itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:3, Sayı:1, 3-14
Kasım 2005

Hepdoğruluk problemi: Önerme mantığı ifadelerinin iki boyutlu biçimlere dönüştürülmesi

Lokman KOLUKISA*
Kazım Dirik Mah. Kurtuluş Cad. No: 57/3 Bornova/İZMİR

Özet

Bir önerme ifadesinin hepdoğru (totoloji) olup olmadığının kabul edilebilir bir zamanda bulunması, bilgisayar bilimlerinin önemli bir problemidir. Herhangi bir önerme ifadesinin hepdoğru olup olmadığı, sadece bir kaç değişkene sahip ifadelerde, mümkün her yorum için ifadenin değerini hesaplayarak kolayca bulunabilir. Fakat, ifadedeki değişken sayısı arttıkça yorum sayısı üssel olarak büyümekte ve çözüm için gereken zaman kabul edilebilir sınırların ötesine geçmektedir. Bu çalışmada, bu problemi daha kısa zamanda çözmek için değişik yollar denenmiş ve önerme ifadelerinin iki boyutlu biçimleri elde edilmiştir. Bunun için önerme ifadeleri, daha az değişkene fakat aynı hepdoğruluk değerine sahip başka önerme ifadelerine indirgenmiştir.. Daha sonra bu indirgemeyi başka türlü yapıp yapamayacağımız araştırılmıştır. Bunun sonucu olarak VE bağları ve VE terimleri kavramı ortaya atılmıştır. En sonunda önerme ifadelerinin iki boyutlu biçimlerine ulaşılmıştır.
Anahtar Kelimeler: *Önerme mantığı, Boole ifadeleri, totoloji, hepdoğruluk, çizge, iki boyutlu ifadeler.*

Tautology problem: conversion of propositional logic formulas to two dimensional forms

Abstract

Checking whether a propositional formula is a tautology or not in a feasible time is an important problem of computer science. A simple way of achieving this is to evaluate the formula for each possible interpretation and find whether it is true for every interpretation. However, as the number of variables increases, the number of interpretation increases exponentially and the time to solve the problem becomes unfeasable for even a few variables. In this study, various ways are investigated to solve the problem in a shorter time and at last a two dimensional form of the propositional formulas is obtained. To do this, firstly, the original formula is reduced to other propositional formulas which have less variables but the same truth value. Then it is investigated whether this reduction can be achieved by other means. As a result, the concepts of AND links and AND terms are introduced By the aid of these concepts, some two dimensional forms of the propositional formulas are got and their equivalance to the propositional formulas are shown. Also it is shown that converting a propositional formula to its two dimensional form takes ks time where k is a constant and s is the size of the propositional formula. Thus if the problem is solved for a two dimensional formula in $\partial(s)$ *times, then it would be solved for its propositional form in* $\partial(s)+ks$ *times.*
Keywords: *Propositional logic, Boolean formulas, tautology, graph, two dimensional formulas.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Lokman KOLUKISA. Lkoluk2003@yahoo.com; Tel: (537) 468 18 53.
Makale metni 01.08.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 27.10.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Boole (önerme mantığı) ifadelerini ya da herhangi bir matematiksel ifadeyi belirtmenin çeşitli yolları vardır. Bu makalede, VE, YADA, DEĞİL simgeleri, değişken simgeleri, 0, 1 sabitleri ve parantezlerden oluşan bir dizgi ile gösterilen önerme ifadeleri ele alınacak ve bunlara dizgisel önerme ifadeleri denilecektir. VE, YADA, DEĞİL simgeleri için , sırasıyla,. (nokta), $\vee$, $\neg$ imleri ve değişkenler için x, y, z harfleri tek başlarına yada indislerle beraber kullanılacaktır.

Her Boole ifadesi bir fonksiyona karşılık gelir. Eğer (x_1, x_2, x_3) bir ifadedeki tüm farklı değişkenlerin listesi ise, ifade, $f(x_1, x_2, x_3)$ şeklinde yazılabilir. Eğer her farklı değişkene 0 ya da 1 değerlerinden biri atanırsa o zaman bu değişkenlerin bir yorumu elde edilir. Örneğin (0,0,0) (x_1, x_2, x_3) değişkenlerinin bir yorumudur. O halde, $f(x_1, x_2, x_3)$ ifadesinin (0,0,0) yorumu için değeri $f(0,0,0)$ olur. Eğer değişken sayısı n ise, farklı yorumların sayısı 2^n olur. Eğer iki ifade değişkenlerinin tüm yorumlarında aynı sonucu veriyorsa o zaman bunlar birbirle-rine eşdeğerdir ve aynı fonksiyona karşılık gelirler. Eğer iki ifade en az bir yorum için farklı değerler veriyorsa farklı fonksiyonlara karşılık gelirler. Örneğin $f_1(x,y)=x$ ve $f_2(x,y)=y$ farklı fonksiyonları ifade ederler, çünkü (x,y) değişkenlerinin (0,1) yorumunda $f_1(0,1)=0$ ve $f_2(0,1)=1$ olur. n kadar farklı değişken için mümkün tüm farklı fonksiyonların sayısı 2^{2^n} kadardır.

Bir fonksiyon eğer değişkenlerinin bütün yorumları için 1 değerini veriyorsa hepdoğrudur. Örneğin 1 fonksiyonu herhangi bir değişken listesinin tüm yorumlarında 1 değerini verir. O halde 1 fonksiyonu hepdoğrudur.

Aynı Boole fonksiyonu sonsuz değişik biçimde yazılabilir. Örneğin, $x \vee y$ dizgisi ve $x \vee y \vee x \vee y \ldots x \vee y$ dizgisi aynı fonksiyonu belirtir. O halde, bir ifadenin hepdoğru olup olmadığını bulma problemi şu şekilde ortaya konabilir: "acaba verilen ifade 1 fonksiyonuna eşdeğer midir?".

Bir ifadenin hepdoğru olup olmadığını kontrol etmenin en dolaysız yolu, değişkenlerin her farklı yorumu için ifadenin 1 edip etmediğini hesaplamaktır. n kadar farklı değişken için farklı yorum sayısı 2^n'dir. Büyüklüğü (im sayısı) s olan bir ifadedeki değişken imlerinin sayısı ve dolayısı ile farklı değişkenlerin sayısı en fazla $s/2$ olur. O halde fonksiyon, en çok $2^{s/2}$ kere hesaplanır. Her hesabın aldığı zaman ifadenin büyüklüğü ile doğru orantılıdır. Bu durumda problemi çözmek için gereken zaman kabaca $s.2^{s/2}$ olarak bulunur.

Bu çalışmada problemi daha kısa zamanda çözmek için yöntemler araştırılmış ve önerme mantığı ifadelerinin iki boyutlu biçimlerine ulaşılmıştır. Kullanılan kavramları ve yöntemleri geliştirmek için, önerme mantığı konusunda, tüm konuya giriş kitaplarında bulunabilecek standart bilgiler ve gösterilen referanslar haricinde herhangi bir kaynak kullanılmamıştır. Fakat iki boyutlu biçimlerin özellikleri incelenmemiş ve hepdoğruluk problemi bu tür ifadeler için çözümlenmemiştir. Bu makalenin amacı dizgisel önerme ifadelerinin iki boyutlu ifadelere nasıl dönüştürülebileceğini göstererek iki boyutlu ifadeler kavramını bilim dünyasına tanıtmak ve literatüre girmesini sağlamaktır.

