itüdergisi/**c**
fen bilimleri
Cilt:4, Sayı:1, 95-101
Kasım 2006

Elastik bir ortamda dalga yayılımı: Genelleştirilmiş Davey-Stewartson denklemleri

Ceni BABAOĞLU*, Saadet ERBAY
İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, iki uzay ve bir zaman boyutlu nonlineer dalga yayılımı problemi ele alınmıştır. Sonsuz, homojen, zayıf nonlineer ve zayıf dispersif elastik bir ortamda (2+1) (iki uzay ve bir zaman) boyutlu dalgaların modülasyonu incelenmiştir. Modülasyon problemi için dalgaların asimptotik davranışını tanımlayan (2+1) boyutlu nonlineer evolüsyon denklemleri türetilmiştir. Denklemler türetilirken indirgeyici pertürbasyon yöntemi olarak adlandırılan bir asimptotik yöntem kullanılmış ve dalgaların modülasyonu probleminin üçlü bir nonlineer kısmi diferansiyel denklem sistemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. Bu denklemler, bir kısa enine dalga, bir uzun enine dalga ve bir uzun boyuna dalga olmak üzere üç dalganın etkileşimlerini içermiş ve "genelleştirilmiş Davey-Stewartson denklemleri" olarak adlandırılmıştır. Türetilen denklemlerde beliren parametre değerleri üzerinde alınan bazı kısıtlar altında, genelleştirilmiş Davey-Stewartson denklemlerinin literatürde sıkça karşılaşılan nonlineer Schrödinger denklemine veya Davey-Stewartson denklemlerine indirgendiği gösterilmiştir. Ayrıca, türetilen genelleştirilmiş Davey-Stewartson denklemlerinin bazı özel çözümleri elde edilmiştir. Özel çözümler hesaplanırken, gezen dalga dönüşümlerini esas alan bir yöntem yardımı ile kısmi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere indirgenmiş ve çözümler Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden verilmiştir. Son olarak, elde edilen özel çözümlerin bazı durumlarda hiperbolik fonksiyonlara indirgendiği gösterilmiş ve parametre değerlerinde alınan kimi kısıtlar altında sech-tanh-tanh ve tanh-tanh-tanh yapılarındaki yalnız dalga (solitary wave) çözümlerini içerdiği ifade edilmiştir.

Anahtar kelimeler: *Nonlineer elastik dalga yayılımı, genelleştirilmiş Davey-Stewartson denklemleri, gezen dalga çözümleri.*

---

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Ceni BABAOĞLU. ceni@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 75.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Wave propagation in an elastic medium: generalized Davey-Stewartson equations" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 22.06.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 11.07.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Wave propagation in an elastic medium: Generalized Davey-Stewartson equations

Extended abstract

It is well-known that the envelope of a (1+1) (one spatial and one temporal) dimensional quasi-monochromatic wave train is governed by the single nonlinear Schrödinger equation

$$i\,A_t + p\,A_{xx} + q\,|A|^2 A = 0,$$

where t *is time,* x *is the spatial coordinate and* A *denotes the complex amplitude. The nonlinear Schrödinger equation appears to be a generic equation describing unidirectional wave modulation. If modulations transverse to the wave propagation direction are also allowed, second spatial coordinate effect should be taken into account and new (2+1) evolution equations should be derived. A natural way to obtain two-dimensional modulations of nonlinear waves is simply to replace the one dimensional dispersive term with a two dimensional dispersive term*

$$i\,A_t + p\,A_{xx} + s\,A_{xy} + r\,A_{yy} + q\,|A|^2 A = 0.$$

However, in many two dimensional systems both short waves and long waves may co-exist and the modulation of such a system can be characterized by Davey-Stewartson equations

$$i\,A_t + p\,A_{xx} + r\,A_{yy} + q\,|A|^2 A = b\,A\phi_x,$$

$$\phi_{xx} + m\,\phi_{yy} = (|A|^2)_x,$$

where A *is the complex amplitude of the short wave and* ϕ *is the long wave amplitude. The Davey-Stewartson system is a model for the evolution of weakly nonlinear packets of water waves that travel in one direction but in which the amplitudes of waves are modulated in two spatial directions.*

