itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:4, Sayı:1, 31-40
Kasım 2006

Komütatif olmayan alan kuramlarında dualite

Barış YAPIŞKAN[*], **Ömer F. DAYI**
İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Komütatif olmayan (noncommutative) uzaylar farklı çerçevelerde karşımıza çıksa da bu tip kuramların gittikçe artan bir şekilde çalışılması, bunların sicim kuramı ile olan yakın ilişkilerinin kurulması ile olmuştur. Komütatif olmayan uzaylar üzerinde tanımlanan alan kuramları sicim kuramının ayrışma (decoupling) limitinde ortaya çıkmaktadırlar ve bu tip kuramlar komütatif benzerlerinden farklı özellikler göstermeleri nedeniyle ilgi çekmektedirler. Bu şekilde komütatif olmayan ayar kuramlarından elde edilecek sonuçların sicim kurumlarının çeşitli özelliklerinin anlaşılmasında önemli olması beklenmektedir. Dual kuramlar bir fiziksel modelin iki farklı, fakat eşdeğer formülasyonunu tanımlarlar. S dualite olarak adlandırılan kuvvetli ve zayıf etkileşimli modeller arasındaki ilişki, birinden diğerine gidilerek bir fiziksel modelin farklı etkileşme bölgelerindeki özelliklerinin çalışılmasına imkân verir. Bu çalışmada biz komütatif olmayan U(1) ayar kuramında S dualiteyi inceleyeceğiz. Öncelikle komütatif olmayan U(1) kuramının duali için hamilton fonksiyonunun nasıl kurulabileceğini inceleyeceğiz. Dual kuramda uzay ve zaman koordinatları arasıda komütatiflik özelliğinin bulunmaması nedeniyle bilinen kuantizasyon yöntemleri ile bunun nasıl yapılacağı açık değildir. Ana (parent) eylem bu iş için uygun bir araç olmaktadır. Ana eylemde uygun değişkenlere göre hareket denklemleri çözülür ve bu çözümler ana eylemde yerine konulursa orijinal kuram veya onun duali elde edilebilmektedir. Ana eylemin bu tanımlaması dual Lagrange fonksiyonu kullanılmaksızın hamilton fonksiyonunun elde edilebilmesine imkân verir. Yöntem öncelikle normal (komütatif) durum için geliştirilecek daha sonra elde edilen sonuçlar komütatif olmayan duruma genelleştirilecektir. İkinci olarak komütatif olmayan U(1) ayar kuramı ve onun duali için hem Lagrange hem de Hamilton yoğunluklarında elektrik-manyetik dualite dönüşümlerinin nasıl tanımlanacağını göstereceğiz.

Anahtar Kelimeler: *Komütatif olmayan geometri, dualite, sicim kuramı.*

[*]Yazışmaların yapılacağı yazar: Barış YAPIŞKAN. yapiska1@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 69 93.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitütsü, Fizik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Duality in noncommutative gauge theories: A parent action approach" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 10.04.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 09.06.2006 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2007 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Duality in noncommutative gauge theories

Extended abstract

It is largely believed that spacetime structure differs from the usual definiton by going to the high energies or equivalently at small distances. This belief has been justified by using different approaches in different fields of the physics. However, noncommutativity of space coordinates arise in a natural way in string theory and appear as a consequence of the nonlocal property of the string. Noncommutative spaces emerge as a consequence of the quantization of worldsheet theory of the string, which is ending on a D-brane, in presence of a background magnetic field. This configuration leads to the noncommutativity of the open string coordinates at the end where they are attached to the brane and hence the world-volume of the D-brane also becomes noncommutative.

The effective physics on the D-branes in presence of a background field can be described either by a commutative gauge theory or by a noncommutative one. Seiberg-Witten proved that these two different descriptions arise from the same field theory with different regularizations. Since the physics does not depend on the regularization, theories obtained with different regularizations can be related to each other. Hence they have enabled to construct a map between these two descriptions by a field redefinition. This is a perturbative expansion of the noncommutative fields in terms of the ordinary fields with respect to the noncommutativity parameter. By using the Seiberg-Witten map one can pass from a gauge theory defined in terms of the noncommutative fields to a gauge theory in terms of the ordinary fields.

Duality appears in several different contexts of physics. Dual theories provide two different but equivalent descriptions of the same model in the diverse interaction regimes by using in general, different fields. The relation between the fields is in general not known explicitly and in the most of the cases it contains nonlinear terms. Thus, knowing the explicit relation between the fields allows perturbative calculations in the variables of the original theory both in the strong and weak coupling regimes.

In this work we deal with noncommutative U(1) gauge theory and its S duality. When the initial theory has a noncommutativity between the space coordinates, dual of that results in a time/space noncommutative gauge theory. These types of time/space noncommutative theories correspond to the certain configurations of the string theory. When there is a noncommutativity between time and space it is not obvious how to apply canonical quantization methods. In the ordinary case time variable is the evolution parameter of system however it is not clear what one means by the noncommutativity of time. Hence, Hamiltonian formulation of dual theory should be clarified.

Parent action method is an appropriate tool to study dual theories. Parent action is constructed from the initial theory by a Legendre transformation with respect to the initial field and contains the dual field as a Lagrange multiplier. Starting from the parent action one obtains the dual theory by taking the variation of the parent action with respect to the initial field. On the other hand if one performs the variation with respect to the dual field obtains the initial theory. Hence it becomes possible to study the dual Hamiltonian bypassing the space/time noncommutative dual Lagrangian.This Hamilton formulation playes important roles in the D3-brane world-volume theories.