Dizgisel Boole ifadeleri

Teorem 1 $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ gibi bir ifade, yalnız ve yalnızca $f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n).f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ hepdoğru ise hepdoğrudur.

İspat : Açık.

Buna göre, bir ifadeden, aynı hepdoğruluk değerine fakat daha az sayıda değişkene sahip bir başka ifade elde edilebilir (Lammens v.d. 1989). Buna değişken indirgeme işlemi denir ve şu şekilde gösterilir.

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

$$\xrightarrow{x_i} f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n).f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$$

Verilen bir ifadenin tüm değişkenleri bu işlemle elendikten ve geriye kalan sadeleştirildikten sonra elde yalnızca 0 yada 1 kalır. Bu işlemle hepdoğruluk değeri korunduğu için, elde 1 kalması, asıl ifadenin hepdoğru olduğu, elde 0 kalması ise asıl ifadenin hepdoğru olmadığı anlamına gelir. Sadeleştirme, şu eşitlikler, hiç uygulanamayıncaya kadar ifadelere uygulanarak yapılır:

$$0.x=0 \quad 1.x=x \quad 0 \vee x=x \quad 1 \vee x=1 \quad \neg 0=1 \quad \neg 1=0$$

Bir ifadeden x_i değişkenini elemenin en doğrudan yolu, orijinal ifadeden, birinci keresinde, x_i yerine 0 koyarak f_1 , ikinci keresinde ise x_i yerine 1 koyarak f_2 gibi iki ifade elde etmek, bunları sadeleştirmek, gerekirse etraflarına parantez koymak ve .(VE) işlemiyle birleştirmektir. Tüm bu işlemler ks kadar bir zaman alır. Fakat, elde edilen $(f_1).(f_2)$ ifadesinin uzunluğu, en kötü durumda, $2s$'e yakın olur.

Sade biçimler

Bir ifadede, değişkenler, değişkenlerin değilleri ve 0,1 sabitleri atomsu olarak adlandırılır. Örneğin x ve $\neg y$ atomsu fakat $x.\neg y$ atomsu değildir. Bir başka açıdan, atomsular içinde $\vee$ yada . işlemi bulunmayan ifadelerdir.

Eğer bir ifade $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ biçiminde ise buna yadagrubu[1] denir. Bir yadagrubunda, her a_i, o grubun bir öğesidir. Bir başka deyişle bir yadagrubu öğelerinin yadalanmış halidir. Eğer bir yadagrubunun tüm öğeleri atomsu ise o zaman buna temel yadagrubu denilir. Örneğin $x_1 \vee \neg x_2$ ifadesinde x_1 ve $\neg x_2$ atomsudur ve bu bir temel yadagrubudur.

Eğer herhangi bir ifade $a_1.a_2 \ldots a_n$ biçiminde ise buna vegrubu denilir. Bir vegrubunda her a_i, o gurubun bir öğesidir. Bir başka deyişle bir vegrubu, öğelerinin velenmiş halidir. Eğer bir vegrubunda, her a_i bir atomsu ise buna temel vegrubu denilir. Örneğin $x_1.\neg x_1$ bir temel vegrubudur.

Eğer bir vegrubunun tüm öğeleri temel yadagrubu ise buna normal vegrubu yada NVG denilir. Her Boole ifadesinin bir NVG'si vardır. Örneğin aşağıdaki ifade bir NVG'dir.

$$(x_1 \vee x_2).(x_3 \vee \neg x_1 \vee x_4).(0 \vee x_4)$$

Benzer şekilde bir yadagrubunun tüm öğeleri temel vegrubu ise buna normal yadagrubu yada NYG denilir. Her Boole ifadesinin bir NYG'si vardır. Örneğin aşağıdaki ifade bir NYG'dir.

$$x_1.x_2 \vee x_3.\neg x_1.x_4 \vee \neg x_2 \vee 0.x_4$$

Bir NYG'deki her temel vegrubu ya x_i ya $\neg x_i$ içerir yada bunları içermez.

$$x_i.\alpha_1 \vee .. \vee x_i.\alpha_n \vee \neg x_i.\beta_1 \vee .. \vee \neg x_i.\beta_m \vee \delta_1 \vee \ldots \vee \delta_o \qquad (1)$$

Burada herhangi bir j için δ_j ne x_i ne de $\neg x_i$ içeren temel vegrubudur. İçinde hem x_i hem de $\neg x_i$ olan temel vegrupları ya $x_i.\alpha_j$ yada $\neg x_i.\beta_j$ şeklindedir. Eğer herhangi bir α_j yada β_j, x_i ya da $\neg x_i$ içeriyorsa, aşağıdaki eşitlikler uyarınca elenir(Lammens v.d. 1989).

$$\begin{aligned} x_i.\alpha_j(x_i) &= x_i.\alpha_j(1) \\ x_i.\alpha_j(\neg x_i) &= x_i.\alpha_j(0) \\ \neg x_i.\beta_j(x_i) &= \neg x_i.\beta_j(0) \\ \neg x_i.\beta_j(\neg x_i) &= \neg x_i.\beta_j(1) \end{aligned}$$

Böylece, herhangi bir j,k,l için $\alpha_j, \beta_k, \delta_l$ terimleri ne x_i ne de $\neg x_i$ içerir. (1) ifadesi, $\alpha=\alpha_1 \vee \ldots \vee .\alpha_n$, $\beta=\beta_1 \vee .. \vee \beta_m$ ve $\delta=\delta_1 \vee \ldots \vee \delta_o$ olmak üzere

$$x_i.\alpha \vee \neg x_i.\beta \vee \delta \qquad (2)$$

[1] Yadagrubu ve daha sonra kullanılacak olan vegrubu, veterimi, vedüğümü vb gibi kelimeler bu konunun terimleridir. Bu nedenle bitişik yazılacaklardır.

şeklinde daha sade yazılabilir. Buna ifadenin x_i'ye göre sade biçimi yada sadece ‘sade biçim’ denilecektir. Şimdi değişken indirgeme işlemini bu biçim üzerinde görelim.

