri. Ayrıca ince tabaka limiti altında, yani k=sabit, $h\to 0$ limiti altında, Γ ve Δ'nın davranışları da analize dahil edilmiştir. Ortamı meydana getiren malzemelerin boyutsuz lineer özellikleri, $c_{1_T}/c_{1_L}=1/\sqrt{3}$, $c_{1_T}/c_{2_T}=0.365$, $c_{1_T}/c_{2_L}=0.211$ ve $\kappa=1.332$ olarak alınmıştır (Achenbach ve Epstein, 1967). Seçilen bu lineer model için (35) ile verilen genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarına ait dispersiyon bağıntısının ilk dalı 0<K<1.3523 değerleri için mevcuttur, ve bu değerler için Γ<0 olmaktadır. Nonlineer malzeme özellikleri de $\mathbf{l}^{(m)}=l^{(m)}/\mu^{(m)}$ ve $\mathbf{m}^{(m)}=m^{(m)}/\mu^{(m)}$ olarak boyutsuzlandırılmıştır. Şekil1'de yarım uzaya ait nonlineer parametreler $(\mathbf{l}^{(2)},\mathbf{m}^{(2)})$ için (-2,-2) değerleri verilerek sabitlenmiş, tabakaya ait nonlineer parametreler için değişik değerler seçilerek tabakanın nonlineeritesinin ΓΔ üzerindeki etkisi gözlemlenmiştir. Dikkat edilirse küçük K dalga sayılarında $(\mathbf{l}^{(1)},\mathbf{m}^{(1)})$ için seçilen (2,2) ile (2,-2) nonlineer modelleri ve (-2,-2) ile (-2,2) nonlineer modellerini temsil eden eğrilerin davranışları birbirlerine benzemektedirler. Buradan sabit bir k dalga sayısına karşılık tabaka kalınlığının çok ince olması ($h\to 0$), yani küçük K dalga sayılarında tabakaya ait $\mathbf{l}^{(1)}$ parametresinin $\mathbf{m}^{(1)}$'e göre ΓΔ değişimi üzerinde çok daha etkili olduğu görülebilir. Ayrıca tabaka kalınlığı arttıkça, ya da K dalga sayısı büyüdükçe, tabaka için seçilen herbir nonlineer modelin davranışı, belirgin bir şekilde birbirlerinden farklılık göstermektedir, yani tabakanın nonlineeritesinin tabaka kalınlığı arttıkça dalga modulasyonu:

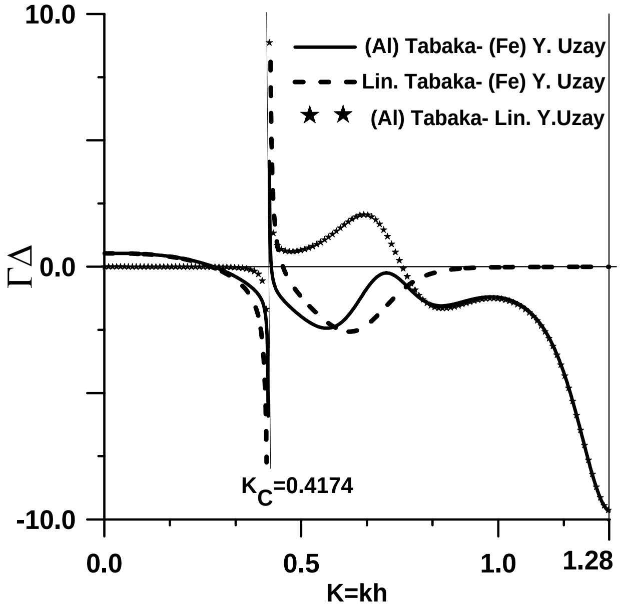


Şekil 1. Tabakaya ait nonlineer malzeme özelliklerinin ΓΔ'nın değişimi üzerindeki etkisi