The main purpose of the present study is to extent the analysis of Davey and Stewartson to describe (2+1) dimensional wave motion in a bulk medium composed of an elastic material with couple stresses. To this aim, a multi-scale expansion of quasi-monochromatic wave solutions is used to derive (2+1) non-linear model equations for the description of elastic waves in the far field. By using the reductive perturbation method, the contribution of the second spatial coordinate effect on the propagation of a quasi-monochromatic wave and zero harmonic modes is determined. It is shown that the modulation of waves in the above mentioned medium is governed by the following system of three non-linear evolution equations which may be called the "generalized Davey-Stewartson equations":

$$i\,A_t + \delta\,A_{xx} + A_{yy} = \chi\,|A|^2 A + b(\phi_{1,x} + \phi_{2,y})A,$$

$$\phi_{1,xx} + m_2\,\phi_{1,yy} + n\,\phi_{2,xy} = (|A|^2)_x,$$

$$\lambda\phi_{2,xx} + m_1\,\phi_{2,yy} + n\,\phi_{1,xy} = (|A|^2)_y,$$

where A *is the complex amplitude of the free short transverse wave mode whereas* ϕ_1 *and* ϕ_2 *are the free long longitudinal and free long transverse wave modes, respectively. These coupled equations govern (2+1) dimensional weakly nonlinear waves in a generalized elastic solid, that travel mostly in the* x *direction and whose amplitudes are slowly modulating in both* x *and* y *directions. Since the nonlinear interaction of the quasi-monochromatic transverse wave and the zero harmonic transverse and longitudinal waves is considered, i.e., a free short transverse, a free long longitudinal and a free long transverse wave modes are included, these evolution equations present a generalized form of the Davey-Stewartson equations.*

It is also shown that under some restrictions on the parameter values, the generalized Davey-Stewartson equations is reduced to the nonlinear Schrödinger equation and to the Davey-Stewartson equations. Finally, some special solutions of the generalized Davey-Stewartson equations are obtained. By using the traveling wave transformations, the partial differential equations are reduced to ordinary differential equations and the special solutions are given in terms of Jacobian elliptic functions. It is also shown that, these solutions involve secant hyperbolic and tangent hyperbolic type solitary wave solutions for some values of the parameters. These solutions can be given briefly as follows:

$$A(\zeta) = \mp\, a\ \operatorname{sech}(b_1\zeta + D)\exp(i\theta),$$

$$\phi_1(\zeta) = -a_1\ \tanh(b_1\zeta + D),$$

$$\phi_2(\zeta) = -a_2\ \tanh(b_1\zeta + D),$$

and

$$A(\zeta) = \mp\, \bar{a}\ \operatorname{sech}(b_2\zeta + D)\exp(i\theta),$$

$$\phi_1(\zeta) = -\bar{a}_1\ \tanh(b_2\zeta + D),$$

$$\phi_2(\zeta) = -\bar{a}_2\ \tanh(b_2\zeta + D).$$

Keywords: *Non-linear elastic wave propagation, generalized Davey-Stewartson equations, travelling wave solutions.*

Giriş

Bilindiği gibi zayıf nonlineer ve zayıf dispersif sistemlerde (1+1) boyutlu harmonik dalgaların yavaş değişen genliğini yöneten denklem

$$i\,A_t + p\,A_{xx} + q\,|A|^2 A = 0, \tag{1}$$

ile verilen nonlineer Schrödinger (NLS) denklemidir (Taniuti ve Yajima, 1969). Burada x uzay koordinatını, t zamanı ve A kompleks genliği göstermektedir. Bununla birlikte eğer ortamda iki uzay koordinatı boyunca dalga yayılımı mevcut ise (2+1) boyutlu yeni bir evolüsyon denklemine ihtiyaç vardır (Zakharov, 1968; Benney ve Roskes, 1969). Bu denklemi elde etmenin en doğal yolu bir boyutlu dispersif terimi iki boyutlu hale dönüştürmektir (Pouget vd., 1993; Collet ve Pouget, 1998):

$$i\,A_t + p\,A_{xx} + s\,A_{xy} + r\,A_{yy} + q\,|A|^2 A = 0, \tag{2}$$

Diğer yandan, birçok iki boyutlu sistemde hem uzun hem de kısa dalgaların varlığı söz konusu olduğundan dalga modülasyonu problemi Davey-Stewartson (DS) denklemleri:

$$\begin{aligned} &i\,A_t + p\,A_{xx} + r\,A_{yy} + q\,|A|^2 A = b A\phi_x \\ &\phi_{xx} + m\,\phi_{yy} = (|A|^2)_x, \end{aligned} \tag{3}$$