Secondly we investigate the electric-magnetic duality relations in the noncommutative U(1) gauge theory. Electric-magnetic duality exchanges the electric degrees of freedom of theory with the magnetic degrees of freedom. It also exchanges the electric charge quanta with the managnetic charge quanta.Electric charge quanta at the same time related to coupling constant of theory. Such a transformation, if it can be constructed, will map the strongly coupled electric degrees of freedom of theory to weakly coupled magnetic degrees of freedom of it. Hence different phases of the gauge theories can be investigated. We provide the electric-magnetic duality transformations for both the Lagrange and Hamilton densities. A well known property of the ordinary gauge theories is verified for the noncommutative U(1) gauge theory: Duality maps the Lagrangian to itself up to an overall minus sign and keeps intact the Hamiltonian of U(1) gauge theory. However, electric-magnetic duality transformation in configuration space is shown to be defined by a reversed one with respect to that of in phase space.

Keywords: *Noncommutative geometry, duality, string theory.*

Giriş

Fiziksel olayların içinde gerçekleştiği uzay-zaman d boyutlu bir manifold olarak ele alınır. Uzayzamanda gerçekleşen olaylar bu manifold üzerinde birer nokta olarak gösterilirler ve bu noktalar herhangi bir sınır olmaksızın manifold üzerinde lokalize edilebilirler. Çok yüksek enerjilerde manifoldun bu sınırsız olarak lokalize olma özelliği bozulmaktadır. Bu çok yüksek enerjilerdeki veya eşdeğer olarak çok küçük ölçeklerdeki (Planck ölçeği) uzayzaman yapısı artık noktalardan oluşan bir manifold ile değil nokta yerine Planck hücresinin tanımlı bulunduğu bir yapı ile tasvir edilebilir. Böylesi bir uzayzaman yapısı komütatif olmayan bir geometri tanımından doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Biz burada öncelikle komütatif olmama özelliğinin sicim kuramlarında nasıl ortaya çıktığını göstereceğiz. Daha sonra böylesi bir yapı üzerinde bir ayar kuramının nasıl tanımlanabileceğini anlatacağız.

Sicim kuramlarında uzayzaman komütatif olmama özelliğinin gerçekleşmesi

Dp-zarı p uzaysal boyutu göstermek üzere, (p+1) boyutlu bir nesnedir. Buradaki D harfi Drichlet sınır koşulunu simgeler. Uzayzamanda böylesi bir zar bulunması durumunda açık sicimlerin uçları bu zarın üzerinde sonlanırlar. Arka planda durgun (statik) ve tekdüze (uniform) bir $B_{\mu\nu}$ alanının bulunması durumunda D-zarı üzerinde sonlanan bir açık sicimi göz önüne alalım. Böylesi bir yapılandırma için eylem

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma} d^2\sigma\left[\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} + \varepsilon^{ab} B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\right] \tag{1}$$

ile verilir. Burada a, b sicimin yaşam örtüsü (world sheet) koordinatları ve g^{ab} yaşam örtüsü metriğini gösterirken, $\eta^{\mu\nu}$ sicimin içinde yaşadığı uzayzaman metriğini göstermektedir. İntegral sicimin yaşam örtüsü üzerinde tanımlıdır. İntegral içindeki ikinci terim arka plan alanının sicim ile olan etkileşmesini göstermektedir. Eylemin varyasyonu alınırsa

$$\delta S = -\int_{\Sigma} d^2\sigma\left(\eta_{\mu\nu} g^{\hat{a}b}\partial_a\partial_b X^\nu \delta X^\mu\right) + \int_{\partial\Sigma} d\tau\left(-\eta_{\mu\nu}\delta X^\mu \partial_\sigma X^\nu + B_{\mu\nu}\delta X^\mu \partial_\tau X^\nu\right)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \tag{2}$$

elde edilir. Eylemin değişmezliği koşulu, $\delta S = 0$, hareket denklemlerini ve sınır koşullarını verir.

$$\left(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2\right) X^\mu = 0 \tag{3}$$

$$\partial_\sigma X^\mu - B_{\mu\nu}\partial_\tau X^\nu = 0, \quad \sigma = 0,\pi \tag{4}$$

Sicim koordinatları sınır koşulları göz önüne alınarak (3) denkleminden aşağıdaki şekilde mod açılımı yapılarak çözülebilir.

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + p^\mu\tau + B^{\mu\nu} p_\nu \sigma + \sum_{n\neq 0}\frac{e^{-in\tau}}{n}\left(i a_n^\mu \cos n\sigma + B_\nu^\mu a_n^\nu \sin n\sigma\right) \tag{5}$$

Kanonik momentumların tanımı;

$$P_\mu(\tau,\sigma) \equiv \frac{\delta S}{\delta\,\partial_\tau X^\mu(\tau,\sigma)} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial_\tau X_\mu - B_{\mu\nu}\partial_\sigma X^\nu\right) \tag{6}$$

sonucunu verir. Kanonik kuantizasyon için kanonik çiftler arasında;

$$\left[X^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')\right] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{7}$$

$$\left[P^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')\right] = 0 \tag{8}$$

komütasyon ilişkileri tanımlanır. X^μ'nün (5) ile verilen açılımındaki katsayıların sağladığı komütasyon bağıntıları (6)-(8) kullanılarak aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$\left[p^\mu, p^\nu\right] = 0,\ \left[x_0^\mu, p_\nu\right] = 2i\alpha'\left(\delta_\nu^\mu - B_\rho^\mu B_\nu^\rho\right)^{-1} \tag{9}$$

$$\left[a_n^\mu, a_m^\nu\right] = 2n\alpha'\delta_{n,-m}\left(\delta^{\mu\nu} - B^{\mu\rho}B_\rho{}^\nu\right)^{-1}, \tag{10}$$

$$\left[p^{\mu}, a_m^{\nu}\right] = \left[x_0^{\mu}, a_m^{\nu}\right] = 0. \qquad (11)$$