Makalenin bundan sonraki kısımlarında, dizgisel bir ifadede, $\neg$ işleminin yalnızca değişkenlere yada sabitlere uygulanmış olduğunu varsayılacaktır. Eğer, bir ifade bu biçimde değilse, $2s$ kadar bir zamanda bu biçime getirilebilir (Hopcroft ve Ullman, 1979).

$$
\begin{aligned}
& x_i.\alpha\vee\neg x_i.\beta\vee\delta \\
& \quad \xrightarrow{x_i} (\underset{0}{\cancel{x_i}}.\alpha\vee\neg\underset{1}{\cancel{x_i}}.\beta\vee\delta).(\underset{1}{\cancel{x_i}}.\alpha\vee\neg\underset{0}{\cancel{x_i}}.\beta\vee\delta) \\
& \quad =(0.\alpha\vee 1.\beta\vee\delta).(1.\alpha\vee 0.\beta\vee\delta) \\
& \quad =(\beta\vee\delta).(\alpha\vee\delta) \\
& \quad =\beta.\alpha\vee\delta
\end{aligned}
$$

Bir ifadenin NYG'sini doğrudan ifadeden elde etmek için bir yol, $x.(y\vee z)=x.y\vee x.z$ eşitliğini, hiç uygulanamayıncaya kadar ifadeye uygulamaktır. O zaman, elde edilen NYG'deki her temel vegrubu incelenerek içinde x_i ya da $\neg x_i$ bulundurup bulundurmadığına göre α, β ya da δ olarak sınıflandırılabilir ve gerekli işlemler yapılarak, indirgeme işleminin sonucu olan $\beta.\alpha\vee\delta$ ifadesi elde edilebilir. Fakat bu işlem üssel zaman alır. Farklı değişkenlerin ve bunların değillerinin toplam sayısı $2n$’dir. Bir temel vegrubunda bunların her biri ya var yada yoktur. Bu durumda farklı temel vegruplarının sayısı 2^{2n} olur. Öte yandan, s ifadenin im sayısı olmak üzere, $2n \le s/2$’dir. Dolayısı ile tüm temel vegruplarını oluşturma işlemi kabaca $2^{s/2}$ kadar bir zaman alır.

Şimdi indirgemenin başka türlü yapılıp yapılamayacağını araştıralım.

Kolaylıkla görülebileceği gibi, eğer bir ifadede hiç x_i yok fakat $\neg x_i$'ler var ise, bu ifadenin sade biçimi $\neg x_i.\beta\vee\delta$ şeklinde olur ve indirgeme işlemi şu hale gelir:

$$
\begin{aligned}
\neg x_i.\beta\vee\delta \quad \xrightarrow{x_i} \quad & (\beta\vee\delta).\delta \\
& =\delta
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde, içinde hiç $\neg x_i$ bulundurmayan fakat x_i bulunan bir ifadenin sade biçimi ve indirgenmiş hali şu şekilde olur:

$$
\begin{aligned}
x_i.\alpha\vee\delta \quad \xrightarrow{x_i} \quad & \delta.(\alpha\vee\delta) \\
& =\delta
\end{aligned}
$$

Eğer bir ifadede bir değişkenin yalnızca kendisi varsa (yani değili yoksa) yada yalnızca değili varsa (yani kendisi yoksa) buna yalnız değişken denilecektir. O halde bir ifadedeki tüm yalnız değişkenler, ifadenin sade biçimini elde etmeye gerek olmaksızın, yerine doğrudan 0 koyarak elenebilir. Örneğin $f(x_i)$ içinde x_i bir yalnız değişken olsun. Bu durumda indirgeme şu şekilde yapılabilir.

$$f(x_i) \quad \xrightarrow{x_i} \quad f(0)$$

Bir ifadedeki tüm yalnız değişkenleri bu şekilde eledikten sonra kalan her değişken en az bir kendisi ve bir de değili olmak üzere en az iki kere bulunacak ve tüm farklı değişkenlerin sayısı en fazla $s/4$ olacaktır.

Veterimleri

Bu bölümde, verilen bir ifadedeki hiç bir değişkenin yalnız olmadığı varsayılacaktır. Eğer ifade bu biçimde değilse, yukarıda anlatıldığı gibi bu biçime getirilebilir.

İndirgeme işlemini yeniden ele alalım.

$$f(x_i)=x_i.\alpha\vee\neg x_i.\beta\vee\delta \quad \xrightarrow{x_i} \quad \beta.\alpha\vee\delta$$

Buradaki soru şudur:"acaba işlemin sağ tarafını, ifadeyi sade biçime getirmeden elde etmenin yolları var mıdır?".

Cevap olumludur ve aşağıda görüleceği üzere, ifade, x_i değişkeni yerine β ve $\neg x_i$ yerine ise 0 konularak elenebilir.

$$
\begin{aligned}
x_i.\alpha\vee\neg x_i.\beta\vee\delta \xrightarrow{x_i} \quad & \underset{\beta}{\cancel{x_i}}.\alpha\vee\neg\underset{0}{\cancel{x_i}}.\beta\vee\delta \\
& =\beta.\alpha\vee 0.\beta\vee\delta \\
& =\beta.\alpha\vee\delta
\end{aligned}
$$

Aynı sonuç, x_i yerine 0 ve $\neg x_i$ yerine α konarak da elde edilir.

$$\begin{aligned} x_i.\alpha \vee \neg x_i.\beta \vee \delta \xrightarrow{x_i} & \underset{0}{\cancel{x_i}}.\alpha \vee \neg \underset{\alpha}{\cancel{x_i}}.\beta \vee \delta \\ &= 0.\alpha \vee \alpha.\beta \vee \delta \\ &= \alpha.\beta \vee \delta \end{aligned}$$

Her iki yolu birleştirerek de aynı sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} x_i.\alpha \vee \neg x_i.\beta \vee \delta \xrightarrow{x_i} & \underset{\beta}{\cancel{x_i}}.\alpha \vee \neg \underset{\alpha}{\cancel{x_i}}.\beta \vee \delta \\ &= \beta.\alpha \vee \alpha.\beta \vee \delta \\ &= \beta.\alpha \vee \delta \end{aligned}$$

Burada α ve β sırasıyla x_i ve $\neg x_i$'ye VE işlemiyle bağlanmış terimlerdir. Bunlara veterimleri denir. Dolayısı ile bu yöntem, asıl ifadeye, ifadenin NYG'si ya da sade biçimi elde edilmeden aşağıda gösterildiği gibi uygulanabilir.

$$f(x_i, \neg x_i) \xrightarrow{x_i} f(\beta, \alpha)$$

Veterimlerini bulmak

Burada verilen bir ifadeyi hiç dönüştürmeden, ifadenin içinden x_i'nin veteriminin nasıl bulunacağı gösterilecektir.

Herhangi bir ifadede, eğer varsa x_i'nin herhangi bir geçişi[2] aşağıda gösterildiği biçimde varolabilir.

$$\cdots l_m.(\cdots \vee l_2.(\cdots \vee l_1.\boldsymbol{x}_i.r_1 \vee \cdots).r_2 \vee \cdots).r_n \cdots$$

x_i ile doğrudan velenen terim $l_1.r_1$'dir. Eğer parantezler açılırsa $\cdots l_m \cdots l_2.l_1.r_1.r_2 \cdots r_n \cdots$, x_i'nin bu geçişinin veterimi olacaktır. Buna, k, k'inci geçişi temsil etmek üzere α_k denilsin. Bunu yapan bir algoritma aşağıdadır.

[2] Dizgisel bir ifadede yer alan her x simgesi, x'in bir geçişidir. Örneğin, $x.(y \vee x.z) \vee \neg y.(\neg z \vee \neg x)$ ifadesinde x iki kere geçmektedir, o halde bu ifadede x'in iki geçişi bulunmaktadır.