ile karakterize edilir (Davey ve Stewartson, 1974; Djordjevic ve Redekopp, 1977; Ablowitz ve Segur, 1979). Burada A kısa dalganın kompleks genliğini, ϕ ise uzun dalganın genliğini göstermektedir. Davey-Stewartson sistemi, bir doğrultuda yayılan ancak genlikleri iki uzay doğrultusunda modüle olan zayıf nonlineer su dalgalarının evolüsyonunu modeller. Bu çalışmanın amacı ise Davey ve Stewartson tarafından yapılan analizi genelleştirilmiş elastik bir ortamda (2+1) boyutlu durum için genişletmektir.

Son yıllarda maddenin ayrık yapısını klasik elastisite teorisine katmak amacıyla çok değişik teoriler önerilmiştir (Maugin, 1990; Eringen ve Maugin, 1990, Maugin, 1999). Burada bahsedilen teoriler, malzemede göz önüne aldıkları özelliklere bağlı olarak değişik isimlerle adlandırılırlar. Örnek olarak, yüksek mertebe gradyan teorileri, yerel olmayan teoriler, çok atomlu yapılar, mikromorfik teoriler verilebilir. Dalga yayılımı bakımından, klasik elastisitenin tersine bu teoriler lineer yaklaşımda dispersif dalga yayılımını kabul ederler. Modellerin bu dispersif karakteri, nonlineerliğin de hesaba katılması ile yalnız dalgalar gibi düzgün yapıları çözüm kabul eden evolüsyon denklemlerinin elde edilmesine yol açar.

Bu çalışmanın amacı, alan denklemleri yer değiştirmenin yüksek mertebe gradyanlarını içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamda dalga yayılımını incelemek ve (2+1) boyutlu modülasyon problemini modelleyen evolüsyon denklemlerini türetmektir.

Bu çalışmada, öncelikle sonsuz, homojen ikinci mertebe nonlineer genelleştirilmiş elastik bir katı için alan denklemleri ve lineer dispersiyon denklemleri kısaca verilmiştir. Daha sonra, indirgeyici perturbasyon yöntemi kullanılarak (2+1) boyutlu dalgaların modülasyonu genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) denklemleri olarak adlandırılan üçlü nonlineer kısmi diferansiyel denklem sistemi ile karakterize edilmiştir.

GDS denklemleri, bir kısa enine dalga, bir uzun enine dalga ve bir uzun boyuna dalga olmak üzere üç dalganın etkileşimlerini içermiştir. GDS sisteminde beliren parametre değerleri üzerinde alınan bazı kısıtlar altında, denklemlerin NLS ve DS denklemlerine indirgendiği gösterilmiştir.

Ayrıca, GDS denklemlerinin bazı özel çözümleri, gezen dalga dönüşümlerini esas alan bir yöntem yardımı ile hesaplanmıştır. Bu yönteme göre GDS denklemleri adi diferansiyel denklemlere indirgenmiş ve Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Son olarak, hesaplanan çözüm fonksiyonlarının bazı durumlarda hiperbolik fonksiyonlara indirgendiği ifade edilmiştir. Öyle ki, parametre değerlerinde alınan kimi kısıtlar altında elde edilen çözümlerin sech-tanh-tanh ve tanh-tanh-tanh şeklinde hiperbolik fonksiyonlar cinsinden yalnız dalga çözümlerini içerdiği gösterilmiştir.

İki boyutlu dalga yayılımı

Mikromorfik elastisite teorisi, elastik ortamı oluşturan maddesel noktaların öteleme ile birlikte rijit dönmeler de yapabildiğini kabul eder (Suhubi ve Eringen, 1964). Makro ve mikro şekil değiştirme tansörleri:

$$
\begin{aligned}
2e_{kl} &= u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l}, \\
\varepsilon_{kl} &= \Phi_{kl} + u_{l,k} + u_{m,k}\Phi_{ml}, \\
\Gamma_{klm} &= \Phi_{kl,m} + u_{n,k}\Phi_{nl,m}, \quad k,l,m,n = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{4}
$$

ile verilir. Burada virgülden sonra gelen k indisi x_k uzay değişkenine göre kısmi türevi göstermekte olup tekrarlanan indisler üzerinde toplama uzlaşımı geçerlidir. $u_{k,l}$ yer değiştirme gradyanı, e_{kl} makro şekil değiştirme tansörü, ε_{kl} ve Γ_{klm} ise mikro şekil değiştirme tansörleridir.