(7)-(8) bağıntısına ek olarak sicimin koordinatları için $\left[X^{\mu}, X^{\nu}\right] = 0$ şeklinde bir komütasyon ilişkisi diğer komütasyon bağıntıları ile tutarsızlığa yol açar. Sicimin pozisyonunu gösteren değişkenlerin normalden farklı bir ilişki sağladığı görülmektedir.

$$\left[X^{\mu}(\sigma), X^{\nu}(\sigma')\right] = \begin{cases} \left[x_0^{\mu}, x_0^{\nu}\right] & \sigma = \sigma' = 0 \\ \left[x_0^{\mu}, x_0^{\nu}\right] + 2\mathrm{M}^{\mu\nu} & \sigma = \sigma' = \pi \\ \left[x_0^{\mu}, x_0^{\nu}\right] + \mathrm{M}^{\mu\nu} & \textit{diğer} \end{cases} \qquad (12)$$

Burada $\mathrm{M}^{\mu\nu} = 2\pi i\alpha'\left(\delta_{\rho}^{\mu} - B^{\mu\kappa}B_{\kappa\rho}\right)^{-1}B^{\rho\nu}$ şeklinde tanımlıdır. x_0^{μ} komütasyonları ile ilgili bir bilgi bulunmamasına rağmen bunlar nasıl seçilirlerse seçilsinler sicimin koordinatları komütatif olmamaya devam edeceklerdir. x_0^{μ} komütasyonundaki bu keyfilik çeşitli şekillerde belirlenmeye çalışılmıştır. Zaman ortalaması alınmış bir simplektik form kullanılarak yapılan hesaplama sonucunda bu komütasyon ilişkisi şu şekilde elde edilmiştir (Chu ve Ho, 1998).

$$\left[x_0^{\mu}, x_0^{\nu}\right] = -2\pi i\alpha'\left(\delta_{\rho}^{\mu} - B^{\mu\kappa}B_{\kappa\rho}\right)^{-1}B^{\rho\nu} \qquad (13)$$

Bu sonuç (12)'de yerine yazılırsa sicimin yaşam örtüsü koordinatları için şu sonuç elde edilir:

$$\left[X^{\mu}(\tau,\sigma), X^{\nu}(\tau,\sigma')\right] = \begin{cases} -\mathrm{M}^{\mu\nu} & \sigma = \sigma' = 0 \\ \mathrm{M}^{\mu\nu} & \sigma = \sigma' = \pi \\ 0 & \textit{diğer} \end{cases} \qquad (14)$$

Görüldüğü üzere sicim koordinatları zara bağlandığı uç noktalarda komütatif olmamaktadır. Benzer bir sonuç Ardalan ve diğerlerinin (1999) çalışmasında, sicimin sınır koşulları Dirac kuantizasyon yöntemindeki bağlar olarak ele alınarak ve bağlı sistem analizi ile incelenerek elde edilmiştir.

Bu sonuçlar ışığında artık koordinatları arasında sıfırdan farklı bir komütasyon ilişkisi bulunan bir uzaydan bahsediyoruz ve bu uzay üzerinde tanımlı fonksiyonlar arasındaki cebrin yapısı da bundan dolayı bilinen komütatif cebirden farklı olacaktır. Böylesi bir komütatif olmayan uzayı realize etmenin bazı farklı yolları bulunmaktadır. Yıldız (star) çarpım bunlardan birisidir. Yıldız çarpımı veya Weyl-Moyal çarpımı asosyatif fakat komütatif olmayan bir çarpım kuralıdır. Fonksiyonların yıldız çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$f * g(x) = \exp\left(\frac{i\theta^{\mu\nu}}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right) f(x)g(y)\Big|_{x=y} \qquad (15)$$

Buradaki $\theta^{\mu\nu}$ komütatif olmazlık parametresidir ve bizim inceleyeceğimiz durumlarda sabit olarak tanımlanmıştır. Fakat en genelde bu, koordinatların ve momentumların bir fonksiyonu olabilir. Buna bağlı olarak yıldız çarpımının da (15)'de verilenden farklı bir tanımlanmasına ulaşılır. Bu çarpım kuralı altında koordinat değişkenleri görüleceği üzere aşağıdaki şekilde bir komütasyon bağıntısına uyacaklardır

$$\left[x^{\mu}, x^{\nu}\right]_* \equiv x^{\mu} * x^{\nu} - x^{\nu} * x^{\mu} = i\theta^{\mu\nu} \qquad (16)$$

Yıldız çarpımın sağladığı bazı önemli özellikler şunlardır;

$$\int dx\,(f * g)(x) = \int dx\, f(x)g(x) \qquad (17)$$

$$\int dx(f * g * h) = \int dx(f * g)h = \int dx\, f(g * h) \qquad (18)$$

Bu ilişkiler fonksiyonların $\int \partial(fg)dx = 0$ ile verilen sınır koşullarını sağlaması koşuluyla geçerlidirler.