üzerinde daha etkili olduğu görülebilir. Örneğin (2,-2) nonlineer modeli için K'nın büyük değerlerinde ΓΔ>0 olduğu için NLS denkleminin zarf soliton çözümleri var iken tabakanın lineer olması durumunda dark soliton çözümleri var olmaktadır. Diğer taraftan küçük K değerlerinde seçilen tüm nonlineer modeller için ΓΔ>0 olduğundan zarf soliton tipi çözümler var olmaktadır. Şekil 2'de ise tabakaya ait nonlineer malzeme parametreleri $(\mathbf{l}^{(1)},\mathbf{m}^{(1)})$ için (-2,-2) değerleri alınmış ve yarım uzay için değişik nonlineer malzeme modelleri seçilerek yarım uzayın nonlineeritesinin dalga modulasyonu üzerindeki etkisi gözlemlenmiştir. Küçük K dalga sayılarında, ya da tabaka kalınlığının çok ince olması durumuda ($h\to 0$), lineer yarım uzay modeli ile nonlineer yarım uzay modelleri karşılaştırılacak olursa yarım uzayın nonlineeritesinin etkisi belirgin bir şekilde görülebilir. Seçilen tüm nonlineer yarım uzay modelleri için tabakanın çok ince olması durumunda, küçük K değerlerinde, ΓΔ>0 olduğu için zarf soliton çözümleri mevcut iken lineer yarım uzay modelinde Δ=0 olduğu için ΓΔ=0 olmaktadır. K'nın büyük değerlerinde, yani tabaka kalınlığının artması durumunda yarım uzay için seçilen tüm nonlineer modellerin davranışları birbirlerine benzemektedir, yani yarım uzayın nonlineerlik



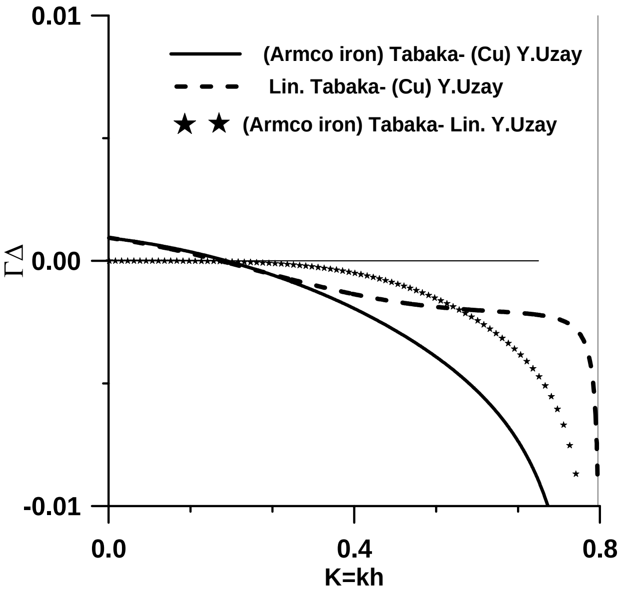
Şekil 2. Yarım uzaya ait nonlineer malzeme özelliklerinin ΓΔ'nın değişimi üzerindeki etkisi



Şekil 3. (Al) tabaka-(Fe) yarım uzay gerçek malzeme modeli için ΓΔ'nın değişimi.

etkisi büyük K değerlerinde azalmaktadır. Diğer taraftan Şekil 1 ve Şekil 2'de $K \cong 0.51$ değerinde ikinci harmonik rezonans durumu oluştuğundan seçilen lineer malzeme özellikleri için Δ, dolayısı ile ΓΔ sınırsız olarak büyümektedir. Bu nedenle bu kritik K dalga sayısı civarında NLS denklemi dejenere olur, yani geçerliliğini yitirir.

Gerçek malzeme modelleri için de ΓΔ'nın boyutsuz K dalga sayısına göre değişimlerini incelemek için farklı iki gerçek model seçilerek ΓΔ'nın değişimi gözlemlenmiştir (Seeger ve Buck, 1960; Nagy, 2003). Alüminyum tabaka-demir yarım uzay modeli için lineer ve nonlineer malzeme parametreleri $c_{1_T}/c_{1_L}=0.485$, $c_{1_T}/c_{2_T}=0.321$, $c_{1_T}/c_{2_L}=0.174$, $\kappa=2.92$ ve $(\mathbf{l}^{(1)},\mathbf{m}^{(1)})=(0.485,0.32)$, $(\mathbf{l}^{(2)},\mathbf{m}^{(2)})=(0.174,2.92)$ değerlerini almaktadırlar. Armco demir tabaka-bakır yarım uzay modeli için ise lineer ve nonlineer malzeme parametreleri $c_{1_T}/c_{1_L}=0.547$, $c_{1_T}/c_{2_T}=0.449$, $c_{1_T}/c_{2_L}=0.218$, $\kappa=1.1328$ ve $(\mathbf{l}^{(1)},\mathbf{m}^{(1)})=(0.49,0.444)$, $(\mathbf{l}^{(2)},\mathbf{m}^{(2)})=(0.215,3.30)$ değerlerini almaktadırlar. ΓΔ'nın seçilen iki model için K'ya göre değişimleri için Şekil 3 ve Şekil 4'te çizim yapılmıştır. Şekil 3'te seçilen malzemelerin lineer özelliklerinden dolayı K=0.4174 değerinde ikinci harmonik rezonans durumu ortaya çıkıyor iken, Şekil 4'de seçilen malzeme modeli için harmonik rezonansın ortaya çıkmadığı görülmektedir. Seçilen her iki gerçek model için çok küçük K değerlerinde yarım uzayın nonlineerlik etkisi belirgin bir şekilde görülmektedir. Seçilen nonlineer yarım