Bu çalışmada, mikromorfik elastisite teorisinin basitleştirilmiş bir şekli üzerinde çalışılmıştır (Erofeyev ve Potapov, 1993). Buna göre, mikro şekil değiştirme etkilerinin zayıf olduğu kabul edilerek şekil değiştirme tansörü ε_{kl} sıfır alınır. Ayrıca, Φ_{kl} tansörünün kendisinin ve gradyanının ikinci mertebe terimlerinin ihmal edilebileceği varsayılır. Böylece makro ve mikro şekil değiştirme tansörleri

$$
\begin{aligned}
2e_{kl} &= u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l}, \\
\Gamma_{klm} &= -u_{l,km},
\end{aligned} \tag{5}
$$

şeklini alır. Kinetik enerji klasik elastisite teorisindeki gibi:

$$
T = \frac{1}{2}\rho_0\left[\left(u_{1,t}\right)^2 + \left(u_{2,t}\right)^2 + \left(u_{3,t}\right)^2\right] \tag{6}
$$

olarak alınır. Burada, t indisi zaman değişkenine göre kısmi türevi, ρ_0 ise kütle yoğunluğunu gösterir. İç enerji yoğunluğu fonksiyonu ise

$$
\begin{aligned}
\Sigma = {} & \frac{\lambda}{2}e_{kk}e_{ll} + \mu e_{kl}e_{kl} + \frac{\mathrm{A}}{3}e_{kl}e_{ml}e_{km} \\
& + \mathrm{B}e_{kl}e_{lk}e_{mm} + \frac{\mathrm{C}}{3}e_{kk}e_{ll}e_{mm} \\
& + 2\mu m^2(\Gamma_{klm}\Gamma_{klm} + \nu\Gamma_{klm}\Gamma_{lkm})
\end{aligned} \tag{7}
$$

ile tanımlanır (Erofeyev ve Potapov, 1993). Burada, λ ve μ lineer elastik sabitler, ✌L, 👌 ve 👍 ikinci mertebe elastik sabitler , υ ve m ise mikro yapıyı karakterize eden sabitlerdir. Bu durumda hareketi yöneten denklemler

$$
\delta\int L\,dt = \delta\int\int\int \mathrm{L}\,dxdydt = 0 \tag{8}
$$

ile verilen Hamilton prensibinden elde edilir. (4) ifadesindeki ☹ Lagrange yoğunluk fonksiyonu ☹$= T - \Sigma$ olup, karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_{k,t}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_{k,x}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_{k,y}}\right) \\
& \quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_{k,xx}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_{k,yy}}\right) \\
& \quad - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_{k,xy}}\right) = 0, \quad (k = 1,2,3)
\end{aligned} \tag{9}
$$

hareketi yöneten denklemleri verir. Kinetik enerji ve iç enerji yoğunluk fonksiyonları (9) ile verilen denklemlere yerleştirilerek alan denklemleri elde edilir (Babaoğlu ve Erbay, 2004). Alan denklemleri lineerleştirilirse dispersiyon bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
D_1(k,\omega) &= \omega^2 - c_1^2k^2 - 4(1+\nu)\ \mathrm{c}_2^2\ \mathrm{m}^2k^4, \\
D_2(k,\omega) &= D_3(k,\omega) = \omega^2 - c_2^2k^2 - 4\mathrm{c}_2^2\ \mathrm{m}^2k^4
\end{aligned} \tag{10}
$$

Burada, $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$ ve $c_2^2 = \mu/\rho_0$ olup; c_1 boyuna, c_2 ise enine dalga genliklerini göstermektedir. D_1 ifadesi boyuna yerdeğiştirme modu u_1 ile ilgili, D_2 ve D_3 ifadeleri ise sırası ile yerdeğiştirme modları u_2 ve u_3 ile ilgili dispersiyon bağıntılarıdır. (10) denklemlerinden görüldüğü üzere hem boyuna hem de enine modlar dispersiftir. Bu çalışmada, kısa enine, kısa boyuna ve uzun boyuna dalgaların etkileşimini karakterize eden evolüsyon denklemleri indirgeyici pertürbasyon yöntemi ile elde edilecektir. Kısa ve uzun dalga genliklerinin modülasyonunu incelemek için yavaş değişkenler aşağıdaki gibi alınır:

$$\xi = \varepsilon(x - c_g t), \quad \eta = \varepsilon y, \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{11}$$