Seiberg-Witten gönderimi

Böylece bir arka plan alanının bulunması durumunda sicim koordinatlarının ve bundan dolayı da D-zarlarının yaşam hacimlerinin (world volume) komütatif olmayan hale geldiğini gördük. D-zarları üzerindeki etkin olan fizik iki farklı yolla tanımlanabilir: Bunlardan birisi komütatif bir ayar kuramı ile diğeri ise komütatif olmayan ayar kuramı ile verilir. Bu iki farklı tanımlama birbirlerine eşdeğerdirler ve sicim kuramının iki farklı regülarizasyonundan ortaya çıkarlar. Seiberg ve Witten (1999) bu iki farklı tanımlamayı birbirine dönüştüren bir gönderim bulunduğunu gösterdiler. Bu eşdeğerlilik sicim kuramının ayrışma (decoupling) limiti olarak adlandırılan alan kuramı limitinde ve yavaş değişen alan varsayımı ile tanımlanmaktadır. Gönderim iki farklı ayar kuramındaki ayar değişmezlikleri arasında tanımlanmıştır ve bunu yaparken ayar grupları arasında herhangi bir ilişki kurmaz. Bunu yapabilmek için komütatif olmayan ayar alanı ve ayar parametresinin normal ayar alanı ve ayar parametresi cinsinden bir yeniden tanımlanmasına ihtiyaç vardır. Ayar cebrinde değer alan A normal ayar alanı, λ normal ayar parametresi, $\hat{A}$ komütatif olmayan ayar alanı ve $\hat{\lambda}$ komütatif olmayan ayar parametresini göstermek üzere her iki kuramdaki ayar dönüşümleri şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\lambda, A_\mu], \\ &F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu], \\ &\delta_\lambda F_{\mu\nu} = i[\lambda, F_{\mu\nu}]. \end{aligned} \tag{19}$$

ve

$$\begin{aligned} &\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + i\hat{\lambda} * \hat{A}_\mu - i\hat{A}_\mu * \hat{\lambda}, \\ &\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu + i\hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu, \\ &\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{F}_{\mu\nu} = i\hat{\lambda} * \hat{F}_{\mu\nu} - i\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{\lambda}. \end{aligned} \tag{20}$$

Ayar değişmezlikleri arasındaki gönderim:

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_\lambda A) \tag{21}$$

olarak tanımlanır. Komütatif olmayan değişkenlerin normal alanlar cinsinden θ'ya bağlı olarak $\hat{A}(A) = A + A'(A)$, $\hat{\lambda}(\lambda, A) = \lambda + \lambda'(\lambda, A)$ açılımı tanımlanırsa ve (21) eşitliği θ'nın kuvvetlerine göre açılacak olursa;

$$\begin{aligned} &A'_\mu(A) = -\frac{1}{2}\theta^{\nu\rho}\left(A_\nu F_{\rho\mu} + A_\nu \partial_\rho A_\mu\right) + O(\theta^2), \\ &\lambda'(\lambda, A) = \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \lambda \, A_\nu + O(\theta^2) \end{aligned} \tag{22}$$

sonuçları elde edilir. Bu tanımlar altında komütatif olmayan alan gerilimi komütatif olmazlık parametresine birinci dereceden bağlı olmak üzere şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}\left(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu}\right) \tag{23}$$

Seiberg-Witten gönderimi (22)-(23) komütatif olmayan alanların komütatif alanlar cinsinden bir dönüşümünü verir ve böylece kuramın normal ayar alanları ile çalışılmasına imkân verir.

Dualite

Dualite ile fiziğin pek çok farklı alanında karşılaşılır. Dual kuramlar bir modeli farklı alanlar ile tasvir ederler ve genel olarak bu alanlar arasındaki ilişki açık olarak kurulamaz. Örneğin dört boyutta skaler-tensör dualitesinde serbest bir Klein-Gordon alanı ϕ, eşdeğer olarak serbest bir antisimetrik tensör alan $A_{\mu\nu}$ cinsinden tasvir edilebilir. Bu dualite d boyuttaki p-form ile (d-p-2)-form arasındaki dualitenin özel bir durumudur. Dört boyutta kütlesiz, serbest bir Klein-Gordon alanını ele alalım;

$$S_\phi = \frac{1}{2}\int d^4x(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \tag{24}$$

Bu eylemden türetilen hareket denklemleri

$$\partial_\mu F^\mu(\phi) = 0 \tag{25}$$

dır. Alanın gerilimi $F_\mu = \partial_\mu \phi$ olarak tanımlanır ve bu durumda "Bianchi özdeşliği"

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu\rho} = 0 \tag{26}$$

ile verilir. Burada tamamıyla antisimetrik tensör $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ kullanılarak ${}^*F^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_\sigma$ şeklinde tanımlıdır. Diğer taraftan dört boyutta, kütlesiz antisimetrik rank iki tensör için eylem

$$S_A = \frac{1}{3!}\int d^4x \, \partial_{[\mu}A_{\nu\rho]}\partial^{[\mu}A^{\nu\rho]} \tag{27}$$

dır. Köşeli parantez içindeki indisler kendi aralarında antisimetriktirler. Bu eylem için hareket denklemleri ve "Bianchi özdeşliği", sırasıyla

$$\partial_\mu F^{\mu\nu\rho\sigma}(A) = 0$$
$$\partial_\mu {}^*F^{\mu}(A) = 0 \tag{28}$$

ile verilir. Görüldüğü üzere bu iki kuram arasında hareket denklemleri ve Bianchi özdeşlikleri yer değiştirmektedir. Doğal olarak her iki denklem sistemi aynı fiziği tanımlamaktadırlar. Dual kuramları tek bir eylemden hareketle tanımlamanın uygun bir yöntemi bulunmaktadır. “Ana” eylem adı verilen bir eylemden hareketle bu yapılabilmektedir. Örneğin Klein-Gordon alanı ile ilgili olarak aşağıdaki eylemi göz önüne alalım;

$$S_P = \int d^4x\Big(\frac{1}{3!}F_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu\rho} + b\phi\partial_\mu {}^*F^{\mu}\Big) \tag{29}$$