Algoritma 1

1. İfadeyi tarayarak x_i'nin bir geçişini bul ve aşağıdaki işlemi yap.
2. T boş bir küme ve x_i son veterimi olsun.
3. Sağa doğru, ifadenin sonuna kadar aşağıdaki işlemleri yap.
   3.1. Eğer t_1 son veterimi ise ve ifade $\cdots t_1.t_2 \cdots$ biçiminde ise o zaman t_2'yi son veterimi yap ve T içine koy.
   3.2. Eğer ifade, $\cdots(\cdots \vee t.t_i \vee \cdots).r \cdots$ biçiminde ve t_i son veterimi ise, o zaman r'yi son veterimi yap ve T içine koy.
4. Yine x_i'den başlayarak, sola doğru, ifadenin sonuna kadar aşağıdaki işlemleri yap.
   4.1. Eğer t_2 son veterimi ve ifade $\ldots t_1.t_2 \ldots$ biçiminde ise o zaman t_1'i son veterimi yap ve T içine koy.
   4.2. Eğer t son veterimi ve ifade $\cdots l.(\cdots \vee t_i.t \vee \cdots) \cdots$ biçiminde ise, o zaman l'yi son veterimi yap ve T içine koy.
5. x_i'nin bu geçişinin veterimi, $t_i \in T$ olmak üzere, $t_1 \ldots . t_n$'dir.

Bu durumda, x_i'nin veterimi yani α, x_i'nin bütün geçişlerinin veterimlerinin yadalanmış halidir. Eğer x_i'nin geçiş sayısı n ve ifadenin uzunluğu s ise, bu işlem yaklaşık $n.s$ kadar bir zaman alır. Eğer α içinde x_i ve $\neg x_i$ varsa bunlar $\alpha(x_i, \neg x_i) = \alpha(1,0)$ eşitliği uygulanarak elenir. $\neg x_i$'in veterimi olan β'da benzer şekilde bulunur. δ terimi ise ifadede x_i ve $\neg x_i$ yerine 0 konarak bulunabilir. Tüm bu işlemler polinom zaman alır. Fakat bulunan ifadenin uzunluğu, asıl ifadeden büyük olabilir. Eğer bulunan ifadenin uzunluğu ortalama $2s$ olursa, her indirgeme işlemi sonunda uzunluk üssel olarak artar gibidir. Fakat bir yandan da değişken sayısı azalır ve uzunluk o kadar da fazla artamaz. Buradan, belki de, uzunluğun üssel bir şekilde artamayacağı kanıtlanabilir. Fakat biz bu yolla bir ifadeyi tümüyle indirgemenin üssel zaman aldığını kabul edeceğiz.

VE bağları ve erişilebilirlik

Yukarıdaki algoritma, veterimi bulunması kavramının yerine bir terimden diğerine gidiş kavramını getirir. Bu kavramı görselleştirmek için bir gösterim değişikliği yapalım ve bundan sonra VE bağlacı için . simgesi yerine - kullanalım. Bu gösterim ile, dizgisel ifadeler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\cdots \vee l_m - (u_k \vee \cdots l_2 - (u_i \vee l_1 - x_i - r_1 \vee u_{i-1}) - r_2 \vee \cdots u_1) - r_n \vee \cdots$$

Böylece VE bağlacı, aynı zamanda, veterimleri arasındaki erişilebilirliği temsil eder.

Erişilebilirlik kurallarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

1. $t_1 - t_2$ terimi için t_1'den t_2'ye ve t_2'den t_1'e erişilebilir.
2. $(t_1 \vee t_2) - t_3$ terimi için t_1'den t_3'e, t_2'den t_3'e, t_3'den t_1'e ve t_3'den t_2'ye erişilebilir.
3. Eğer t_i'den t_j'ye ve t_j'den t_k'ya erişilebiliyorsa o zaman t_i'den t_k'ya erişilebilir.

O zaman eğer t_1'den t_2'ye erişim varsa t_2 t_1'in veterimi olur. Bunu göstermek için veterimi kavramı bir kanıtlamaya olanak verecek biçimde tanımlanmalıdır.

Tanım 1 Eğer $f(t_1, t_2)$ fonksiyonu $t_1 - t_2 - \gamma \vee \delta$ şeklinde yazılabiliyorsa, o zaman bu fonksiyon için, t_2 ve t_1 birbirlerinin veterimidir.

Teorem 2

Herhangi bir ifadede, t_1'den t_2'ye yukarıdaki kurallarla erişilebiliyorsa, t_2 t_1'in veterimidir.

İspat:

Burada her erişilebilirlik kuralının bu ilişkiyi sağladığı gösterilecektir.

1. $t_1 - t_2$ ***terimi için*** t_1 ***'den*** t_2 ***'ye* ve** t_2 **'den** t_1 **'e *erişilebilir:*** İçinde $t_1 - t_2$ olan ifade $f(t_1 - t_2)$ şeklinde yazılabilir. İfadeyi $t_1 - t_2$'yi hiç bozmadan açalım. Bu şu şekilde yapılabilir. İfadede $t_1 - t_2$ görülen her yere ifadede bulunmayan bir simge konulur. Yani örneğin, π ifadede olmayan bir simge olmak üzere, $f(t_1 - t_2) = f(\pi)$ olsun. Sonra bu ifadenin $x.(y \vee z) = x.y \vee x.z$ eşitliğini uygulayarak yada başka bir şekilde NYG'si bulunabilir. NYG'de her temel vegrubunun içinde π ya vardır yada yoktur. İçinde π olanlar gruplanarak sonunda ifade $\pi - \gamma \vee \delta$ şekline getirilebilir. Şimdi π yerine $t_1 - t_2$ terimi konulursa ifade $t_1 - t_2 - \gamma \vee \delta$ şeklini alacaktır. O halde tanıma göre t_2 t_1'in ve t_1 t_2'nin veterimidir.
2. $(t_1 \vee t_2) - t_3$ ***terimi için*** t_1 **'den** t_3 **'e,** t_2 **'den** t_3 **'e,** t_3 **'ten** t_1 **'e ve** t_3 **'ten** t_2 **'ye *erişilebilir:*** İçinde $(t_1 \vee t_2) - t_3$ olan ifade birinci maddedekine benzer biçimde $(t_1 \vee t_2) - t_3 - \gamma \vee \delta$ şekline getirilebilir. Bu açılırsa $t_1 - t_3 - \gamma \vee t_2 - t_3 - \gamma \vee \delta$ ifadesi elde edilir. Tanıma göre t_3 t_1'in ve t_1 t_3'ün veterimidir. YADA işleminin değişim ve geçişlilik özellikleri ifadeyi $t_2 - t_3 - \gamma \vee t_1 - t_3 - \gamma \vee \delta$ şeklinde yazma olanağı sağlar Bu durumda ise t_3 t_2'nin ve t_2 t_3'ün veterimidir.
3. **Eğer** t_i **'den** t_j **'ye ve** t_j **'den** t_k **'ya erişilebiliyorsa** t_i **'den** t_k **'ya erişilebilir:** t_i'den t_k'ya bu kuralla erişilebiliyorsa t_k'nın t_i'nin veterimi olduğu birkaç adımda gösterilecektir.