Burada $c_g = d\omega / dk$ olup, x ekseni boyunca yayılan dalgaların grup hızını göstermektedir. (11) denklemlerinde görülen ε parametresi zayıf dispersiyonun bir ölçüsü iken, zayıf nonlineerliğin bir ölçüsü olarak hesaba katılırsa yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri aşağıdaki şekilde asimptotik kuvvet serisine açılabilir:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon\phi_1(\xi,\eta,\tau) + \varepsilon^2\left[\tilde{u}_1\varepsilon(\xi,\eta,\tau)e^{2i\theta} + c.c.\right] + \ldots \\ u_2 &= \varepsilon\phi_2(\xi,\eta,\tau) + \varepsilon^2\left[\tilde{u}_2\varepsilon(\xi,\eta,\tau)e^{2i\theta} + c.c.\right] + \ldots \\ u_3 &= \varepsilon\left[A(\xi,\eta,\tau)e^{i\theta} + c.c.\right] \\ &\quad + \varepsilon^2\left[\tilde{u}_3\varepsilon(\xi,\eta,\tau)e^{2i\theta} + c.c.\right] + \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Burada, $\theta = kx - \omega t$ faz fonksiyonunu, ω frekansı, *c.c.* bir önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca, A kısa enine dalganın kompleks genliği, ϕ_1 ve ϕ_2 ise uzun boyuna ve uzun enine dalgaların reel genlikleridir. (11) ve (12) ifadeleri alan denklemlerine yerleştirilirse ε parametresine bağlı denklem hiyerarşileri elde edilir. Üçüncü mertebede boyutsuz değişkenler

$$\tau = \frac{\gamma_1^2(c_g^2 - c_1^2)^2}{\gamma_3^4 k^4 r}t, \; \xi = \frac{(c_g^2 - c_1^2)}{\gamma_3 k^2}x, \; \eta = \frac{\gamma_1(c_g^2 - c_1^2)}{\gamma_3^2 k^2}y, \tag{13}$$

iken GDS sisteminin boyutsuz formu elde edilir:

$$\begin{aligned} &i A_t + \delta A_{xx} + A_{yy} = \chi\, |A|^2 A + b(\phi_{1,x} + \phi_{2,y})A, \\ &\phi_{1,xx} + m_2\, \phi_{1,yy} + n\, \phi_{2,xy} = (|A|^2)_x, \\ &\lambda\phi_{2,xx} + m_1\, \phi_{2,yy} + n\, \phi_{1,xy} = (|A|^2)_y. \end{aligned} \tag{14}$$

Burada, $(\lambda - 1)(m_2 - m_1) = n^2$ olup boyutsuz katsayılar ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\delta = \frac{p}{r}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3}\right)^2, \; \lambda = \frac{(c_2^2 - c_g^2)}{(c_1^2 - c_g^2)}, \; n = \frac{\gamma_3(c_1^2 - c_2^2)}{\gamma_1(c_1^2 - c_g^2)}, \\ &\chi = \frac{q\gamma_1^2(c_g^2 - c_1^2)^2}{r\gamma_3^4 k^4}, \quad b = \frac{c_g^2 - c_1^2}{2\omega r}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3}\right)^2, \\ &m_1 = \frac{c_1^2}{(c_1^2 - c_g^2)}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^2, \quad m_2 = \frac{c_2^2}{(c_1^2 - c_g^2)}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

GDS denklemleri bazı durumlarda NLS ve DS denklemlerine indirgenir. Örneğin, $\phi_2 = 0$ alınıp y değişkeni ihmal edilirse NLS denklemi elde edilir:

$$i A_t + \delta A_{xx} = \tilde{\chi}\, |A|^2 A. \tag{16}$$

Diğer yandan, $n = (m_1 - m_2) = (1 - \lambda)$ için

$$Q_\xi = \phi_{1,\xi} + \phi_{2,\eta} - \frac{1}{m_1}|A|^2 \tag{17}$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanırsa DS denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &i A_t + \delta A_{xx} + A_{yy} = \tilde{\chi}\, |A|^2 A + b\, Q_x A, \\ &Q_{xx} + m_1 Q_{yy} = \tilde{m}_1(|A|^2)_x. \end{aligned} \tag{18}$$