Burada ϕ alanı bir Lagrange çarpanı ve $F_{\mu\nu\rho}$ bağımsız bir tensör alanıdır, yani $F \neq dA$. Eylemin ϕ’ye göre varyasyonu alınarak bulunan denklemin çözümü (29)’da yerine yazılırsa tensör alanının eylemi (27) elde edilir. Diğer taraftan $F_{\mu\nu\rho}$ alanına göre varyasyonun alınıp çözümlerin ana eylemde yerine yazılması ile ve b katsayısının uygun bir seçimi ile kütlesiz serbest Klein-Gordon alanının eylemi (24)’e ulaşılır. Böylece S_ϕ ve S_A eylemlerinin klasik olarak S_P ana eylemine eşdeğer oldukları ve bundan dolayı birbirlerinin duali oldukları gösterilmiş olur.

Komütatif olmayan U(1) ayar kuramı için dual hamilton fonksiyonu

Dört boyutta $\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,+)$ işaretli Minkowski metriği ile tanımlı uzayzamanda tanımlanan U(1) ayar kuramı için eylem aşağıdaki şekilde verilir:

$$S = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{30}$$

Burada $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ şeklinde tanımlı elektromanyetik gerilim tensörüdür. Şimdi yukarıdaki örneğe benzer şekilde, F değişkeni için bir Legendre dönüşümü yaparak ana eylemi tanımlamak istiyoruz.

$$S_P = \int d^4x\Big(-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_D^\mu\partial^\nu F^{\rho\sigma}\Big) \tag{31}$$

Bu aşamada F artık bir vektör alandan türetilmeyip ikinci dereceden antisimetrik bir tensördür ve dual alan A_D bir Lagrange çarpanıdır. Görüleceği üzere F değişkeni için alan denklemlerinin çözülmesi ile ya da eşdeğer olarak F üzerinden yol ile ilgili integral alınması ile dual eylem elde edilir.

$$S_D = -\frac{g^2}{4}\int d^4x F_D^{\mu\nu}F_{D\mu\nu} \tag{32}$$

Burada $F_D = dA_D$ olup dual alanın gerilim tensörüdür. Diğer taraftan dual alan için aynı işlem tekrarlanırsa Bianchi özdeşliğinin kullanılmasıyla (30) elde edilir.

Şimdi ana eylemin kanonik formülasyonundan hareketle dual hamilton fonksiyonunun nasıl elde edilebileceğini inceleyeceğiz. Bunun için Dirac’ın bağlı sistem analizini kullanacağız (Dirac, 1964). Kanonik momentumlar tanımlanırsa:

$$P_{\mu\nu} = \frac{\delta S_P}{\delta(\partial^0 F^{\mu\nu})}; \quad P_{D\mu} = \frac{\delta S_P}{\delta(\partial^0 A_D^\mu)} \tag{33}$$

Birincil bağlar aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$\Phi^1_{\mu\nu} \equiv P_{\mu\nu} \approx 0 \tag{34}$$

$$\xi^1 \equiv P_{D0} \approx 0 \tag{35}$$

$$\chi^1_i \equiv P_{Di} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk} \tag{36}$$

Ana eylem için kanonik hamiltonyen

$$H_K = \int d^3x\Big(\frac{1}{2g^2}F^{0i}F_{0i} + \frac{1}{4g^2}F^{ij}F_{ij} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial^i A_D^0 F^{jk} + \varepsilon_{ijk}\partial^i A_D^j F^{ok}\Big) \tag{37}$$

elde edilir. Bu aşamada hamilton fonksiyonu tam olarak belirlenmiş değildir ve birincil bağların bazı Lagrange çarpanlarıyla birlikte eklenmesiyle genişletilebilir.

$$H_G = H_K + \int d^3x\big(\alpha_i P_{0i} + \beta P_{D0} + \lambda_{ij} P_{ij} + \kappa_i \chi_i^2\big) \tag{38}$$

Birincil bağların zaman içinde değişmemesi koşulu ya yeni bazı bağlara yol açar ya da bazı Lagrange çarpanlarını tanımlar. Bu şekilde elde edilen yeni bağlara ikincil bağlar denir. Bunlar;

$$\Phi^3 \equiv \{P_{D0}, H_G\} = \varepsilon_{ijk}\partial^i F^{jk} \approx 0 \tag{39}$$

$$\chi^2 \equiv \{P_{0i}, H_G\} = \frac{1}{g^2}F_{0i} + \varepsilon_{ijk}\partial^j A_D^k \approx 0 \tag{40}$$

Ayrıca (36) ve (39) eşitliklerinden

$$\partial_i P_D^i \approx 0 \tag{41}$$

şeklinde bir bağ daha elde edilebilir. Poisson parantezleri eşit zamanlı faz uzayı değişkenleri için şu şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned}\{P_D^\mu(\vec{x}), A_{D\nu}(\vec{y})\}_{P.B.} &= -\delta_\nu^\mu \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ \{P^{\mu\nu}(\vec{x}), F_{\rho\kappa}(\vec{y})\}_{P.B.} &= -\frac{1}{2}(\delta_\rho^\mu\delta_\kappa^\nu - \delta_\kappa^\mu\delta_\rho^\nu)\cdot \\ &\quad \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{42}$$