   3.1. "q p'nin veterimidir" ifadesini $(q, p)VT$ şeklinde kısaltalım. $(t_j, t_i)VT$ *ve* $(t_k, t_j)VT$ ifadelerinin doğru olduğunu varsayalım. Burada bu durumda $(t_k, t_i)VT$ *olduğu kanıtlanacaktır.* Eğer t_j t_i'nin veterimiyse ifadenin bir biçimi $t_i - t_j - \gamma \vee \delta$ olur. t_k t_j'nin veterimiyse ifadenin bir başka biçimi $t_j - t_k - \mu \vee \pi$ olur. Yani $t_i - t_j - \gamma \vee \delta = t_j - t_k - \mu \vee \pi$ olur. Bu durumda ifade ya $t_i - t_j - t_k - \gamma \vee \delta$ yada $t_i - t_j - \gamma \vee t_j - t_k - \mu \vee \delta$ şeklindedir. Birinci durumda, VE işlemi değişim ve geçişlilik özelliklerine sahip olduğu için ifade $t_i - t_k - t_j - \gamma \vee \delta$ şeklinde yazılabilir ve t_k'nin t_i'nin veterimi olduğu kanıtlanmış olur. Öte yandan herhangi bir $\alpha \vee \beta$ ifadesi için $\alpha \vee \beta = \alpha.\beta \vee \alpha \vee \beta$ eşitliğinin geçerli olduğu bilinmektedir. Yani, ikinci durumda ifade $t_i - t_j - \gamma - t_j - t_k - \mu \vee t_i - t_j - \gamma \vee t_j - t_k - \mu \vee \delta$ şekline getirilebilir ve yine VE işleminin özelliklerinden dolayı bu $t_i - t_k - \gamma - t_j - \mu \vee t_i - t_j - \gamma \vee t_j - t_k - \mu \vee \delta$ biçiminde yazılabilir. Böylece $(t_j, t_i)VT\,.(t_k, t_j)VT \Rightarrow (t_k, t_i)VT$ olduğu kanıtlanmış olur. Burada $\Rightarrow$ "ise" işlemini temsil etmektedir.

3.2. "p'den q'ya erişilebilir" ifadesi (p,q)E biçiminde kısaltılsın. Bu durumda bu maddedeki erişilebilirlik kuralı $(t_i, t_j)\text{E}.(t_j, t_k)\text{E} \Rightarrow (t_i, t_k)E$ şeklinde yazılabilir. $(p,q)_{1,2}E$ p'den q'ya ilk iki kurala göre erişildiğini, $(p,q)_3 E$ ise p'den q'ya üçüncü kurala yani bu kurala göre erişildiğini göstersin. Burada kanıtlanması gereken $(t_i, t_k)_3 E \Rightarrow (t_k, t_i)\text{VT}$ ifadesidir. Bu kurala göre t_i'den t_k'ya yapılan erişim için önce t_i'den t_j'ye herhangi bir kuralla, daha sonra yine t_j'den t_k'ya herhangi bir kuralla erişilmiştir. Yani yukarıdaki kural

$$((t_i, t_j)_{1,2}E \vee (t_i, t_j)_3 E).((t_j, t_k)_{1,2}E \vee (t_j, t_k)_3 E) \Rightarrow (t_i, t_k)_3 E$$

şeklinde yada (d1),(d2),(d3),(d4) değişik durumları temsil etmek üzere

(d1) $(t_i, t_j)_{1,2}E\,.(t_j, t_k)_{1,2}E \Rightarrow (t_i, t_k)_3 E$

(d2) $(t_i, t_j)_{1,2}E\,.(t_j, t_k)_3 E \Rightarrow (t_i, t_k)_3 E$

(d3) $(t_i, t_j)_3 E\,.(t_j, t_k)_{1,2}E \Rightarrow (t_i, t_k)_3 E$

(d4) $(t_i, t_j)_3 E\,.(t_j, t_k)_3 E \Rightarrow (t_i, t_k)_3 E$

şeklinde yazılabilir. Yalnızca verilen kurallarla erişim yapıldığı kabul edilmektedir. Elbette $(t_j, t_k)_3 E$ ve $(t_j, t_k)_3 E$ için de aynı şey geçerlidir. O halde eninde sonunda bütün erişimler ilk iki kurala indirgenmektedir. O zaman burada ispat için tümevarım kullanılabilir.

- t_i'den t_j'ye ve t_j'den t_k'ye ilk iki kuralla erişildiği yani $(t_i, t_j)_{1,2}E$ *ve* $(t_j, t_k)_{1,2}E$ *'nin doğru olduğunu* varsayalım. Teoremin ilk iki maddesine göre $(t_i, t_j)_{1,2}E \Rightarrow (t_j, t_i)\text{VT}$ ve $(t_j, t_k)_{1,2}E \Rightarrow (t_k, t_j)\text{VT}$ doğrudur. Bu durumda $(t_j, t_i)\text{VT}$ ve $(t_k, t_j)\text{VT}$ doğru olur. Biraz önce ise $(t_j, t_i)\text{VT}.(t_k, t_j)\text{VT} \Rightarrow (t_k, t_i)\text{VT}$ olduğu gösterilmişti. O halde $(t_k, t_i)\text{VT}$ doğru olur. Böylece (d1) durumunda teoremin doğru olduğu kanıtlanmış olur.
- Teoremin $(t_i, t_j)_3 E$ ve $(t_j, t_k)_3 E$ ifadeleri için doğru olduğunu yani $(t_i, t_j)_3 E \Rightarrow (t_j, t_i)\text{VT}$ ve $(t_j, t_k)_3 E \Rightarrow (t_k, t_j)\text{VT}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda eğer $(t_i, t_j)_3 E$ doğru olursa $(t_j, t_i)\text{VT}$ ve $(t_j, t_k)_3 E$ doğru olursa $(t_k, t_j)\text{VT}$ doğru olacaktır. (d2) durumu için $(t_i, t_j)_{1,2}E$ ve $(t_j, t_k)_3 E$ doğrudur. Teoremin ilk iki maddesinde $(t_i, t_j)_{1,2}E \Rightarrow (t_j, t_i)\text{VT}$ ifadesinin doğru olduğu kanıtlanmıştı. O halde $(t_j, t_i)\text{VT}$ ve $(t_j, t_k)_3 E$ doğru olduğu için $(t_k, t_j)\text{VT}$ doğru olacaktır. Benzer şekilde (d3) ve (d4) durumlarında da $(t_j, t_i)\text{VT}$ ve $(t_k, t_j)\text{VT}$ ifadelerinin doğru olacağı çıkarsanır. $(t_j, t_i)\text{VT}.(t_k, t_j)\text{VT} \Rightarrow (t_k, t_i)\text{VT}$ doğru olduğu için de $(t_k, t_i)\text{VT}$ doğru olur. Böylece (d2),(d3) ve (d4)

durumlarında da teoremin doğru olduğu anlaşılır.

Şimdi, indirgeme işlemine tekrar dönelim:

$$x_i-\alpha\vee\neg x_i-\beta\vee\delta \xrightarrow{x_i} (\beta\vee\delta)-(\alpha\vee\delta) = \beta-\alpha\vee\delta$$

İşlemden sonra α ve β birbirlerinin veterimi olurlar. Ama iki terimi birbirlerinin veterimi yapmak için, onları, birbirlerine erişilebilir kılmak yeterlidir. Bu da α ile β arasına aşağıda gösterildiği gibi bir yol çizerek gerçekleştirilebilir.

$$x_i-\alpha\vee\neg x_i-\beta\vee\delta \xrightarrow{x_i} 1-\alpha\vee 1-\beta\vee\delta$$

Burada α ve β arasındaki yol, erişilebilirliği temsil eder.