Şekil 4. (Armco Fe) tabaka-(Cu) yarım uzay gerçek malzeme modeli için ΓΔ'nın değişimi

uzay modellerinde ΓΔ>0 olduğu için NLS denkleminin zarf soliton çözümleri mevcuttur. Diğer taraftan lineer yarım uzay modelinde ise Δ=0 olduğu için ΓΔ=0 olmaktadır. Bu durumda NLS denklemi lineer Schrödinger denklemine dönüşür. Yani Δ=0'nın sıfır olduğu dalga sayıları civarında nonlineerlik ve dispersiyon dengelenmemektedir. Bu dalga sayıları civarında nonlineerlikle dispersiyonu dengeleyen bir denklem elde etmek için analiz bu dengeyi kuracak şekilde değiştirilmelidir.

Kaynaklar

Ablowitz, M.J. ve Clarckson, P.A., (1991). Solitons, nonlinear evolution equations and ınverse scattering, *Cambridge University Press.*, Cambridge.

Achenbach, J.D. ve Epstein, H., (1967). Dynamic interaction of a layered and a half space, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 5512-5542.

Achenbach, J.D., (1973). Wave propagation in elastic solids, *North-Holland Publishing Co*., Amsterdam.

Ahmetolan, S. ve Teymur, M., (2003). Nonlinear modulation of SH Waves in a two layered plate and formation of surface SH waves. *International journal of Non-Linear Mechanics*, **38**, 1237-1250.

Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. ve Morris, H.C., (1982). Solitons and nonlinear wave equations, *Academic Press*, London.

Eckl, C., Mayer, A.P. ve Kovalev, A.S., (1998). Do surface acoustic solitons exist?, *Physical Review Letters*, **81**, 5, 983-986.

Eckl, C., Schöllmann, Mayer, A.P., Kovalev, A.S. ve Maugin G.A., (2001). On the stability of surface acoustic pulse trains in coated elastic media, *Wave Motion*, **34**, 35-49.

Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1974). *Elastodynamics finite motions I*, Academic Press, New York.

Ewing, W.M., Jardesky, W.S. ve Press, F., (1957). *elastic waves in layered media*, Mc Graw-Hill, New York.

Jeffrey, A. ve Kawahara, T., (1982). *Asyptotic methods in nonlinear wave theory*. Pitman Advenced Publishing, Boston.

Kalyanasundaram, N., (1981). Nonlinear mode coupling of surface acoustic waves on an isotropic solid, *International Journal of Engineering Science*, **19**, 279-286.

Kovalev, A.S., Mayer, A.P., Eckl, C. ve Maugin, G.A., (2002). Solitary rayleigh waves in the presence of surface nonlinearities. *Physical Review E*, **66**, 3, art no:036615.

Maugin, G.A., Hadouaj, H. ve Malomed, B.A., (1992). Nonlinear coupling between shear horizontal surface solitons and rayleigh modes on elastic stractures, *Physical Review B*, **45**,17, 9688-9694.

Nagy, P.B., (2003). Nondestructive Evaluation (Class Notes), Aerospace Engineering, University of Cincinnati.

Parker, D.F. ve Talbot, F.M., (1983). In nonlinear deformation waves, Edited by U. Nigul and J. Engelbrecht, *Springer* , Berlin.

Parker, D.F., (1988). Wave form evolution for nonlinear surface acoustic waves, *International Journal of Engineering Science*, **26**, 59-75.

Porubov, A.V. ve Samsonov, A.M., (1995). Long non-linear strain waves in layered elastic half space, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **30**, 6, 861-877.

Samsonov, A.M., (2001). Strain solitons in solids. *Chapman & Hall/CRC.*

Seeger, A. ve Buck, O., (1960). Die experimentelle ermittlung der elastischen konstanten höhererordnung, *Zeitschrift Fur Naturforschung*, **15**a, 1056-1067.

Teymur, M., (1988). Nonlinear modulation of love waves in a compressible hyperelastic layered half space, *International Journal of Engineering Science*, **26**, 9, 907-927.