Özel çözümler

GDS denklemlerinin bazı özel çözümlerini elde edebilmek için öncelikle gezen dalga dönüşümleri kullanılacaktır (Babaoğlu ve Erbay, 2004):

$$A = f(\zeta)e^{i\theta}, \quad \phi_1 = g(\xi), \quad \phi_2 = h(\zeta). \tag{19}$$

Burada, $\theta = l_1 x + l_2 y - \Omega_1 t$,

$\xi = k_1 x + k_2 y - \Omega_2 t$, olup, $\xi \to \pm\infty$ için f, g ve h fonksiyonlarının tüm türevleri sıfıra yaklaşır. (19) çözümleri (14) ile verilen GDS denklemlerine yerleştirilirse bir adi diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} &(\delta k_1^2 + k_2^2)f'' = (\delta l_1^2 + l_2^2 - \Omega)f \\ &\qquad + \chi f^3 + b(k_1 g' + k_2 h')f, \\ &(k_1^2 + m_2 k_2^2)g'' + n k_1 k_2 h'' = 2k_1 f f', \\ &n k_1 k_2 g'' + (\lambda k_1^2 + m_1 k_2^2)h'' = 2k_2 f f', \end{aligned} \tag{20}$$

elde edilir. Daha sonra, (20)'deki ikinci ve üçüncü denklem ζ'ya göre integre edilip g' ve h' için elde edilen cebrik denklemler çözülür. Ayrıca, $\zeta \to \infty$ için $f \to f_+$ ve $\zeta \to -\infty$ için $f \to f_-$ kabulleri altında (20) denklemleri

$$f'' = 2\alpha f^3 + \beta f,$$
$$g' = -\alpha_1(f_-^2 - f^2), \quad h' = -\alpha_2(f_-^2 - f^2), \tag{21}$$

şeklini alır. Katsayılar ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_1(\lambda k_1^2 + m_1 k_2^2 - n k_2^2)\,\Delta_1^{-1},\\
\alpha_2 &= k_2(k_1^2 + m_2 k_2^2 - n k_1^2)\,\Delta_1^{-1},\\
\Delta_1 &= (k_1^2 + m_2 k_2^2)(\lambda k_1^2 + m_1 k_2^2) - n k_1^2 k_2^2,\\
\alpha &= \frac{1}{2}\left[\chi + b(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)\right]\Delta_2^{-1},\\
\beta &= \left[\delta l_1^2 + l_2^2 - \Omega - b f_-^2(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)\right]\Delta_2^{-1},\\
\Delta_2 &= \delta k_1^2 + k_2^2.
\end{aligned} \tag{22}$$

(21)'deki birinci denklem ζ'ya göre integre edilip $z = f^2$ şeklinde yeni bir değişken tanımlanırsa C bir integrasyon sabiti olmak üzere aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(z')^2 = 4z(\alpha z^2 + \beta z + C) \equiv \Phi(z). \tag{23}$$

(21)'deki adi diferansiyel denklemlerin çözümleri $\Phi \geq 0$ için hesaplanır.

Birinci tip çözümler

$\alpha<0, \ \beta>0, \ 0 < a \leq z < b$ ve $\Phi(z) = -4\alpha z(z-a)(b-z)$ olsun. *f*, *g* ve *h* Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
f(\zeta) &= \left\{b - (b-a)sn^2\left[(-\alpha b)^{1/2}\right]\zeta + D_1; k\right\}^{\frac{1}{2}},\\
g(\zeta) &= \frac{\alpha_1(b-a)}{(-\alpha b)^{1/2}k^2}\left[E(u) - (1-k^2)u\right],\\
h(\zeta) &= \frac{\alpha_2(b-a)}{(-\alpha b)^{1/2}k^2}\left[E(u) - (1-k^2)u\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

Burada, $u = (-\alpha b)^{1/2}\zeta + D_1$, $k^2 = (b-a)/b$, $f_-^2 = a$, D_1 integrasyon sabiti ve *E(u)* ikinci tip eliptik integraldir (Byrd ve Friedman, 1954). *k=1* için *a=0* ve $b = -\beta/\alpha$ olacağından çözümler hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilir:

$$\begin{aligned}
A(\zeta) &= \mp\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}(\beta^{\frac{1}{2}}\zeta + D_1)\exp(i\theta),\\
\phi_1(\zeta) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha}\beta^{\frac{1}{2}} \tanh(\beta^{\frac{1}{2}}\zeta + D_1),\\
\phi_2(\zeta) &= -\frac{\alpha_2}{\alpha}\beta^{\frac{1}{2}} \tanh(\beta^{\frac{1}{2}}\zeta + D_1).
\end{aligned} \tag{25}$$