Daha iyi bir gerçekleştirme ise aşağıdaki gibidir.

$$x_i-\alpha\vee\neg x_i-\beta\vee\delta \xrightarrow{x_i} 1-\alpha\vee 1-\beta\vee\delta$$

İki boyutlu ifadeler

Dizgilerin sınırlılığından kurtulduktan ve iki boyutta serbestçe çizebilme olanağına kavuştuktan sonra, fonksiyonlar çok daha fazla değişik biçimlerde ifade edilebilir. Aşağıda bazı örnekler verilmektedir.

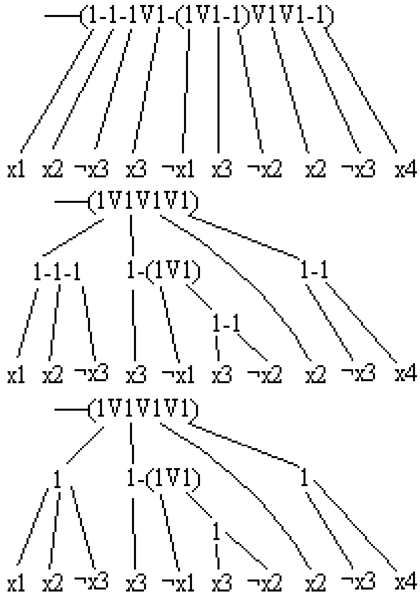
$$\text{a-b} = \begin{array}{c} b \\ | \\ a \end{array}$$

$$a-(b-c\vee d) = \begin{array}{c} b-c \\ | \\ a-(1\vee d) \end{array}$$

$$x-\alpha\vee x-\beta = \begin{array}{c} (\alpha\vee\beta) \\ |\quad| \\ (1\vee 1)-x \end{array}$$

Dizgisel bir ifadeden, iki boyutlu ifadeler, kolayca, Şekil 1'de gösterildiği gibi elde edilebilir.

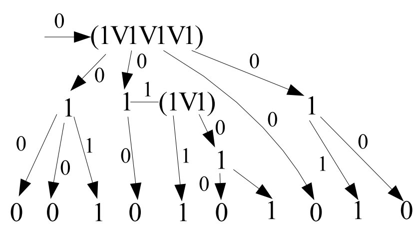
$$x_1.x_2.\neg x_3 \vee x_3.(\neg x_1 \vee x_3.\neg x_2) \vee x_2 \vee \neg x_3.x_4$$
$$\equiv$$



Şekil 1. Dizgisel bir ifadenin iki boyutlu eşdeğerleri

Burada üçüncü biçim yaylardan, –1– biçiminde ve (1∨1∨…∨1) biçiminde iki farklı düğümden oluşan ve uçlarında atomsular olan bir ağaç yapısındadır. Düğümlerden birincisine vedüğümü, ikincisine ise yadadüğümü denir. Yadadüğümünün bir ana (tepe) yayı ve bir yada birkaç taban yayı bulunur. En tepedeki yadadüğümünün ana yayı bu ağaç biçimindeki çizgenin kökünü oluşturur.

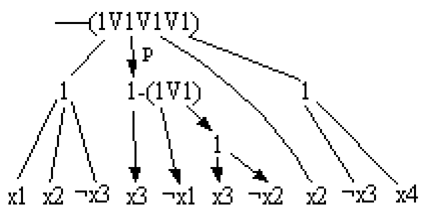
Yukarıdaki eşitliklerin doğru olduğunu göstermek için ifadenin herhangi bir yorumu için eşitliğin her iki tarafının da aynı değeri verdiğini göstermek yeterlidir. Şekil 2'de (x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0) için ifadenin aldığı değer gösterilmiştir.



Şekil 2. (x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0) için ifade 0 değerini alır

Burada doğal olarak yayların bir yönü vardır. Bir değişkene bağlanan yay o değişkenin yorumunun değerini alır. Bir yadadüğümünün çıkan taban yaylarından en az biri 1 değerine sahip olursa giren tepe yayı 1 değerine sahip olur. Eğer çıkan taban yaylarının hepsi 0 değerine sahipse giren tepe yayı da 0 değerini alır. Eğer bir vedüğümünün çıkan taban yaylarının en az biri 0 değerini alırsa, düğüme giren tepe yayı da 0 değerini alır. Aksi halde 1 değerini alır. Bu yorum için kök yay 0 değerini almıştır. Yani bu yorum için ilintinin değeri 0'dır.

Her yay bir ifadeyi temsil eder ve bir yayın temsil ettiği ifade, tüm ifadenin yalnızca o yayın değerini etkileyen kısmıdır. Yani o yayın kökünü oluşturduğu altçizgedir Örneğin Şekil 3'de p yayının belirlediği ifade oklarla gösterilmiştir. Bunlara altifade denir.



Şekil 3. p yayının belirlediği ifade

Her iki boyutlu ifadenin bir dizgisel eşdeğeri bulunur. Bir ifadenin dizgisel eşdeğeri bütün yorumlarda o ifade ile aynı değere sahip olan dizgisel ifadedir. p gibi bir yayın belirlediği ifadenin dizgisel eşdeğeri $[p]$ olsun. Bu durumda bu örnek için

$$[p] = x_3.(\neg x_1 \vee x_3.\neg x_2)$$

olur.

İndirgeme

Herhangi bir ifadede indirgeme, ifadenin basit biçimini elde etmeden şu şekilde gerçekleştirilebilir.

$$f(x_i, \neg x_i) \xrightarrow{x_i} f(\beta, \alpha)$$

Yani $\neg x_i$ görülen her yere x_i'nin veterimi ve x_i görülen her yere ise $\neg x_i$ 'nin veterimi konulur.

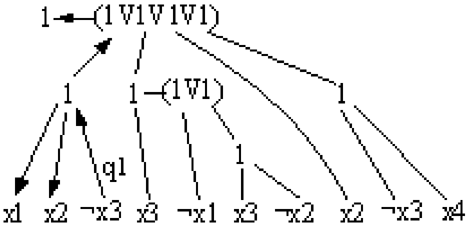
İki boyutlu ifadelerde herhangi bir değişkenin veterimini bulmak için dizgisel ilintilerdekine benzer biçimde x'in her geçişinden başlayarak aşağıdaki kurallar uygulanabilir.

1. x'in bir oluşunu bul. x'in bağlandığı yay p ise yani x ve ötesi $x - p$ şeklinde ise p'yi yığıta koy.
2. Aşağıdakileri yığıt boşalıncaya kadar yap.
   - 2.1. Yığıttan bir eleman çek. Bu p olsun.
   - 2.2. Eğer p ve ötesi $p-(p_1,..,p_n)$ şeklinde ise $p_1,..,p_n$ yaylarını yığıta koy.
   - 2.3. Eğer p ve ötesi $p-(p_1 \vee .. \vee p_n)$ şeklinde ise $p_1,..,p_n$ yaylarını yığıta koy.
   - 2.4. Eğer p ve ötesi $(p \vee p_1 \vee .. \vee p_n) - q$ şeklinde ise q yayını yığıta koy.
   - 2.5. Eğer p ve ötesi, y bir değişken yada sabit olmak üzere, $p - y$ şeklinde ise bir şey yapma.
3. Taranan çizge x'in bir veterimidir.