Benzer şekilde ikincil bağların da zaman içinde sabit kalması koşulu kontrol edildiğinde bunların yeni bağlar vermediği görülür. Sistemin bütün bağları böylece elde edilmiş oldu. Dirac'ın tanımlamış olduğu sınıflama uyarınca bunlar birinci sınıf ve ikinci sınıf olarak ayrıştırılırlar. Diğer bütün bağlar ile Poisson parantezleri sıfır olan bağlar birinci sınıf olarak adlandırılır. Bunların dışında kalanlar ise ikinci sınıf bağlardır. Bu tanım uyarınca (35) ve (41) bağları birinci sınıf geri kalanlar ise ikinci sınıftır. Sistemin fiziksel serbestlik dereceleri cinsinden tanımlanması için bütün ikincil sınıf bağların kuvvetli olarak sıfır alınması ile elde edilen indirgenmiş faz uzayına gidilmelidir. Bu durumda ikinci sınıf bağlardan F ve P'nin F_D ve P_D cinsinden çözülmesiyle kanonik hamilton fonksiyonu:

$$H_D = \int d^3x\Big(\frac{1}{2g^2}P_{Di}P_D^i + \frac{g^2}{4}F_{Dij}F_D^{ij}\Big) \tag{43}$$

haline gelir. Dual kuramın Hamilton fonksiyonu elde edilir ve ek olarak birinci sınıf bağlar:

$$P_{D0} \approx 0, \quad \partial_i P_D^i \approx 0 \tag{44}$$

var olmaya devam edeceklerdir. Bu, eğer ana eylem yerine dual Lagrange fonksiyonundan başlansaydı elde edilecek Hamilton formalizmi olurdu. Böylece ana eylemin, dual Hamilton fonksiyonun dogru bağ yapısı ile elde edilebilmesi için uygun bir araç olduğu görülmektedir. Daha sonra bu birinci sınıf bağlarla ilgili olarak uygun ayar seçimlerinin yapılması gerekir fakat şimdilik bu bizi ilgilendirmediği için bunları bir kenara bırakıyoruz. Şimdi aynı formalizmin komütatif olmayan durumda Hamilton fonksiyonunun elde edilmesine uygulayacağız.

Komütatif olmayan U(1) ayar kuramı

$$\tilde{S} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} \tag{45}$$

eylemi ile verilir. Komütatif olmayan alan gerilimi (20) eşitliğinde tanımlanmıştır ve (23) ile verilen Seiberg-Witten gönderiminin kullanılmasıyla (45) eşitliğindeki eylem normal alanlar cinsinden komütatif olmazlık parametresi θ'ya birinci dereceden bağlı olmak üzere şu şekilde ifade edilebilir

$$\tilde{S} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\Big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\theta^{\mu\nu}F_{\nu\rho}F^{\rho\sigma}F_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\Big) \tag{46}$$

Burada komütatif olmama özelliği sadece uzay koordinatları arasında varsayılmış, uzay ve zaman koordinatları arasında ise böylesi herhangi bir ilişki varsayılmamıştır: $\theta^{ij} \neq 0, \theta^{0i} = 0$. Normal alanlar için bir önceki bölümde anlatılan yaklaşım kullanılarak ana eylem bir Legendre dönüşümüyle yazılabilir. Bu durumda:

$$\widetilde{S}_P = \widetilde{S} + \frac{1}{2}\int d^4x A_D^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} \tag{47}$$

şeklinde tanımlanır ve önceki durumda olduğu gibi burada da $F \neq dA$'dır. Dual kuram F değişkenine göre hareket denklemleri çözülerek ve ana eylemde yerine yazılarak elde edilebilir.

$$\widetilde{S}_D = -\frac{g^2}{4}\int d^4x\big(F_D^{\mu\nu}F_{D\mu\nu} + 2\widetilde{\theta}^{\mu\nu}F_{D\nu\rho}F_D^{\rho\sigma}F_{D\sigma\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^{\mu\nu}F_{D\mu\nu}F_{D\rho\sigma}F_D^{\rho\sigma}\big) \tag{48}$$

Dual kuramdaki komütatif olmama parametresi $\widetilde{\theta}^{\mu\nu} = g^2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\theta_{\rho\sigma}$ şeklinde tanımlıdır. (48) eşitliği

$$\widetilde{S}_D = -\frac{g^2}{4}\int d^4x \hat{F}_D^{\mu\nu} \,\widetilde{*}\, \hat{F}_{D\mu\nu} \tag{49}$$

eyleminden komütatif olmama uzay ve zaman koordinatları arasında varsayılması durumunda, $\theta^{ij} = 0, \theta^{0i} \neq 0$, Seiberg-Witten gönderimi kullanılarak elde edilebilir. Burada $\widetilde{*}$ (15) ile verilen yıldız çarpımı öncekinden farklı olarak komütatif olmama özelliğinin sadece uzay ve zaman bileşenleri arasında varsayılması ile tanımlanmıştır.

Burada dual kuramın uzay ve zaman koordinatları arasında komütatif olmama özelliği bulunduğu için kanonik kuantizasyonun nasıl tanımlanacağı açık değidir. Bu nedenle normal alanlar için elde edilen sonuçların ışığı altında ana eylemden başlayarak Hamilton fonksiyonunu tanımlamaya çalışacağız. Ana eylemde komütatif olmama uzay koordinatları arasında tanımlıdır ve kanonik momentumların tanımı:

$$\widetilde{P}_{\mu\nu} = \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta(\partial^0 F^{\mu\nu})}, \tag{50}$$

$$\widetilde{P}_{D\mu} = \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta(\partial^0 A_D^\mu)} \tag{51}$$