İkinci tip çözümler

$\alpha>0, \ \beta<0, \ 0 < z \leq a < b$ ve $\Phi(z) = 4\alpha z(a-z)(b-z)$ olsun. *f*, *g* ve *h* fonksiyonları

$$\begin{aligned}
f(\zeta) &= a^{1/2}sn\left[(\alpha b)^{1/2}\zeta + D_2; k\right],\\
g(\zeta) &= \frac{-\alpha_1 a}{(\alpha b)^{1/2}k^2}\left[E(u) - (1-k^2)u\right],\\
h(\zeta) &= \frac{-\alpha_2 a}{(\alpha b)^{1/2}k^2}\left[E(u) - (1-k^2)u\right],
\end{aligned} \tag{26}$$

şeklinde bulunur. Burada, $u = (-\alpha b)^{1/2}\zeta + D_2$, $k^2 = a/b$, $f_-^2 = a$, D_2 integrasyon sabitidir. *k=1* için $a = b = -\beta/(2\alpha)$ olup, çözümler hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilir:

$$\begin{aligned}
A(\zeta) &= \mp\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh\left(\left(\frac{-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta + D_2\right)\exp(i\theta),\\
\phi_1(\zeta) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh\left(\left(\frac{-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta + D_2\right),\\
\phi_2(\zeta) &= -\frac{\alpha_2}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tanh\left(\left(\frac{-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta + D_2\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

Sonuçlar

Bu çalışmada (2+1) boyutlu dalga yayılımı ele alınmış ve mikromorfik elastik bir ortamda dalgaların modülasyonunun "genelleştirilmiş Davey-Stewartson" denklemleri ile karakterize edildiği gösterilmiştir. Ayrıca bu denklemlerin özel çözümleri gezen dalga dönüşümlerini esas alan bir yöntemle elde edilmiştir.

Kaynaklar

Ablowitz, M.J. ve Segur, H., (1979). On the evolution of packets of water waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **92**, 691-715.

Babaoğlu, C. ve Erbay, S., (2004). Two-dimensional wave packets in an elastic solid with couple stresses, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* **39**, 941-949.

Benney, D.J. ve Roskes, G.J., (1969). Wave instabilities, *Studies in Applied Mathematics*, **48**, 377-385.

Byrd, P.F. ve Friedman, M.D., (1954). Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Springer, Berlin.

Collet, B. ve Pouget, J., (1998). Two-dimensional modulation and instabilities of flexural waves of thin plate on nonlinear elastic foundation, *Wave Motion*, **27**, 341-354.

Davey, A. ve Stewartson, K., (1974). On three dimensional packets of surface waves, *Proc. Roy. Soc. London Ser.*, **A338**, 101-110.

Djordjevic, V.D. ve Redekopp, L.G., (1977). On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **79**, 703-714.

Eringen, A.C. ve Maugin, G.A., (1990). Electrodynamics of Continua, Volume 1, Foundations of solid media, Springer, New York.

Erofeyev, V.I. ve Potapov A.I., (1993). Longitudinal strain waves in non-linearly elastic media with couple stresses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **28,** 483-488.

Maugin, G.A., (1990). Contiuum models and discrete systems, Volume 1, 2, Longman, Harlow, Essex.

Maugin, G.A., (1999). Nonlinear waves in elastic crystals, Oxford University Press*,* Oxford.

Pouget, J., Remoissenet, M. ve Tamga, J.M., (1993). Energy self-localization and gap local pulses in a two-dimensional nonlinear lattice, *Phys. Rev.*, **B47**, 14866-14874.

Suhubi, E.S. ve Eringen A.C., (1964). Nonlinear theory of micro-elastic solids II, *International Journal of Engineering Science,* **2**, 389-404.

Taniuti, T. ve Yajima, N., (1969). Perturbation method for a nonlinear wave modulation. I, *Journal of Mathematical Physics*, **10**, 1369-1372.

Zakharov, V.E., (1968). Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **4**, 86-94.