Burada $p-(p_1,..,p_n)$ $p, p_1,..,p_n$ yaylar olmak üzere bir vedüğümünü temsil eder. p'nin yönü düğüme doğru iken $p_1,..,p_n$ düğümden çıkan yaylardır. $p-(p_1 \vee .. \vee p_n)$ p düğüme giren ana yay ve $p_1,..,p_n$ çıkan taban yayları olmak üzere bir yadadüğümünü ifade eder. $(p_1 \vee .. \vee p_n) - q$ ise yine bir yadadüğümünü temsil eder fakat yayların yönü terstir. Yani bu gösterimde $p_1,..,p_n$ yadadüğümüne giren taban yaylarını ve q düğümden çıkan ana yayı ifade eder.

Örneğin Şekil 4'te x_3'ün bir geçişinden başlayarak bulunan ifade oklarla işaretlenmiştir. Burada bir değişkenin veteriminin gerçekte o değişkene bağlanan yayın tersinden başlayarak bulunan altifade olduğu görülmektedir. p gibi bir yayın ters yayı p' şeklinde gösterilsin ve herhangi bir yay etiketinin aşağı doğru yönelen yayları temsil ettiğini kabul edilsin. Örneğin Şekil 4'te q_1, yönü $\neg x_3$'e doğru olan yaydır.

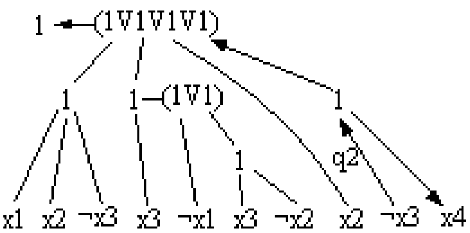
Bu durumda şekildeki $\neg x_3$'in bir geçişinin veterimi q_1 yayının tersinden yani q_1' yayından başlayan altifadedir.



Şekil 4. q_1' yayından başlayan altifade $\neg x_3$'ün bir geçişinin veterimidir

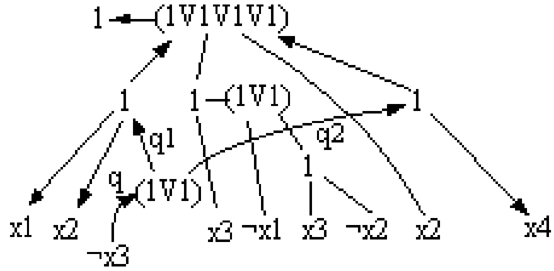
Burada açıkça görüldüğü gibi, eğer her yayın ya bir düğümle yada bir atomsu ile bitmesi gerekiyorsa, kök yayın tersi 1 ile bitmelidir. Açıkça görülen bir başka şey de herhangi bir yorumda bir yadadüğümüne giren taban yaylarının herbirinin değerinin çıkan ana yaya eşit olması gerektiğidir. Yani $(p_1 \vee .. \vee p_n) - q$ gibi bir düğüm ve i=$1 \ldots n$ için, herhangi bir yorumda p_i'nin değeri q'nun değerine eşittir. Böylece $[q_1'] = x_1.x_2.1$ olur.

$\neg x_3$'in diğer bir geçişinin veterimi ise şekilde görülmektedir.



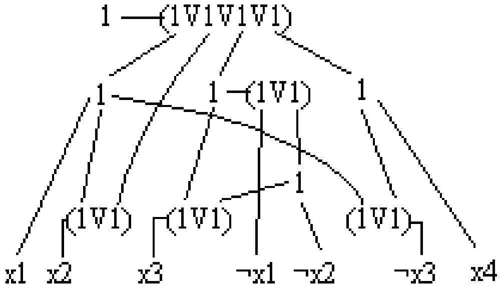
Şekil 5. x_3'ün diğer veterimi

Bir değişkenin veterimi o değişkenin bütün geçişlerinin veterimlerinin yadalanmış hâlidir. Bu durumda ilinti Şekil 6'da gösterilen biçimde çizilebilir. Burada görüldüğü gibi $[q'] = [q_1'] \vee [q_2'] = x_1.x_2.1 \vee x_4.1$ olur. Yani x_3'ün veteriminin dizgisel karşılığı $x_1.x_2 \vee x_4$ ifadesi olur.



Şekil 6. Örnek ifadenin bir başka biçimi ve x_3'ün veterimi

Bu bütün değişkenler için yapılırsa örnek iki boyutlu ifade aşağıdaki şekle getirilebilir.



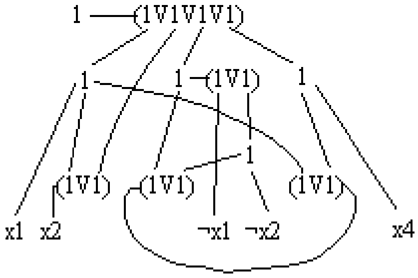
Şekil 7. Örnek ifadenin bir başka şekli

Bu tür çizgelerde yalnız değişkenler sadece bir kere, diğerleri sadece iki kere bulunur.

Şimdi indirgeme işlemini yeniden ele alalım.

$$f(x_i, \neg x_i) \xrightarrow{x_i} f(\beta, \alpha)$$

Bunun anlamı şudur: *Bir ilintide x_i yalnız bir değişken değilse x_i'ye göre indirgeme yapmak için, x_i'nin değerinin yerine $\neg x_i$'nin veteriminin değeri ve $\neg x_i$'nin değerinin yerine x_i'nin veteriminin değeri getirilir.* O halde yukarıdaki biçimdeki ilintilerde, x_i için indirgeme işlemi basittir: eğer hem kendisi hem de değili varsa x_i ve $\neg x_i$ simgeleri silinir ve bunlara bağlanan yaylar birleştirilir. Yalnız değişkenlerin yerine ise 0 konur. Şekilde ifadenin x_3 için indirgenmiş hali görülmektedir.



Şekil 8. Örnek ifadenin x_3 için indirgenmiş hali

İndirgemenin doğru olması için indirgenmiş iki boyutlu ilintinin tüm yorumlarda indirgenmiş dizgisel ilintiye eşit olması gerekir. Aşağıda dizgisel ilintinin x_3 için indirgenmiş halinin bulunması gösterilmektedir.