sonuçlarını verir. Kanonik Hamilton fonksiyonu θ'ya birinci mertebeden bağlı olarak:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_K = \int d^3x\{ & -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial^i A_D^0 F^{jk} + \varepsilon_{ijk}\partial^i A_D^j F^{0k} \\ & + \frac{1}{2g^2}F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4g^2}F_{ij}F^{ij} \\ & + \frac{1}{2g^2}F^{ij}F_{jk}\theta^{kl}F_{li} - \frac{1}{4g^2}\theta^{ij}F_{ij}F_{0k}F^{ok} \\ & - \frac{1}{8g^2}\theta^{ij}F_{ij}F_{kl}F^{kl} + \frac{1}{g^2}F^{0i}F_{ij}\theta^{jk}F_{k0}\}\end{aligned} \tag{52}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda birincil bağlar:

$$\widetilde{\Phi}^1_{\mu\nu} \equiv P_{\mu\nu} \approx 0, \tag{53}$$

$$\widetilde{\xi}^1 \equiv P_{D0} \approx 0, \tag{54}$$

$$\widetilde{\chi}^1_i \equiv P_{Di} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}, \tag{55}$$

olarak elde edilirler ve bunların zaman içinde değişmemeleri koşulu kullanılarak ikincil bağlar elde edilecek olurlarsa:

$$\widetilde{\Phi}^3 \equiv \varepsilon_{ijk}\partial^i F^{jk} \approx 0, \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}^2_i \equiv & F^{0i} - F_{ij}\theta^{jk}F_{k0} - F^{0j}F_{jk}\theta^{ki} \\ & -\frac{1}{2}\theta^{jk}F_{kj}F_{0i} - g^2\varepsilon_{ijk}\partial^j A_D^k \approx 0\end{aligned} \tag{57}$$

sonuçları bulunur. (54) ve (56)'dan

$$\widetilde{\xi}^2 \equiv \partial_i P_D^i \approx 0, \tag{58}$$

bağı elde edilir. (54) ve (58) birinci sınıf bağlar, diğerleri ikinci sınıftır. İkinci sınıf bağların kuvvetli olarak sıfıra eşit alınması ile elde edilen indirgenmiş faz uzayındaki dual Hamilton fonksiyonu şu şekili alır:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_D = \int d^3x\{ & \frac{g^2}{4}F_{Dij}F_D^{ij} + \frac{1}{2g^2}P_{Di}P_D^i \\ & + \frac{1}{2g^2}\widetilde{\theta}_{0i}P_D^i P_{Dj}^2 + \frac{1}{4}\widetilde{\theta}_{0i}P_D^i F_{Djk}^2 + \widetilde{\theta}^{0i}F_{Dij}F_{Djk}P_D^k\}\end{aligned} \tag{59}$$

Burada $\widetilde{\theta}^{0i} = g^2 \varepsilon^{ijk}\theta_{jk}$ şeklinde tanımlıdır ve dual kuram görüleceği üzere uzay-zaman komütatif değildir. Birinci sınıf bağlar (54) ve (58) var olmaya devam edeceklerdir.

Bulunan bu dual Hamilton fonksiyonu, (48) ile verilen eylemden başlanarak uzay ve zaman koordinatları arasındaki komütatif olmama özelliği dikkate alınmadan kanonik kuantizasyon yapılması durumunda elde edilecek olan Hamilton fonksiyonu ile aynı olurdu.

Komütatif olmayan U(1) kuramında elektrik-manyetik dualite dönüşümleri

Elektrik-manyetik dualite dönüşümleri boşluk Maxwell eşitliklerinin bir değişmezliği olsa da Lagrange fonksiyonunu kendisinin eksi işaretlisine gönderirken Hamilton fonksiyonunu değişmez bırakır. Eylemlerin elektrik-manyetik dualite altında nasıl dönüştüklerini incelemek için bunları elektrik ve manyetik alanlar cinsinden ifade edelim. Bunun için $E_i = F_{0i}$ ve $B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$ olarak tanımlanmak üzere (46)

$$\widetilde{S} = \int d^4x\{\frac{1}{2g^2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)(1-\vec{\theta}\cdot\vec{B}) + \frac{1}{g^2}\vec{\theta}\cdot\vec{E}\,\vec{E}\cdot\vec{B}\} \tag{60}$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ vektörü $\theta^{ij} = \varepsilon^{ijk}\theta_k$ olarak tanımlanmıştır. (48) eylemi için de $E_i = F_{D0i}$ ve $B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_D^{jk}$ olarak tanımlanırsa:

$$\widetilde{S}_D = \int d^4x\{\frac{g^2}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)(1+\vec{\widetilde{\theta}}\cdot\vec{E}) + g^2\vec{\widetilde{\theta}}\cdot\vec{B}\,\vec{E}\cdot\vec{B}\} \tag{61}$$

bulunur. $\vec{\widetilde{\theta}} \equiv \widetilde{\theta}^{0i}$'dir. (60) eyleminde

$$\vec{E} \to g^2\vec{B}, \quad \vec{B} \to -g^2\vec{E} \tag{62}$$

dönüşümü yapılınca (61) ile verilen dual kuramın Lagrange yoğunluğunun eksi işaretlisi elde edilir. Hamilton yoğunluklarını da elektrik ve manyetik alanlar cinsinden yazmak için $P_i = g^{-2}D_i$ olarak tanımlanır ve manyetik alan için aynı tanım $B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_D^{jk}$, kullanırsa (46) eylemine ait Hamilton yoğunluğu için

$$\widetilde{H} = \int d^3x[\frac{1}{2g^2}(D^2+B^2) - \frac{1}{g^2}\vec{\theta}\cdot\vec{D}\,\vec{B}\cdot\vec{D}) - \frac{1}{2g^2}\vec{\theta}\cdot\vec{B}(\vec{B}^2-\vec{D}^2)] \tag{63}$$