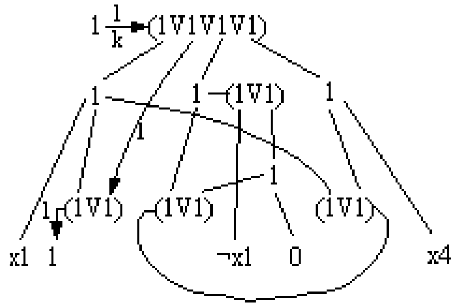
$$x_1.x_2.\neg x_3 \vee x_3.(\neg x_1 \vee x_3.\neg x_2) \vee x_2 \vee \neg x_3.x_4$$
$$\xrightarrow{x_3} (x_1.x_2.1 \vee 0.(\neg x_1 \vee 0.\neg x_2) \vee x_2 \vee 1.x_4).$$
$$(x_1.x_2.0 \vee 1.(\neg x_1 \vee 1.\neg x_2) \vee x_2 \vee 0.x_4)$$
$$=(x_1.x_2 \vee x_2 \vee x_4).(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_2)$$
$$=(x_2 \vee x_4).1$$
$$=(x_2 \vee x_4)$$

Yani dizgisel ilintinin indirgenmiş hali $x_2 \vee x_4$ olur. İndirgenmiş iki boyutlu ilintinin de buna eşdeğer olması gerekir.

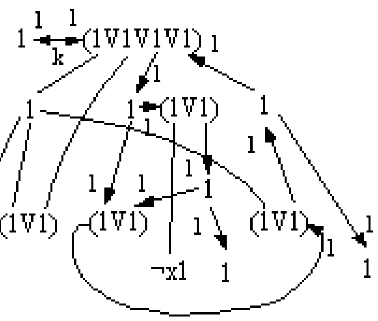
Şekil 9'da indirgenmiş iki boyutlu ilintide sırasıyla $(x_2 = 1)$, $(x_2 = 0, x_4 = 1)$ ve $(x_2 = 0, x_4 = 0)$ yorumları için bulunan değerleri göstermektedir. $|k|$ k yayının yani kökyayın herhangi bir yorumda aldığı değeri temsil etmektedir. Görüldüğü gibi bu ilinti $x_2 \vee x_4$ dizgisel ilintisine eşdeğerdir çünkü aynı yorumlarda aynı değerleri alırlar.

Verilen örnek çizgenin bütün değişkenleri indirgendikten sonra aldığı biçim Şekil 10'da gösterilmektedir.

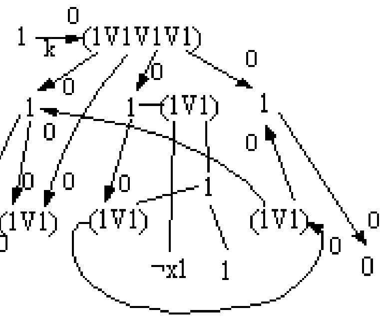
Bu işlemden sonra elde kalan saf bir çizge örneğidir ve bir ifadenin hepdoğru olup olmadığının bu tür bir çizgeye bakarak bulunabilmesi gerekir. Buradaki soru şudur: "Acaba böyle bir çizgenin hangi özellikleri, hepdoğru bir ifadeyi hepdoğru olmayan bir ifadeden ayırt etmektedir?"



(a): $(x_2 = 1)$ için $|k|$=1

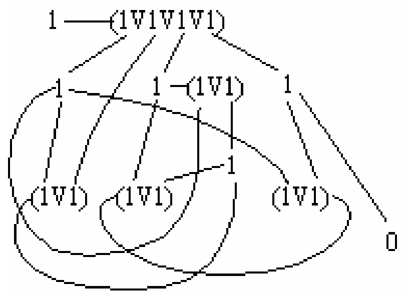


(b): $(x_2 = 0, x_4 = 1)$ için $|k|$=1



(c): $(x_2 = 0, x_4 = 0)$ için $|k|$=0

Şekil 9. indirgenmiş ilintinin farklı yorumlarda aldığı değerler, sonucu etkilemeyen yay değerleri gösterilmemiştir



Şekil 10. Örnek ifadenin tümüyle indirgenmiş hali

Sonuç

Dizgisel bir ifadeden, yukarıda anlatıldığı şekliyle iki boyutlu bir ifade elde etmek polinom zamanda gerçekleştirilir. Daha önce bahsedildiği gibi (sayfa 4), herhangi bir dizgisel ifadenin , $\neg$ simgelerinin yalnızca değişkenlere uygulandığı şeklini elde etmek, s ifadenin büyüklüğü olmak üzere, $2s$ kadar bir zaman alır. Dizgisel bir ifadede farklı tipteki imlerin sayısı ile ifadenin büyüklüğü arasındaki ilişki, her değişkenin yalnızca bir imle gösterildiği kabul edilirse,

s=parantez sayısı +işlem imi sayısı + değişken imi sayısı

olur.

Değişken imlerinin toplam sayısı en fazla s/2, dolayısı ile farklı değişkenlerin sayısı en fazla s/4'tür. Aynı zamanda aç-kapa parantez çifti sayısı işlem sayısından fazla olamaz, çünkü her parantezin içinde en az bir işlem olmak zorundadır. O halde aç-kapa parantez çifti sayısı en fazla s/4 olur.

İki boyutlu biçimlerde, eldeki dizgisel ifadedeki her yadagrubu için bir yadadüğümü, her vegrubu için ise bir vedüğümü oluşturulur. Vegrupları ve yadagruplarının sayısı ifadedeki parantez çiftleri sayısı ile doğru orantılıdır. Ayrıca eğer geçiş sayısı birden fazlaysa her yalnız değişken için bir, yalnız olmayan değişken için ise biri kendisi diğeri değili için olmak üzere iki yadadüğümü oluşturulur. Fakat biz bütün değişkenler için (yalnız olup olmadığına yada geçiş sayısına bakılmaksızın) iki yada düğümü oluşturulduğunu kabul edelim. Bunların sayısı da farklı değişkenlerin sayısı ile doğru orantılıdır. O halde:

Düğüm sayısı $\leq$ aç-kapa parantez sayısı+ farklı değişkenlerin sayısı*2 $\leq$ s/4+s/2*2 $\leq$ 2s

Her yay, bir düğümü, ya diğer bir düğüme yada bir atomsuya bağlamaktadır. Yani:

Yay sayısı $\cong$ düğüm sayısı + farklı değişkenlerin sayısı $\leq$ aç-kapa parantez sayısı + farklı değişkenlerin sayısı*2 + farklı değişkenlerin sayısı $\leq$ s/4 + s/2*3 $\leq$ 2s olur. O halde, dizgisel ifadeyi tarayarak iki boyutlu bir ifade oluşturmak, k bir sabit olmak üzere, ks kadar bir zaman alır. İndirgeme ise, yine, eğer n farklı değişkenlerin sayısı ise, n kadar bir zaman almaktadır($n<s$). Dolayısı ile, eğer problem, iki boyutlu ifadeler için $\partial(s)$ kadar bir zamanda çözülebilirse, dizgisel önerme ifadeleri için $\partial(s)+ks$ kadar bir zamanda çözülebilecektir.

Bundan sonraki çalışmalarda, iki boyutlu ifadelerde hangi özelliklerin hepdoğruluğa karşılık geldiği ve bu özelliklerin nasıl bulunabileceği incelenecektir.

Kaynaklar

Hopcroft J. E., Ullman J. D., (1979) *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, 328-329, Addison-Wesley.

Lammens P., Claesen L., De Man H., (1989) *Correctness Verification of VLSI Modules Supported by a Very Efficient Boolean Prover*, Proceedings: IEEE International Conference on Computer Design, October 1989, 266-269.