elde edilir. (59) ile verilen dual Hamilton yoğunluğu da $P_{Di} = g^2D_i$ cinsinden

$$\widetilde{H}_D = \int d^3x[\frac{g^2}{2}(D^2+B^2) - g^2\vec{\widetilde{\theta}}\cdot\vec{B}\vec{B}\cdot\vec{D} - \frac{g^2}{2}\vec{\widetilde{\theta}}\cdot\vec{D}(D^2-B^2)] \tag{64}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda dual Hamilton fonksiyonları arasındaki geçiş

$$\vec{D} \to -g^2\vec{B}, \quad \vec{B} \to g^2\vec{D} \tag{65}$$

ile tanımlanır. Görüleceği üzere dönüşümler (62) eşitliğine göre ters olarak tanımlanmaktadır.

Sonuçlar ve tartışma

Komütatif olmayan U(1) teorisi için dualitenin incelendiği bu çalışmada elde edilen sonuçlar şöyle özetlenebilir. Öncelikle uzay koordinatları arasında komütatif olmama özelliğinin bulunduğu U(1) ayar teorisi için S dualite ile uzay ve zaman koordinatları arasında komütatif olmama özelliği bulunan bir ayar kuramına ulaşılır. Böylesi bir durumda kanonik kuantizasyonun nasıl tanımlanacağı açık olmadığından Hamilton fonksiyonunun elde edilmesi için alternatif bir yola ihtiyaç vardır. Bu alternatif yol ana eylemin bağlı Hamilton sistemi olarak çalışılması ile elde edilmiştir. Böylesi uzay/zaman komütatif olmayan kuramlar, sicim kuramlarının belli konfigürasyonlarında ortaya çıktıkları için bunların daha iyi anlaşılması gerekmektedir. Burada elde edilen sonuçlardan görüleceği üzere uzay ve zaman koordinatları arasında tanımlı bulunan komütatif olmazlık kanonik kuantizasyonun yapılmasında herhangi bir engel oluşturmamaktadır. Hamilton formalizmine ana eylem yerine uzay-zaman komütatif olmayan eylemden başlansaydı aynı sonuç elde edilecekti. Bu yolla elde edilen sonuçlar (Dayı ve Yapışkan. 2002), eylemin ötelemeler altında değişmez olmasından hareketle elde edilecek enerji yoğunluğu ifadesi ile tutarlı olmaktadır. Ana eylem yönteminin üstünlüğü sistemin bağ denklemlerinden hareketle problemin bazı cebrik denklemlerin çözülmesine indirgenmesi ve aynı yaklaşımın dualitenin incelendiği başka durumlara da kolaylıkla uygulanmasıdır. Aynı yöntem kullanılarak dual kuramlara ait bölüşüm fonksiyonları hesaplanabilmiş ve bunların eşdeğerliliği gösterilebilmiştir (Dayı ve Yapışkan, 2004). Elde edilen bu sonuçlar D-zarlarının yaşam hacim kuramlarının çalışılmasında önemli olmaktadır. Bu yolla D3-zarı yaşam hacim teorilerinin BPS durumları incelenebilmektedir (Dayı ve Yapışkan, 2002). BPS kavramı özellikle pertürbatif olmayan dualite simetrilerinin tartışılmasında önemli bir rol oynar. Seiberg-Witten gönderimi komütatif olmazlık parametresine göre tanımlanmış pertürbatif bir açılımdır ve bunun nonpertürbatif olarak da geçerli olup olmadığının tartışılmasında bu tip D3-zar kuramları önemli birer araçtırlar.

Elektrik-manyetik dualite bir kuramdaki elektriksel serbestlik derecelerinin manyetik serbestlik dereceleri ile değiştirilmesiyle tanımlanır. Bunun sonucu olarak elektriksel olarak kuvvetli etkileşmeli bir teoriden, manyetik serbestlik dereceleri cinsinden ifade edilmiş zayıf etkileşmeli bir kurama ulaşılır. Bu dualite dönüşümü başlangıçtaki Lagrange fonksiyonunu kendisinin eksi işaretlisine göndeririken Hamilton fonksiyonunu değişmez bırakır. Komütatif olmayan U(1) ayar kuramı için bu özelliklerin korunduğu ve dual kuramlar arasındaki dönüşümün nasıl tanımlanabileceği gösterilmiştir (Dayı ve Yapışkan, 2004). Ayrıca burada konfigürasyon ve faz uzayındaki dönüşümler ters olarak tanımlanmaktadır.

Kaynaklar

Ardalan, F.,Hessamaddin, A. ve Sheikh-Jabbari, M.M., (1999). Dirac quantization of open strings and noncommutativity in branes, *Nuclear Physics,* **B 576,** 578-596.

Chu, C.-S. ve Ho, P.-M., (1998). Noncommutative open strings and D-branes, *Nuclear Physics,* **B 550**, 151-168.

Dayı, Ö. F. ve Yapışkan, B., (2002). Hamiltonian formulation of noncommutative D3-brane, *Journal of High Energy Physics,* **0210:022**.

Dayı, Ö. F. ve Yapışkan, B., (2004). Equivalence of partition functions for noncommutative u(1) gauge theory and its dual in phase space, *Journal of High Energy Physics*, **0411:064**.

Dirac, P. A. M., (1964). lecture notes on quantum mechanics, Yeshiva University New York.

Seiberg, N. ve Witten, E., (1999). String theory and noncommutative geometry, *Journal of High Energy Physics,* **9909:032**.